٨

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الصف الثامن

الفترة الثانية

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

المحتويات

٢-١ نظرية فيثاغورس	١
٢-٢ عكس نظرية فيثاغورس	٣
٢-٣ تطابق المثلثات (١)	٥
٢-٤ تشابه المثلثات	١٠
٢-٥ تمثيل البيانات بطريقة القطاعات الدائرية	١٤
٢-٦ مقاييس التشتت	١٦

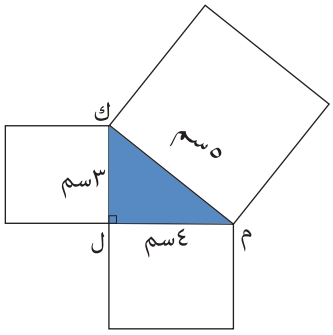
النتاجات

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتماجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف هندسة المثلثات والإحصاء في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١- التعرّف إلى نظريّة فيثاغورس، والتعبير عنها جبريّاً وهندسيّاً.
٢- توظيف نظريّة فيثاغورس وعكسها في حلّ مشكلاتٍ حياتيّة.
٣- التعرّف إلى مفهوم المثلّثات المتطابقة.
٤- التعرّف إلى حالات تطابُق المثلثات.
٥- التعرّف إلى مفهوم المثلّثات المتشابهة.
٦- التعرّف إلى حالات تشابه المثلّثات.
٧- توظيف تطابق المثلّثات، وتشابه المثلثات في حلّ مشكلاتٍ حياتيّة.
٨- إيجاد زاوية قطاع دائريّ معلوم.
٩- تمثيل البيانات بطريقة القطاعات الدّائرية.
١٠- تمثيل البيانات بطريقتَي المُضَلَّع التَّكْراري والمُنْحَنى التَّكْراريّ.
١١- تَعَرُّف مفهوم التَّشَتُّت.
١٢- إيجاد بعض مقاييس التَّشَتُّت لبيانات مفردة.
١٣- توظيف مقاييس التَّشَتُّت في سياقات حياتيّة.

١-٢ نظريّة فيثاغورس

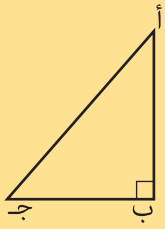
نشاط ١:



رسم المثلث ك ل م، كما في الشكل المجاور، بحيث:
ل ك = ٣سم، ل م = ٤سم، م ك = ٥سم، ثم أُكمل:
مِساحة المربع المُنشأ على الوتر ك م = ٥ × ٥ = ٠٠٠سم^{٢}
مِساحة المربع المُنشأ على ضلع القائمة ل ك = ٣ × ٣ = ٩سم^{٢}
مِساحة المربع المُنشأ على ضلع القائمة ل م = ٤ × ٤ = ٠٠٠سم^{٢}.
مجموع مساحتيّ المربّعيْن المنشأيْن على ضلعيّ الزاوية القائمة = ٩ + ١٦ = ٢٥.

ألاحظ أن: .....

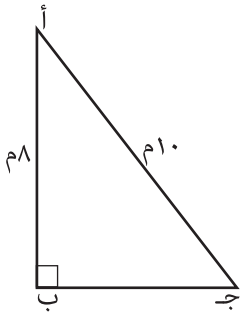
نظريّة فيثاغورس: في المثلّث القائم الزّاوية تكون مِساحةُ المربّع المُنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتيّ المربّعيْن المُنشأيْن على ضلعيّ الزاوية القائمة؛ أيّ أنّ: (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}



نشاط ٢:

يستخدم ضباط الدفاع المدني أدوات مختلفة في إنجاز مهماتهم،وأثناء تنفيذ إحدى المهمات اضطر ضابط لوضع سلم طوله ١٠م على أرض مستوية بحيث يلامس أعلى السلم قمة بناية ارتفاعها ٨م، ما البعد بين الطرف السفلي للسلم وأسفل البناية.

أرسم رسماً توضيحيّاً، كما في الشكل المجاور:



(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(١٠)^{٢} = (٨)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

١٠٠ = ٦٤ + (ب جـ)^{٢}

(ب جـ)^{٢} = ١٠٠ − ٦٤

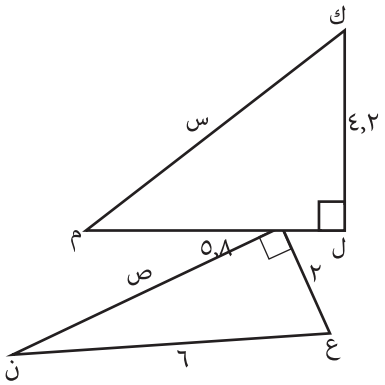
(ب جـ)^{٢} = ٣٦ ، ومنها (ب جـ) = ٠٠٠٠

بعد السلم عن أسفل البناية = ٠٠٠٠م

نشاط ٣:

أُكملُ إيجادَ أطوالِ أضلاعِ المثلّثات الآتية:

أ) (ك م)^{٢} = (ك ل)^{٢} + (ل م)^{٢}



س^{٢} = (٤,٢)^{٢} + ٠٠٠٠ س^{٢} = ٠٠٠٠ + ٣٣,٦٤

س^{٢} = ٥١,٢٨ ومنها س = $\sqrt{٥١,٢٨}$ وحدة طول

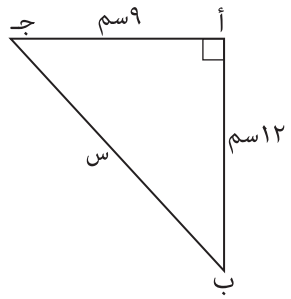
ب) (ع ن)^{٢} = (س ع)^{٢} + (س ن)^{٢} ٠٠٠٠ = (٢)^{٢} + (ص)^{٢}

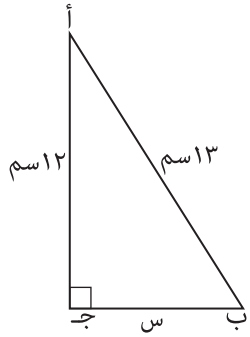
٣٦ − ٠٠٠٠ = ص^{٢} ومنها ص^{٢} = ٣٢

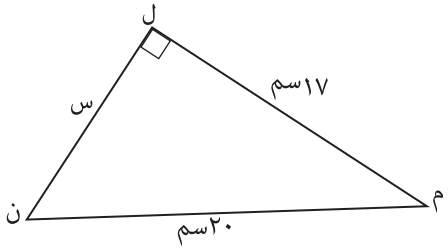
أيّ أنّ: ص = $\sqrt{٣٢}$ وحدة طول

تمارين ومسائل:

أجدُ قيمةَ س في كل من المثلّثات القائمة الآتية:



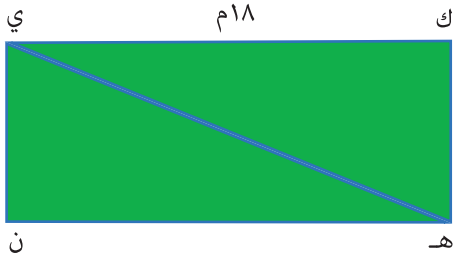




٢) أحسبُ محيط المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب، الذي فيه:

أ ب = ١٥سم، أ جـ = ٢٥سم

٣) يوضّح الشكل المجاور مخطط حديقةً مستطيلةَ الشكل، طولها ١٨م، ومساحتها ٢١٦م^{٢}، فما طول قُطرِها؟



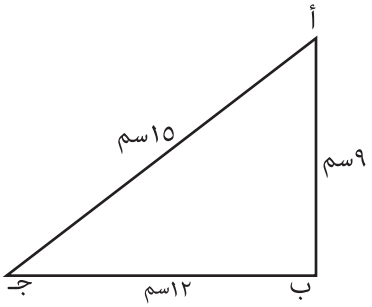
مهمة تعليمية

٧) تم توصيل نقطة تقع على قمة عمود كهرباء ترتفع ٧م عن سطح الارض بسلكٍ كهربائيّ مشدود إلى سطح منزل، ارتفاعه ٣م عن سطح الأرض، فإذا كانت نقطة تثبيت السّلك بقمة المنزل تبعد ٣م عن عمود الكهرباء، فما طول هذا السّلك؟

٢-٢ عكس نظريّة فيثاغورس

نشاط ١: ت

أمّل المثلثاتِ الآتية، ثم أكمل:



أ) (أ جـ)^{٢} = (١٥)^{٢} = ٢٢٥سم^{٢}

(أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = (٩)^{٢} + (١٢)^{٢}

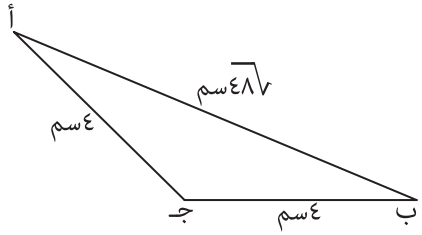
= .... + ...

= ٢٢٥سم^{٢}

ألاحظ أنّ: المثلث قد حقّق نظريّة فيثاغورس. أتحقّقُ بالقياس من أنّ المثلثَ أ ب جـ قائمُ الزّاوية في ب.

ب) (أ ب)^{٢} = (...)^{٢} = ٤٨سم^{٢}

(أ جـ)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = (٤)^{٢} + ... = ٣٢سم^{٢}



ألاحظُ أنّ: (أ ب)^{٢} ≠ (أ جـ)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

أي أن المثلث (أ ب جـ) لايحقق نظرية فيثاغوروس.

أتحقّق بالقياس أنّ المثلثَ أ ب جـ غيرُ قائم الزّاوية.

نظريّة: إذا كانت مِساحةُ المربّع المُنشأ على أطولِ أضلاع المثلّث تساوي مجموعَ مساحتيّ المربّعيْن المُنشأيْن على الضلعيْن الآخريْن، فإنّ الزّاويةَ المقابلةَ للضّلع الأكبرِ تكون قائمةً؛أيّ أنّه: إذا كان (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} فإنّ المثلثَ أ ب جـ قائمُ الزّاوية في ب.

نشاط ٢:

أيّ الأطوال الآتية يمكن أنْ تشكل أطوالاً لأضلاع مثلث قائم الزاوية:

أ) الأطوال: ١سم ، ١سم، √٢سم

(√٢)^{٢} = ...سم^{٢} (١)^{٢} + (١)^{٢} = ١ + ١ = ٢سم^{٢}

أي أنّ: (√٢)^{٢} = (١)^{٢} + (١)^{٢} ومنها الأطوال: ١سم، ١سم، √٢سم تشكّل مثلّثاً قائم الزّاوية. (لماذا؟)

ب) الأطوال: ٧٤سم، ٤٨سم، ٥٥سم.

(٧٤)^{٢} = ...سم^{٢} (٤٨)^{٢} + (٥٥)^{٢} = ٢٣٠٤ + ... = ٥٣٢٩سم^{٢}

ألاحظ أنّ: (٧٤)^{٢} ≠ (٤٨)^{٢} + (٥٥)^{٢}

ومنها الأطوال: ٧٤سم، ٤٨سم، ٥٥سم لا يمكن أن تشكّل مثلّثاً قائم الزاوية. (لماذا؟)

تعريف: تُسمّى الأعدادُ الطبيعيّة التي تُحقّقُ نظريّة فيثاغورس أعداداً فيثاغوريّة.

نشاط٣:

أُكملُ الجدولَ الآتي:

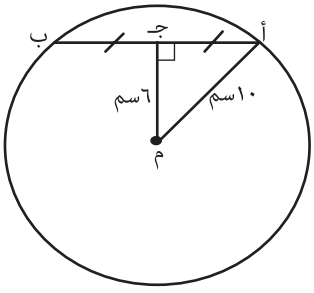
س	ص	ع	س^{٢}	ص^{٢}	ع^{٢}	س^{٢} + ص^{٢}	هل هي أعداد فيثاغورية؟
٦	٨	١٠	٣٦	٦٤	١٠٠	٣٦ + ٦٤ = ٠٠٠٠	نعم؛ لأنّ: .....
٩	١٣	٢٠		١٦٩		٠٠٠٠ + ١٦٩ = ٢٥٠	لا؛ لأن .....

تمارين ومسائل:

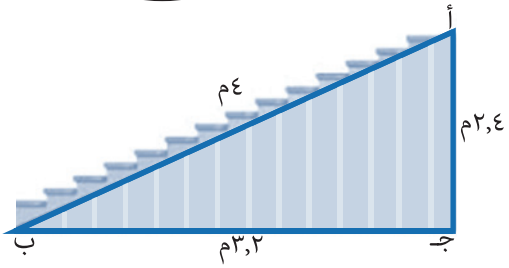
١) أُكملُ الجدول الآتي:

أطوال أضلاع المثلث بالسنتمتر	هل المثلث قائم الزاوية؟
٦ ، ٤,٨ ، ٣,٦	
٦٠، ١١، ٦١	

٢) يبين الشكل المجاور دائرةٌ نصفُ قطرِها ١٠سم، $\overline{\text{أ ب}}$ وترٌ فيها، $\overline{\text{م جـ}}$ عمودي على الوتر أب، ما طول أ ب؟



٣) الشكل المجاور يمثّل درجاً، أبعادُه معلومة،
فهل تم بناء الدرج بحيث تكون زاوية جـ قائمة.



مهمة تعليمية

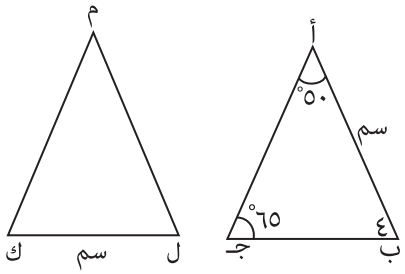
مستخدماً المتر فقط، كيف تتأكد من أن الزاوية في احد غرف منزلك قائمة؟

٣-٢ تطابُق المثلّثات

تعريف: المثلثات المتطابقة أضلاعها المتناظرة متساوية، وقياسات زواياها المتناظرة متساوية.

نشاط ١:

يبيّن الشكل المجاور المثلثيْن المتطابقيْن أ ب جـ، م ل ك، أُكملُ إيجادَ:



∡ ل م ك، ∡ م ل ك، م ل.

∡ ل م ك = ∡ ب أ جـ (لماذا؟)

ومنها: ∡ ل م ك = ...

∡ م ك ل = ∡ أ جـ ب = ٦٥° (لماذا؟)

م ل = أ ب ، ومنها: م ل = ...سم

٣

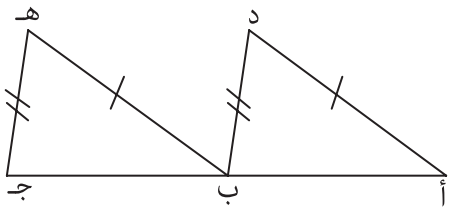
يمكن التحقُّقُ من تطابق مثلثين؛ اعتماداً على حالات تتضمّن الآتية:

الحالة الأولى: تطابُقُ مثلثيْن بثلاثة أضلاع، ويُعبَّرُ عن هذه الحالة بالرموز (ض، ض، ض).

يتطابق مثلثان إذا كانت أطوالُ الأضلاع المتناظرة في المثلثيْن متساوية.

نشاط ٢:

في الشكل المجاور، إذا كان أ د = ب هـ، ب د = جـ هـ، ب منتصف $\overline{أ جـ}$ ، أبيّن أنّ المثلثين أ د ب، ب هـ جـ متطابقان.



أ د = ب هـ (معطى)

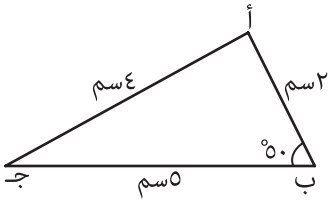
ب د = جـ هـ (معطى)

أ ب = ... (لماذا؟)

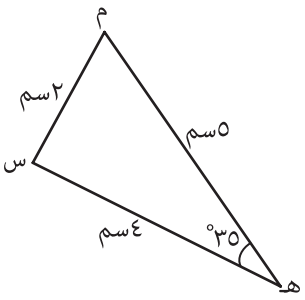
∴ يتطابق المثلثان: أ د ب، ب هـ جـ ؛ وفقاً لحالة التطابق (ض،...،...)

نشاط٣:

رسمت كل من منار وساجدة الوجه العلوي لغطاء علبة حلوى مثلث الشكل وسجلت بعض القياسات كما في التوضيح الآتي، أتأمل ثم أكمل:



(قياسات منار)



(قياسات ساجدة)

المثلّثان: أ ب جـ، س م هـ متطابقان؛ وفقاً للحالة (...، ...، ...)

أ ب = س م　　ب جـ = ...　　أ جـ = ...

ومن التطابق ألاحظ أنّ:

∡ م = ∡ ب

ومنها: ∡ م = ٥٠°　　∡ جـ = ∡ هـ

ومنها: ∡ جـ = ...　　∡ أ = ١٨٠° − (٥٠° + ٣٥°) = ...

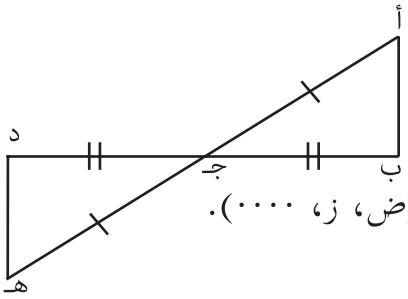
∡ س = ٩٥°　　(لماذا؟)

الحالة الثانية: تطابق مثلّثين بضلعين وزاوية محصورة، ويُعبَّرُ عن هذه الحالة بالرموز: (ض، ز، ض).

يتطابق مثلّثان إذا تساوى طولا ضلعيْن في كل منهما، وتساوي قياسُ الزّاوية المحصورة بين هذين الضلعيْن في كلٍّ منهما.

نشاط٤:

أتأمّل الشكل الآتي، ثم أبحث في تطابق المثلّثين: أ ب جـ، هـ د جـ.



أ جـ = جـ هـ　　(لماذا؟)　　ب جـ = ...

∡ د جـ هـ = ∡ ب جـ أ　　(لماذا؟)

∴ يتطابق المثلثان: أ ب جـ، هـ د جـ ؛ وفقاً لحالة التطابق الثانية (ض، ز، ....).

الحالة الثالثة: تطابُقُ مثلثين بزاويتين وضلع، ويُعبَّرُ عن هذه الحالة بالرموز: (ز، ض، ز).

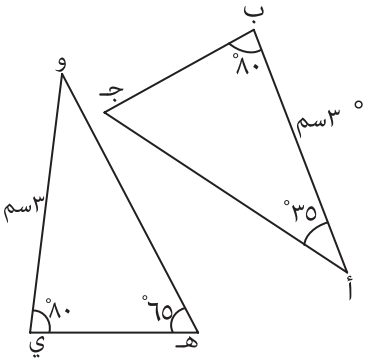
يتطابق مثلّثان إذا تساوى فيهما طولُ ضلعٍ، وقياسُ الزاويتيْن المرسومتيْن عند نهايتيّ ذلك الضلع.

نشاط ٥:

أبحث في تطابق المثلثين: أ ب جـ، و ي هـ ، معتمداً على التمثيل المجاور:

أ ب = و ي = ... ∡ ب = ∡ ي = ... ∡ و = ٣٥ ° ٣سم

(لماذا؟)

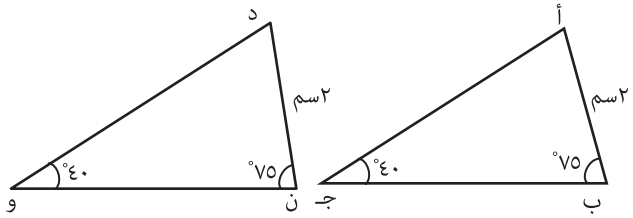


∡ و = ∡ أ = ... ولذلك يتطابق المثلثان أ ب جـ، و ي هـ؛

وفقاً للحالة (ز، ض، ز).

نشاط ٦:

تتنوع مظاهر الإهتمام بالعمارة من حيث التبليط والزخرفة أراد باسل زخرفة لوحة باستخدام مثلثات متطابقة، فهل يصلح المثلثان أ ب جـ ، د ن و الموضحة في الشكل الآتي للاستخدام في هذه الزخرفة؟



أ ب = د ن = ... سم

∡ أ = ∡ د = ... (لماذا؟)

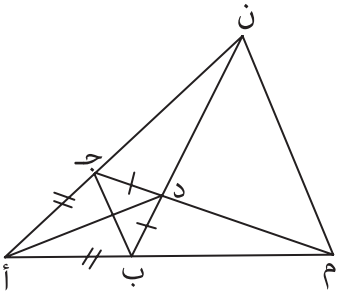
∡ ب = ∡ ن = ...

ألاحظ أن المثلثين متطابقان؛ وفقاً للحالة (...، ...، ...).

أي أنه يمكن لباسل استخدام هذين المثلثين في زخرفة اللوحة.

نشاط٧:

أتأمّل الشكل المجاور، وأبيّن أنّ المثلثين ب د م، جـ د ن متطابقان.



المثلثان ب د م، جـ د ن فيهما:

ب د = جـ د (معطى)

∡ ب د م = ∡ جـ د ن (بالتقابل بالرأس)

لإثبات أن ∡ د ب م = ∡ د جـ ن ألاحظ أن

Δ أ ب د، Δ أ جـ د متطابقان؛ وفقاً للحالة (ض، ض، ض)

لأنّ: أ د ضلع مشترك، أ ب = ...، ب د = جـ د (معطى)

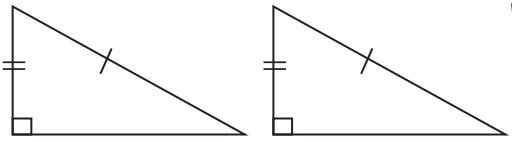
وينتج من تطابقهما أنّ: ∡ أ ب د = ∡ أ جـ د

أذن ∡ د ب م = ∡ د جـ ن (لماذا)

أي أن المثلثان ب د م، جـ د ن متطابقان؛ وفقاً للحالة (....، ....، ....).

الحالة الرابعة: تطابق مثلثين بوترٍ وضلعٍ وقائمة.

يتطابق مثلّثان قائما الزاوية إذا تساوى طولُ ضلعٍ ووترٍ في أحدهما مع نظائرهما في المثلّث الآخر. فهل تستطيع تفسير ذلك؟



نشاط٨:

أ ب جـ مثلث متساوي الساقين، $\overline{\text{أ هـ}}$ عمودي على $\overline{\text{ب جـ}}$.

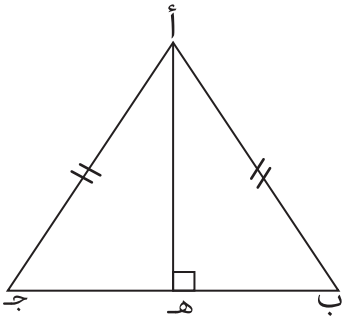
أبحث في تطابق المثلثين أ هـ جـ، أ هـ ب.

الوتر أ ب = الوتر .... (لماذا؟)

أ هـ ضلع ....

∡ ب هـ أ = ∡ جـ هـ أ = ...

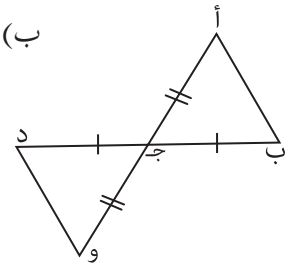
Δ أهـ جـ يطابق Δ أهـ ب؛ وفقاً لحالة التطابق الرابعة وهي: (....، ....، وقائمة).



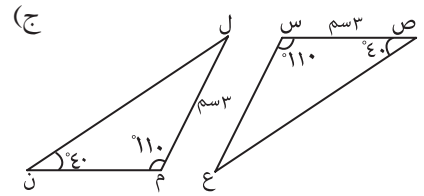
تمارين ومسائل:

١) أسمّي أزواج المثلثات المتطابقة في كلّ ممّا يأتي، وأوضّح السبب:

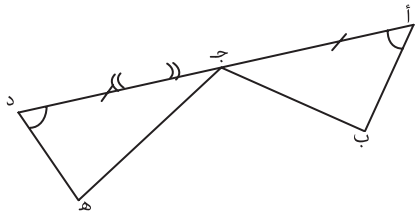
أ)



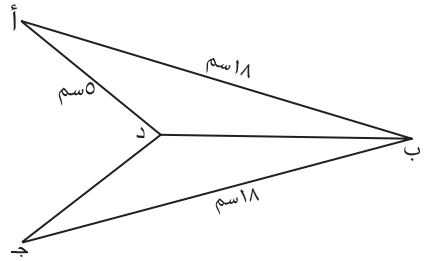
ب)



ج)



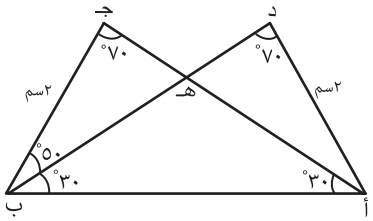
٢) في الشكل الآتي، إذا علمت أنّ ب د تُنصّفُ الزاوية ب:



أ) أبيّن أنّ: المثلثين أ ب د، جـ ب د متطابقان، مع توضيح حالة التطابق.

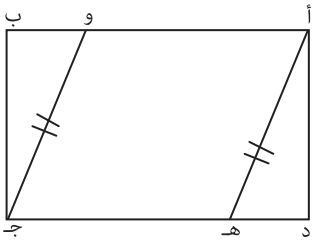
ب) أجد د جـ.

٣) أتأمل الشكل المجاور، لأبيّن أن:
المثلثين أ ب جـ ، ب أ د متطابقان.



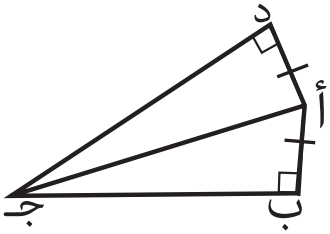
٤) في الشكل المجاور: أ ب جـ د مستطيل، أ هـ = و جـ

أبيّن أنّ: د هـ = و ب.



مهمة تعليمية

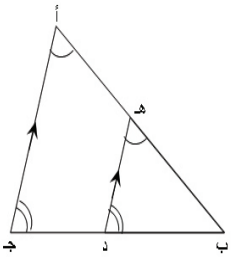
رسم رامي القطع جـ د، جـ أ، جـ ب، ورسم أ ب عمود على ب جـ، أ د عمود على د جـ، أ د = أ ب، كما في الشكل المجاور، قال رامي أن جـ أ يُنصّف ∡ ب جـ د . كيف تتأكد من صحة ما قاله رامي؟



٤-٢ تشابه المثلثات

نشاط ١:

أتأمّل الشكل المجاور، وأكمل:



١) الزاوية ب مشتركة بين المثلثين أ ب جـ ، .....

٢) ∡ أ جـ د = ∡ هـ د ب (لماذا؟)

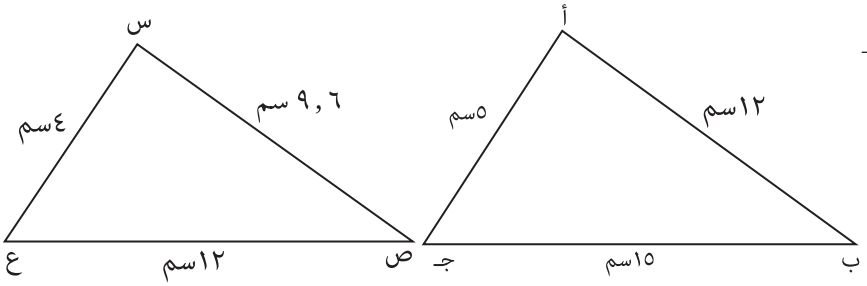
٣) ∡ ب هـ د = ∡ ب أ جـ (لماذا؟)

أيّ أنّ: الزوايا الثلاث المتناظرة متساوية؛ ولذا يقال: أنّ المثلثين هـ ب د ، أ ب جـ متشابهان، وتُكتب بالرموز: Δ هـ ب د ≃ Δ أ ب جـ،
وتُقرأ (Δ هـ ب د يشابه Δ أ ب جـ).

أتعلّم: يتشابه مثلّثان إذا تساوت قياسات الزوايا المتناظرة في المثلّثين، ويرمز للتشابه بالرمز (≃).

نشاط ٢:

أتأمّل المثلّثين في الشكل المجاور، وأكمل:



$$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{١٢}{٩,٦} = \frac{٥}{٤}$$

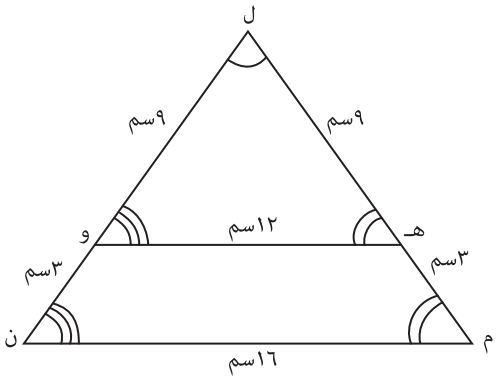
$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{١٥}{١٢} = \dots$$

$$\frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}} = \frac{٥}{\dots}$$

ألاحظ أنّ الأضلاع المتناظرة متناسبة (المثلث أ ب جـ تكبير للمثلث س ص ع).

أتعلّمُ: يتشابه مثلثان إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما متناسبة.

نشاط٣:



أتأمّل الشكل المجاور، وأكمل:

ألاحظ أنّ: ∡ م = ∡ هـ (لماذا؟)

∡ ن = ∡ و (لماذا؟)

∠ ل مشتركة

وبما أنّ قياسات الزوايا المتناظرة في المثلثين متساوية، فإنّ المثلثين ....

$$\frac{\text{ل م}}{\text{ل هـ}} = \frac{١٢}{٩} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

$$\frac{\text{م ن}}{\text{هـ و}} = \frac{١٦}{\ldots} = \frac{٤}{٣}$$

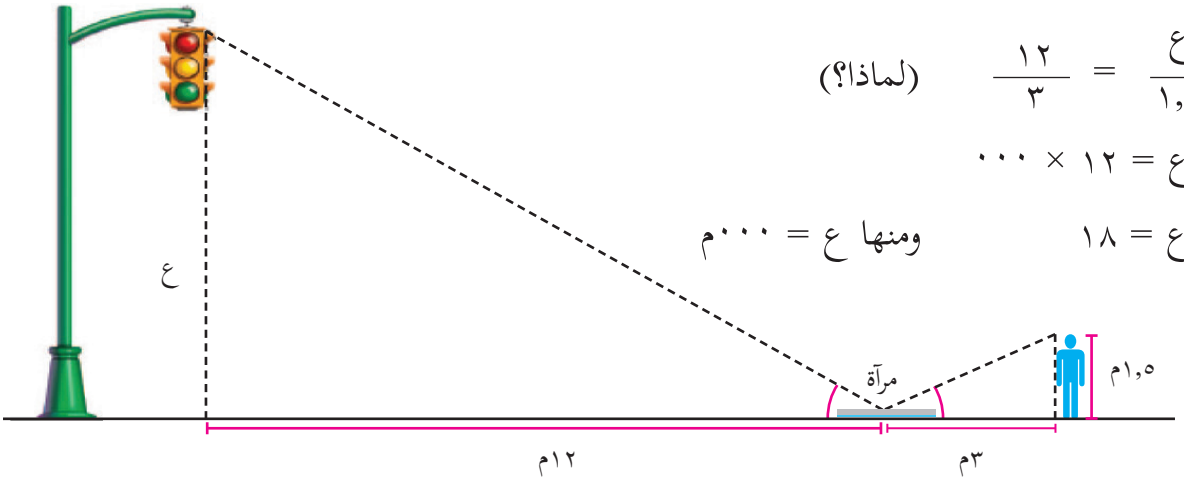
$$\frac{\text{ل ن}}{\text{ل و}} = \frac{\ldots}{٩} = \frac{٤}{\ldots}$$

ألاحظ أيضاً أن أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة.

نشاط٤:

أراد جهاد قياس ارتفاع إشارة المرور إعتمادا على إنعكاس الضوء، فقام بوضع مرآة مستوية بحيث تبعد ١٢م عن أسفل الإشارة و ٣م عن شخص طوله ١,٥م، كما في الشكل الآتي، أكمل طريقة جهاد في إيجاد ارتفاع إشارة المرور.

* قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس.



$$\frac{ع}{١,٥} = \frac{١٢}{٣}$$ (لماذا؟)

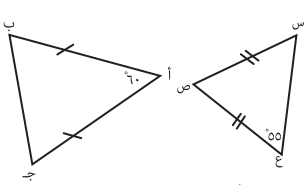
$٣ع = ١٢ \times ٠٠٠$

$٣ع = ١٨$ ومنها $ع = ٠٠٠م$

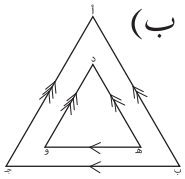
تمارين ومسائل:

١) أبيّنُ أيّ المثلثين في كلٍّ من الآتية متشابهان:

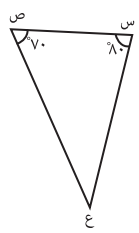
أ)



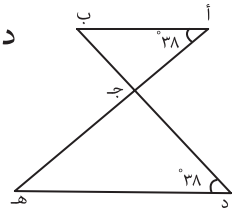
ب)



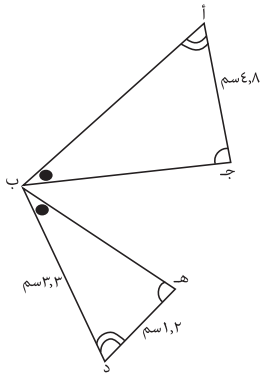
ج)



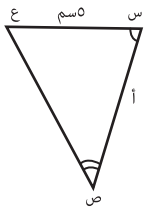
د)

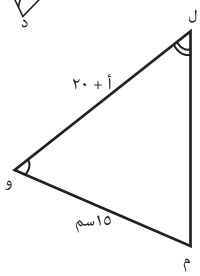


٣) في الشكل المجاور: إذا كان Δ أ ب جـ ≃ Δ د ب هـ،
أجد أ ب.



٤) يبين التمثيل المجاور المثلثين ص س ع، ل و م، فما قيمة أ علماً بأن المثلثين متشابهان؟





مهمة تعليمية

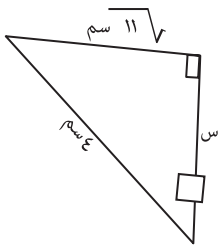
مصباح إنارة مثبّتٌ على عمود، إرتفاعه ٣م عن حافّة الشارع. فإذا سار شخصٌ طولُه ١,٨م بجانب العمود، أجد كل من الآتي:

أ) طولُ ظل الشخص عندما يكون على بعد ٥م من العمود.

ب) بعد الشخص عن العمود إذا كان طولُ ظلّه ٣م.

ورقة عمل (١)

١) أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

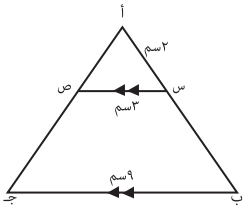


١ معتمداً على الشكل المجاور، ما قيمة س؟

أ) ٣ ب) ١٩ جـ) ٥ د) ٢

٢ أيّ المجموعات الآتية لا تمثّل أعداداً فيثاغوريّة؟

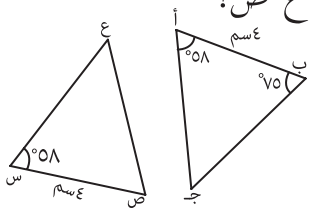
أ) (٣، ٤، ٥) ب) (٦، ٨، ١٠) جـ) (٤، ١٠، ١٢) د) (١٢، ٥، ١٣)



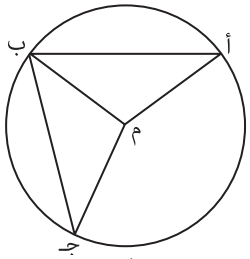
٣ في الشكل المجاور، ما طول س ب؟

أ) ٣سم ب) ٤سم جـ) ٦سم د) ١٢سم

٤ إذا كان المثلّثان أ ب جـ ، س ص ع متطابقين، ما قياس الزّاوية س ع ص؟

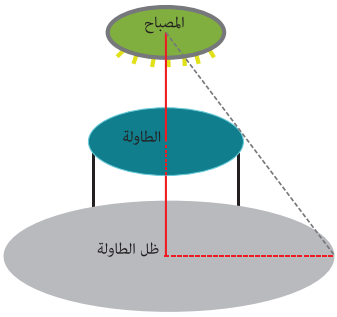


أ) ٧٥° ب) ٤٧° جـ) ٥٨° د) ١٣٣°



٢) يبيّن الشكل المجاور دائرةً مركزُها م، فيها أ ب، ب جـ وتران متساويان، أبيّن أنّ المثلثين ب م أ ، ب م جـ متطابقان.

٣) علق مصباح بحيث يعلو طاولة دائرية قطرها ١م كما في الشكل المجاور، فإذا كان ارتفاع الطاولة ٠,٨م وكان ارتفاع المصباح ٢,٤م فما طول ظل الطاولة على الأرض.



٢-٥ تمثيل البيانات بطريقة القطاعات الدّائريّة

تعريف: القطاع الدائري هو الجزء المحصور بين نصفي قطرين وقوس في دائرة.

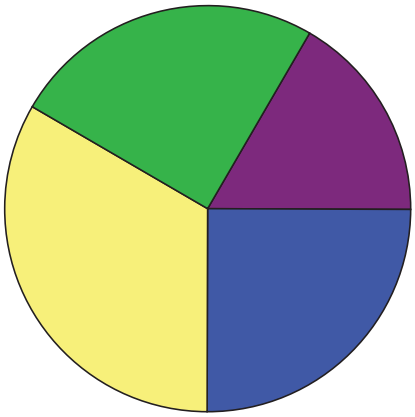
$$\text{زاوية القطاع الدائري} = \frac{\text{عدد عناصر القطاع} \times ٣٦٠^\circ}{\text{العدد الكلي}}$$

مجموع زوايا القطاعات الدائرية لجميع البيانات = ٣٦٠°

نشاط ١:

أتأمَّلُ البياناتِ الآتيةَ وتمثيلَها المجاورَ بطريقة القطاعات الدّائريّة:

الكلية	العدد
الهندسة	١٢٠
العلوم	١٨٠
الآداب	٢٤٠
التجارة	١٨٠



أُلاحِظُ أنَّ زاوية قطاع طلبة الهندسة = ٦٠° ، وأن $\frac{١٢٠}{٧٢٠} \times ٣٦٠^\circ = ٦٠^\circ$

وبالمثل زاوية قطاع طلبة العلوم = ٩٠° ، وأن $\frac{١٨٠}{٧٢٠} \times ٣٦٠^\circ = \ldots$

وزاوية قطاع طلبة الآداب = ١٢٠° ، وأن $\frac{٢٤٠}{٧٢٠} \times \ldots = \ldots$

وزاوية قطاع طلبة التجارة = ٩٠° ، وأن $\frac{\ldots}{\ldots} \times \ldots = \ldots$

نشاط ٢:

تضمّ مدرسة ٣ صفوف دراسيّة، ويبلغ عدد الطالبات فيها (٢٤٠) طالبة، فإذا كانت زاوية قطاع الصَّفّ الثّاني عشر ٩٠°، وزاوية قطاع الصَّفّ العاشر ١٥٠°، أجد عدد طالبات الصف الحادي عشر.

زاوية قطاع الصَّفّ الحادي عشر = ٣٦٠° - (١٥٠° + ٩٠°)

= .....

ومنها:

زاوية القطاع الدّائريّ = $\frac{\text{عدد عناصر القطاع}}{\text{العدد الكُلِّيّ}} \times ٣٦٠°$

ومنها: ١٢٠° = $\frac{\text{عدد طالبات الصَّفّ الحادي عشر}}{٢٤٠} \times ٣٦٠°$

عدد طالبات الصَّفّ الحادي عشر × ٣٦٠° = ١٢٠° × ٢٤٠

عدد طالبات الصَّفّ الحادي عشر = ...

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أتأمَّلُ البيانات الآتية الّتي تمثل عدد الأنشطة الّتي رَعَتْها مؤسّسة شبابيّة خلال ٦ أشهر، ثم أُمَثِّلُها بطريقة القطاعات الدّائريّة:

نوع النَّشاط	رياضيّ	ثقافيّ	اجتماعيّ	تعليميّ	فَنِّيّ
العدد	١٠	٤	٦	٨	٢

٢) بلغ عدد مشجعي فريق كرة قدم في خمس مباريات ٤٨٠٠ متفرج، فإذا مُثِّلت أعدادُ مشجعي الفريق في المباريات الخمس بطريقة القطاعات الدّائريّة، فكانت زاوية القطاع الّذي يُمَثِّلُ عدد مشجعي الفريق في المباراة الرابعة تساوي ١٢٠°، فما عدد مشجعي الفريق في تلك المباراة؟

٣) عندَ تمثيل أعداد زائري حديقة حيوان خلال أسبوع، وُجِدَ أنّ زاوية القطاع الدّائريّ الّذي يُمَثِّلُ عدد زوار الحديقة في اليوم الثالث ٦٠°، وعدد زائري الحديقة في ذلك اليوم ٢٠٠ شخص، فما عدد زوّار الحديقة في ذلك الأسبوع؟

٦-٢ مقاييس التَّشَتُّت

تعريف: مدى البيانات = أكبر قيمة في البيانات – أصغر قيمة في البيانات.

نشاط ١:

أُكْمِلُ إيجاد المدى لِكُلٍّ من المجموعاتِ الآتية:

إذا كانت مجموعةُ القيم ٢٠، ٧، ٣ ، ٥، ٩، فإنَّ المدى = ٢٠ – ٣ = ١٧

إذا كانت مجموعةُ القيم -١، ١، ٢، ٨، ٥، فإنّ المدى = ... – ... = ...

إذا كانت مجموعةُ القيم ٥، ٥ ،٥، ٥، ٥، فإنّ المدى = ... – ... = ...

يعتمدُ المدى على بعض القيم، ويُهْمِلُ في الغالب كثيراً منها، وَيَكْثُرُ استخدامُهُ عند الإعلانِ عن حالاتِ الطَّقْسِ، مَثْل درجاتِ الحرارةِ والرُّطوبة، ولكن في كثير من الأحيان، لا يَصِفُ المدى مقدارَ تَشَتُّتِ البياناتِ بدرجةٍ مناسبة.

نشاط ٢:

أتأمَّل القيمَ الآتية، وأَجِدُ المدى لِكُلٍّ منها:

إذا كانت مجموعةُ القيم ٢، ٦، ٩، ١٣، ١٨، ٢٠، فإنّ المدى = ٢٠ – ... = ١٨

إذا كانت مجموعةُ القيم ٢، ٣، ٣، ١٩، ٢٠، ٢٠، فإنّ المدى = ٢٠ – ... = ...

أُلاحِظُ أنَّ قيمة المدى متساويةٌ للمجموعتيْن، إلّا أنّهُ من الواضح أنَّ تَشَتُّتَ قيمِ المجموعة الثّانية أكبر، وبالتّالي، لا بدّ من مقاييسَ أُخرى أكثرَ دِقّة، ومن هذه المقاييس التَّبايُنُ، والانحراف المعياريّ.

تعريف: يُعرف التباين بأنه مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي مقسوماً على عدد القيم ويرمز له بالرمز σ^2

ومنها التباين $= \sigma^2 = \frac{\sum (س - \bar{س})^2}{ن}$ ويمكن حسابه من الصيغة.

$$\sigma^2 = \frac{\sum س^2 - ن(\bar{س})^2}{ن}$$

يُعرف الانحرّاف المعياريّ (σ) بأنه الجذر التربيعي للتباين.

نشاط٣:

أَجِدُ التباين والانحراف المعياري للقيم الآتية: ٠، ١، ٢، ٣، ٤

أَرْمِزُ للقيم بالرّمز س، وأكوّنُ جدولاً مناسباً، ثُمَّ أُكْمِل:

القيمة س	٠	١	٢	٣	٤	$\sum$ س = ...
س^{٢}	٠	١	٤	٩	١٦	$\sum$ س^{٢} =

$$\overline{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{١٠}{٥} = \ldots \text{ ، ن} = \ldots$$

$$\sigma^{٢} = \frac{\sum س^{٢} - ن(\overline{س})^{٢}}{ن}$$

$$= \frac{٣٠ - ٥(٢)^{٢}}{٥}$$

$$= \frac{٣٠ - \ldots}{٥}$$

$$= \frac{\ldots}{٥}$$

= ٢ ، ومنها الانحراف المعياريّ = ... (لماذا؟)

نشاط٤:

عند إيجاد الانحراف المعياريّ لثمانٍ من قيم س، وُجِدَ أنّ $\sum$ س = ٢٤

وأَنَّ $\sum$ س^{٢} = ٨٠، أُكْمِلُ إيجاد الانحراف المعياريّ لهذه القيم.

$$\overline{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٢٤}{٨} = \ldots \text{ ، ن} = \ldots$$

$$\text{التَّبايُن} = \frac{\sum س^{٢} - ن(\overline{س})^{٢}}{ن}$$

$$= \frac{٨٠ - ٨(٣)^{٢}}{\ldots}$$

$$= \frac{٨٠ - \ldots}{٨}$$

$$= \frac{\ldots}{٨} = \ldots$$

ومنها: الانحراف المعياريّ = ... (لماذا؟)

نشاطه:

سُجِّلَتْ عددُ سنواتِ الخبرةِ لدى طاقَمِ روضةِ أطفال، فكانت على النَّحْوِ الآتي:

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧.

أَجِدُ المدى، والانحراف المعياريّ لعدد سنوات الخبرة هذه.

أَرْمِزُ للقيم بالرمز س، وأكوّنُ جدولاً مناسباً، ثُمَّ أُكْمِل:

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	$\sum$س = ...
س^{٢}	١	...	٩	١٦	...	...	٤٩	$\sum$س^{٢} = ١٤٠

المدى = ٧ – .... = ٦ سنوات خبرة

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٢٨}{...} = ٤$$

$$\text{التَّبايُن} = \frac{\sum س^{٢} - ن(\bar{س})^{٢}}{ن}$$

$$= \frac{١٤٠ - ٧(٤)^{٢}}{٧}$$

$$= \frac{١٤٠ - ١١٢}{٧}$$

$$= \frac{...}{٧}$$

= ٤ سنوات خبرة، ومنها: الانحراف المعياريّ = ٢ (لماذا؟)

أُلاحِظُ أنَّ التَّبايُن والانحراف المعياريّ يأخذان في الاعتبار جميع القيم، ويعطيان وصفاً أدقّ لتَشَتُّت البيانات، ولذا فهي من أكثر مقاييس التَشَتُّت استخداماً.

أناقش: لا يمكنُ أن يكونَ التَّبايُن سالباً.

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أ) إذا كان مدى ١٠ قيم يساوي ١٣، وكان أصغر هذه القيم = -٦، فما أكبر هذه القيم؟

ب) إذا كان مدى ١٥ قيمة يساوي ٩، وكان أكبر هذه القيم يساوي ٥، فما أصغر هذه القيم؟

٢) قام راصد جوي بتسجيل سرعة الرياح لمدة ٨ أيام في فصل الصيف، فكانت كالآتي:
٤، ٩، ٥، ٤، ٦، ٨، ٧، ٥، أَجِدُ المدى، والانحراف المعياريّ لسرعة الرياح.

٣) عند إيجاد التَّبايُن لثمانٍ من قيم س، وُجِدَ أنّ Σ س = ٣٢، وأنّ Σ س^{٢} = ١٤٤، أُكْمِلُ إيجاد التَّبايُن، والانحراف المعياريّ لهذه القيم.

٤) تبلغُ أعمار عدد من الموظفين في دائرة حكوميّة ٢٨، ٣٤، ٤٦، ٥٠، ٣٢، أَجِدُ المدى، والتَّبايُن، والانحراف المعياريّ لأعمار هؤلاء الموظفين؟

مهمة تعليمية

أَكْتُبُ مثالاً على كُلٍّ ممّا يأتي:

أ) مجموعتين من القيم لها المدى نفسه.

ب) خمس قيم مداها يساوي ٢٠.

جـ) ستّ قيم مداها وتباينها يساوي صفراً.

ورقة عمل (٢)

١) أضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

١ تقدم ٦٠ طالباً لامتحان باللّغة الانجليزيّة، فإذا حصل ١٢ طالباً على علامة كاملة، فما زاوية القطاع الدّائريّ الذي يمثّل عدد الطَّلَبَة الذين حصلوا على العلامة الكاملة في الامتحان؟

أ) ٦٠° ب) ٦٦° جـ) ٧٢° د) ٩٠°

٢ ما مدى القيم ٦ ، ٦ ، ٦، ٦، ٦ ؟

أ) ٦ ب) ٣ جـ) ١ د) صفر

٣ ما القيمة الّتي لا يمكن أن تُمَثِّلَ التَّبايُنَ لـ ١٠ قيم؟

أ) ١٠ ب) ١ جـ) صفر د) -٣

٤ أيٌّ من الآتية يُعَدُّ أقلَّ مقاييسِ التَشَتُّتِ دِقَّة؟

أ) الوسط الحسابيّ. ب) المدى. جـ) الانحراف المعياريّ. د) التَّبايُن.

٢) يُبَيِّنُ الجدول المجاور توزيع ١٦٠٠ ناخباً، موزعينَ على أربعِ دوائرَ انتخابيَّة، أَجِدُ زاويةَ القطاع الدّائريّ الّذي يُمَثِّلُ عدد النّاخبينَ في الدّائرتَيْنِ الأوّلى والثّالثة؟

الدائرة	عدد الناخبين
الأوّلى	٣٠٠
الثّانية	٣٥٠
الثّالثة	٤٥٠
الرّابعة	٥٠٠

٣) عند إيجاد التَّبايُن لستٍّ من قيم س، وُجِدَ أن Σ س = ٦٠ وأنّ Σ س^{٢} = ٧٢٤، أَجِدُ التَّبايُن، والانحراف المعياريّ لهذه القيم.

٤) سُجِّلَتْ درجاتُ الحرارةِ الصُّغرى خِلالَ سِتَّةِ أيّام، فكانت كما يأتي:

٦، ٣ ، ٢، ١ ، -٢ ، -٤

أَجِدُ كُلّاً من الآتي:

أ) المدى. ب) التَّبايُن. جـ) الانحراف المعياريّ.

٥) إذا كان تباين مجموعة من القيم يساوي ٢٥، وكان وسطها الحسابي يزيد عن انحرافها المعياري بمقدار ٦٠، فما الوسط الحسابي لهذه القيم؟

اختبار ذاتي

س١: أضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة؟

١- ما العبارة الخاطئة دائما من بين العبارات الآتية؟

أ) يعدّ المدى أقل مقاييس التشتت دقة.

ب) لا يمكن أن تكون قيمة التباين سالبة.

جـ) إذا كان الانحراف المعياري لعلامات الصف الثامن يساوي صفراً، فهذا يعني أن جميع علامات الطلاب متساوية.

د) يُعدّ الوسط الحسابي أكثر مقاييس التشتت دقة.

٢- مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه هي (ل، م، ن) وحدة طول، حيث (ن) أكبرها طولاً. أي العبارات الآتية تجعل هذه الأطوال أعداداً فيثاغورية؟

أ) $ن^{٢} = (ل + م)^{٢}$ ب) $م^{٢} = ن^{٢} + ل^{٢}$ جـ) $ل^{٢} = م^{٢} + ن^{٢}$ د) $ن^{٢} = م^{٢} + ل^{٢}$

٣- ما العبارة الصحيحة دائماً من بين العبارات الآتية؟

أ) كل مثلثين متشابهين متطابقان.

ب) يتطابق المثلثان إذا كان لهما ثلاثة زوايا متقابلة متساوية في القياس.

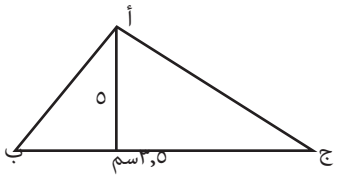
جـ) في المثلثين المتشابهين تكون أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية في الطول.

د) إذا تطابق مثلثان في حالة (ضلع، زاوية، ضلع) فإنهما متشابهان.

٤- أي من مجموعات الأعداد الآتية لا تمثل أعداداً فيثاغورية؟

أ) ٣، ٥، ٤ ب) ٦، ٨، ١٠ جـ) ١، ١، $\sqrt{٢}$ د) ١٥، ٢٠، ٢٥

٥- ما طول أ ج في الشكل المجاور؟



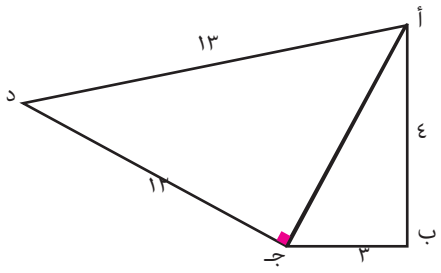
أ) ٦سم ب) ٤سم

جـ) ٥سم د) ٨ $\sqrt{٥}$

٦- مدرسة عدد طلابها ١٢٠ طالباً، فما قياس زاوية القطاع الدائري لصف عدد طلابه ٢٠ طالباً؟

أ) ٣٠° ب) ٦٠° جـ) ١٢٠° د) ٣٦٠°

س٢ : اعتماداً على الرسم المجاور، أبيّن أنّ: ∠ ب = ٩٠°.



س٣: انظر الجدول الآتي الذي يبين أعداد السيارات التي باعتها شركة تجارة سيارات خلال خمسة أشهر، ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:

الشهر	شباط	آذار	نيسان	أيار	حزيران
عدد السيارات	١٢	٨	١٠	٦	١٦

أ. أجد الانحراف المعياري.

ب. أجد قياس زاوية القطاع الدائري الذي يمثل مبيعات الشركة في شهر آذار.