



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفروع: الريادي والفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي
الفترة الأولى

الطبعة الثالثة

٢٠٢٠م / ١٤٤١هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

<https://www.facebook.com/Palestinian.MOEHE/>

+970-2-2983250 فاكس | +970-2-2983280 هاتف

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

٣	البحث العلمي
٦	طرق جمع البيانات
٩	العينات الاحتمالية
١٣	التغير العشوائي المنفصل
١٦	التوقع
١٩	المتتاليات
٢١	المتسلسلات
٢٣	تمارين عامة

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من هذا الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الإحصاء والاحتمالات والمتتاليات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- ١ التعرف إلى مفهوم البحث العلمي وخطواته.
- ٢ التمييز بين أنواع العيّنات، والتعرف إلى طرق سحبها.
- ٣ إيجاد المتغير العشوائي المنفصل، وتوزيعه الاحتمالي.
- ٤ حساب التوقع للمتغير العشوائي المنفصل، وتفسيره.
- ٥ تعرف المتتالية وحدودها، وحدّها العام.



تعتبر دراسة النمو السكاني ذات أهمية في تحديد سياسات الدولة وقراراتها؛ لخدمة المواطنين وتحسين معيشتهم، ولدراسة النمو السكاني في فلسطين للسنوات العشر الأخيرة، احتاج مهند لمجموعة من البيانات، فقرر زيارة مركز الإحصاء الفلسطيني، حيث حصل على البيانات الآتية:

١. عدد السكان الفلسطينيين المقدر في منتصف عام ٢٠١٥ هو ٤,٦٨ مليون نسمة، بواقع ٢,٣٨ مليون من الذكور.

عدد الإناث

٢. بلغت نسبة السكان الحضر ٧٣,٤٪ ونسبة المقيمين في الريف ١٦,٧٪.

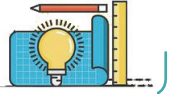
تقدر نسبة المقيمين في المخيمات

تعريف البحث العلمي:



جمع منظم للمعلومات المتوفرة لدى الباحث عن موضوع معين، وترتيبها بصورة جيدة؛ بحيث تدعم المعلومات السابقة، أو تصبح أكثر نقاءً ووضوحاً. وهو عملية استقصاء منظمة ودقيقة لجمع الشواهد والأدلة، بهدف اكتشاف معلومات، أو علاقات جديدة، أو تكميل معلومات أو علاقات ناقصة، أو تصحيح خطأ فيه وذلك لبناء استراتيجية شاملة لكافة الأنشطة الخاصة بالمجتمع والدولة.*

خطوات البحث العلمي:



١. تحديد مشكلة البحث، والتساؤلات الغامضة التي قد تدور في ذهن الباحث حول موضوع الدراسة التي اختارها، والتي تحتاج إلى تفسير يسعى الباحث إلى إيجاد إجابات علمية شافية ووافية لها.
٢. اقتراح اسم البحث، فيجب على الباحث أن يكون على دراية بموضوعه المختار؛ حتى يتم تحديد الاسم المناسب للبحث .
٣. وضع أسئلة الدراسة وفرضياتها، والتي يجب أن ترتبط ارتباطاً وثيقاً بمشكلة البحث.
٤. جمع البيانات المطلوبة لإجراء الدراسة، وتحليلها.
٥. إظهار النتائج وتفسيرها .
٦. وضع مقترحات وتوصيات بناءً على نتائج التحليل.

يكتب الباحث - عادة - ملخصاً للبحث الذي يقوم به؛ من أجل تعريف المهتمين بعناصر البحث، وأسئلته، وفرضياته، والخطوات التي تم فيها إجراء البحث، وغيرها من العناصر، ففي بحث بعنوان أثر المياه العادمة التي تكتبها مصانع مستوطنات الاحتلال، وتلوث بها حياة المواطنين في محافظة سلفيت كان ملخص الدراسة كما يأتي:

العنوان: أثر المياه العادمة التي تكتبها المصانع (مستوطنة بركان) على حياة المواطنين في قرى محافظة سلفيت.

المقدمة: منذ أن اغتصب الاحتلال أراضي المواطنين في محافظة سلفيت، أقام عليها مصانع في المستوطنات، ومن هنا بدأت معاناة المواطنين في القرى المجاورة لهذه المستوطنات، حيث أصبحت الأراضي الزراعية والأودية مستنقعات للمياه العادمة من مجاري ومخلفات مصانع الجلود وغيرها في هذه المستوطنات؛ مما شكّل مخاطر صحية ونفسية على حياة المواطنين.

• ومن خلال مقابلة عدد من المواطنين الذين يعانون من هذه المخلفات، نرى حجم المعاناة والخطر الذي يهدد حياتهم من استنشاق الروائح الكريهة، ولسعات البعوض، والحشرات الفتاكة، وتلف مزروعاتهم، وموت بعض مواشيهم حيث تشكل هذه المخلفات خطراً حقيقياً على حياتهم. وقد خلص البحث إلى إبراز المخاطر الصحية والنفسية والاجتماعية الناجمة عن مخلفات المياه العادمة للمستوطنات الصهيونية، وأثرها الكارثي على المواطنين في القرى المحاذية لهذه المستوطنات، والخروج بالتوصيات إلى الجهات المسؤولة بضرورة التحرك لإنهاء معاناة المواطنين في هذه المناطق. وفضح جرائم الاحتلال الصهيوني في المحافل الدولية عن طريق منظمات الصحة العالمية.

١. في الملخص السابق كان عنوان البحث: أثر المياه العادمة التي تكتبها مصانع مستوطنة بركان على حياة المواطنين في قرى محافظة سلفيت.

٢. مشكلة البحث

٣. أداة جمع البيانات

٤. التوصيات



١ أعرّف البحث العلمي، وأحدد خطوات تنفيذه.

٢ أدرس ملخص الدراسة الآتي، وأحدد فيه:

أ. مشكلة البحث ب. نتائج الدراسة ج. أدوات جمع البيانات د. توصيات الدراسة.

عنوان البحث: الرضا الوظيفي لمديري المدارس الأساسية في محافظة الخليل من وجهة نظرهم.

هدفت الدراسة إلى التعرف على درجة الرضا الوظيفي لدى مديري المدارس الأساسية في محافظة الخليل، عن العائد الوظيفي (معنوي ومادي) وعن العلاقات الإنسانية والاجتماعية مع الطلبة وأولياء الأمور، وقد شملت الدراسة ٥٠ مديراً من مديري المدارس الأساسية، حيث تم استخدام الاستبانة أداةً لجمع البيانات، وتم تحليل نتائج الدراسة باستخدام المعالجة الإحصائية وخلصت الدراسة إلى نتائج، أهمها: أن درجة الرضا الوظيفي لدى مديري المدارس الأساسية عن العائد الوظيفي (معنوي ومادي) كان بدرجة عالية، وكذلك العلاقات الإنسانية والاجتماعية مع الطلبة وأولياء الأمور. وقد قدم الباحث عدداً من التوصيات في ضوء نتائج الدراسة، أهمها: تعزيز وعي مديري المدارس بأهمية الشعور بالرضا الوظيفي، والعمل على إدارة البيئة المدرسية بنجاح وفاعلية، وإعطاء الصلاحيات المناسبة لاتخاذ القرارات بخصوص ما يعترض العمل المدرسي من مشكلات.





في دراسة الواقع الديموغرافي الفلسطيني لتعزيز صموده، يقوم مركز فلسطيني للأبحاث بإجراء دراسات متعددة، يحتاج فيها إلى جمع بيانات من أفراد المجتمع، فأحياناً تتطلب الدراسة جمع البيانات من جميع أفراد المجتمع، وأحياناً أخرى يمكن أن يكتفى بجمع البيانات من مجموعة جزئية من المجتمع.

أحدد فيما يأتي، متى يجب أخذ جميع عناصر المجتمع؟ ومتى يمكن أخذ جزء منه؟ لإجراء الأبحاث الآتية:

١. لإحصاء عدد المواليد الذكور في مدينة غزة، نأخذ جميع عناصر المجتمع.
٢. لتقدير نسبة التحاق طلبة القدس بالجامعات، يمكن أخذ جزء ممثل من المجتمع.
٣. إجراء التعداد العام للمنشآت الصناعية في مدينة الخليل.....
٤. دراسة اتجاهات طلبة الصف العاشر في فلسطين، حول الالتحاق بالفرع الريادي.....
٥. إجراء فحص دم لشخص في فلسطين مصاب بمرض ما.....

١. جمع البيانات الإحصائية

أ. المسح الشامل:

تعريف: المسح الشامل هي عملية يتم فيها جمع البيانات من كل أفراد المجتمع. مما يعطي معلومات شاملة عن خصائص المجتمع المراد دراستها، لكن قد يتطلب ذلك وقتاً وجهداً كبيرين، ويتطلب أيضاً فريق عمل، ونفقات مرتفعة، نظراً لكثرة عدد الأفراد، مثل: التعداد العام للسكان، والمساكن، والمنشآت. هناك عدة حالات يتعذر فيها المسح الشامل، كعملية فحص الدم، وكمية السمك في البحر، وعندها نلجأ إلى دراسة جزء من المجتمع الإحصائي يسمى العينة.

ب. العينات

تعريف العينة: هي مجموعة جزئية من المجتمع.

▲ أنواع العينات

إن من أهم خطوات الدراسة، هو اختيار عيّنة ممثلة للمجتمع؛ للتوصل إلى استنتاجات يمكن تعميمها على جميع أفراد المجتمع، وهذا يعتمد على اختيار الطريقة السليمة لاختيار العينة. لذا سنتعرف على الطرق التي نختار بها العيّنة. حيث إن هناك نوعان من العينات:

١. العينات غير الاحتمالية

وهي العينات التي لا تخضع لقوانين الاحتمالات عند اختيارها، ومن الأمثلة عليها:

أ. عيّنة الصدفة، التي تعتمد على الصدفة في اختيارها، مثل: دراسة موقف الرأي العام من ظاهرة معينة، حيث يختار الباحث عدداً من الناس يقابلهم بالصدفة. ويؤخذ على هذه العينة أنها لا يمكن أن تمثل المجتمع الأصلي بدقة، ومن هنا يصعب تعميم نتائجها على المجتمع.

ب. العيّنة الوضولية، حيث تعتمد على سهولة الوصول للعينة للحصول على البيانات.

ج. العيّنة القصدية، حيث يختار الباحث عيّنته بناءً على حكم ورأي شخصي، ومن عيوبها أنها تتأثر بالتحيز الشخصي.

وهناك أمثلة أخرى على أنواع العينات غير العشوائية، مثل: الحصصية والكرة الثلجية، وغيرها...

٢. العينات الاحتمالية

هي تلك العينات التي يخضع اختيارها لقوانين احتمالية، وسوف نقتصر دراستنا على العينات الاحتمالية الآتية:

أ. العيّنة العشوائية البسيطة.

ب. العيّنة الطبقية العشوائية.

ج. العيّنة العشوائية المنتظمة.



- ١ أوضح المقصود بما يأتي مدعماً إجابتي بالأمثلة:
أ. المسح الشامل
ب. العينة.
- ٢ أعدد أربعة من أسباب اللجوء إلى العينة الممثلة للمجتمع، بدلاً من المسح الشامل.
- ٣ أحدد أيّاً من الظواهر الآتية نحتاج فيها إلى أخذ عينة، وأيها نحتاج إلى المسح الشامل:
أ. إجراء تعداد عام لمصانع الصابون في فلسطين.
ب. دراسة أثر مواقع التواصل الاجتماعي على العلاقات الأسرية.
ج. فحص صلاحية إنتاج مصنع للأغذية.



لإجراء دراسة حول معدل التحصيل في مبحث الرياضيات لطلبة مدرسة الشهيد خليل الوزير الثانوية للبنين، قررت الهيئة التدريسية دراسة ذلك على عينة ممثلة للطلاب، فسجلت أسماء جميع الطلبة على بطاقات، وطلب من أحد المعلمين سحب عينة حجمها ٣٠ طالباً، بحيث يسحب المعلم البطاقة، ويحدد الاسم، ثم يعيد البطاقة إلى الصندوق، ويسحب البطاقة الثانية فإذا تكرر الاسم، يعيد التجربة مرةً أخرى، وهكذا... حتى تم سحب العينة كاملة، وبعد فترة قررت الهيئة قياس معدل التحصيل حسب الصف. أقترح طريقة لسحب هذه العينة... في هذا البند، سنتعرف بالتفصيل على كل نوع من أنواع العينات الاحتمالية وعلى طريقة سحبها.

أولاً: العينة العشوائية البسيطة

هي العينة التي يكون لكل عنصر من عناصرها نفس فرصة الاختيار، وإن اختيار أي عنصر في العينة، لا يؤثر على اختيار عنصر آخر فيها. ونلجأ إلى استخدام هذه العينة في حالة تجانس المجتمع من حيث: السمة المراد دراستها، حيث تستخدم جداول الأرقام العشوائية، أو القرعة، أو البرامج الحاسوبية، وغيرها من الطرق في تحديد عناصرها.

مثال: لإجراء دراسة حول مدى فاعلية طعم ضد الإنفلونزا على ٢٠٠ شخص، سحبت عينة حجمها ١٠ أشخاص، أوضح خطوات سحب العينة.

الحل:

١. أرقم عناصر المجتمع من ١ إلى (٢) حيث n حجم المجتمع، وبالتالي أبدأ الترقيم من ١ وأنتهي بالرقم ٢٠٠ بحيث يكون عدد المنازل ٣ " مساو لعدد منازل العدد ٢٠٠ " وبذلك تكون أرقام عناصر المجتمع هي:

٠٠١، ٠٠٢،، ١٩٦، ١٩٧، ١٩٨، ١٩٩، ٢٠٠ .

٢. أستخدم جدول الأرقام العشوائية المرفق، وأبدأ بعمود عشوائياً، وليكن العمود الأول، بحيث أنظر إلى أول ثلاث منازل في العمود، وأختار الأرقام بين ٠٠١ و ٢٠٠ دون تكرار، وأتابع ذلك في باقي أعمدة الجدول، حتى أحصل على العينة بالحجم المطلوب.

٣. وبالتالي تكون العينة هي العناصر التي تحمل الأرقام:

١٠٤، ٠٩٤، ١٠٣، ٠٧١، ٠٢٣، ٠١٠، ٠٧٠، ٠٢٤، ٠٠٧، ٠٩٧ .

ثانياً: العينة العشوائية الطبقية

تعريف: العينة العشوائية الطبقية، هي العينة التي تسحب في حالة يكون المجتمع فيها غير متجانس، وكان بالإمكان تقسيمه إلى مجتمعات متجانسة، وغير متداخلة "طبقات" حيث تسحب عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة.

مثل: تقسيم المدرسة إلى صفوف، وتقسيم المجتمع الفلسطيني إلى مدن وقرى ومخيمات ... ، وتقسيم طلبة الجامعة حسب الكليات.

ويمكن ايجاد حجم العينة الطبقية باستخدام القانون

$$\text{حجم العينة الطبقية} = \text{حجم الطبقة} \times \left(\frac{\text{حجم العينة الكلية}}{\text{حجم المجتمع}} \right)$$

إذا كان أعداد طالبات مدرسة الشهيد دلال المغربي الثانوية للبنات موزعين حسب الصفوف كما يأتي:

نشاط
(٢)

الصف	التاسع	العاشر	الحادي عشر	الثاني عشر
العدد	١٨٠	١٢٠	٢٥٠	١٥٠

• وإذا أريد سحب عينة حجمها ١٤٠ طالبة، بطريقة المعاينة الطبقية العشوائية، وعلى أساس الصف.

- حجم المجتمع = حجم الطبقة الأولى + حجم الطبقة الثانية + حجم الطبقة الثالثة + حجم الطبقة الرابعة
= ١٨٠ + ١٢٠ + ٢٥٠ + ١٥٠ = ٧٠٠ طالبة.

- حجم العينة من الصف التاسع = عدد طلاب الصف التاسع × (حجم العينة الكلية ÷ حجم المجتمع الكلي)
= ١٨٠ × $\frac{١٤٠}{٧٠٠}$ = ٣٦ طالبة.

- حجم العينة من الصف العاشر = عدد طلاب الصف العاشر × (حجم العينة الكلية ÷ حجم المجتمع الكلي)
= ١٢٠ × $\frac{١٤٠}{٧٠٠}$ = ٢٤ طالبة.

- حجم العينة من الصف الحادي عشر

- حجم العينة من الصف الثاني عشر



ألاحظ أن حجم العينة الكلية = حجم العينة من الطبقة الأولى + حجم العينة من الطبقة الثانية + حجم العينة من الطبقة الثالثة + حجم العينة من الطبقة الرابعة.

• لسحب عينة حجمها ٣٦ طالبةً من الطبقة الأولى من مجتمع الصف التاسع والبالغ عددهم ١٨٠ طالبةً، أستخدم طريقة العينة العشوائية البسيطة، حيث أرقم عناصر الطبقة الأولى من ٠٠١، ٠٠٢، إلى ١٨٠ ثم أستخدم جدول الأرقام العشوائية لتحديد العينة.

- عناصر العينة من الصف التاسع هي
- عناصر العينة من الصف العاشر هي
- عناصر العينة من الصف الحادي عشر هي
- عناصر العينة من الصف الثاني عشر هي

◀ ثالثاً: العينة العشوائية المنتظمة

هي العينة التي يتم اختيار مفرداتها بصورة منتظمة، وبترتيب معين، بعد أن يتم اختيار نقطة البداية بطريقة عشوائية.

وتعتبر هذه الطريقة سهلةً مقارنةً بالعينة العشوائية البسيطة، وغالباً ما تعطي معلومات أكثر من المعلومات التي نحصل عليها في المعاينة العشوائية البسيطة، لأنها تكون موزعةً بشكل أكثر تجانساً على جميع أفراد المجتمع.

تعتبر استطلاعات الرأي من الأدوات الإحصائية لجمع البيانات ودراسة توجهات المجتمع نحو ظاهرة معينة، ولإجراء استطلاع رأي حول نتائج انتخابات مجلس طلبة جامعة بيرزيت، قرر باحث سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها ١٠٠ طالب من أصل ١٠٠٠ طالب حضروا المناظرة الانتخابية، أوضح للباحث كيفية سحب هذه العينة.

نشاط
(٣)

$$\text{أجد المسافة الثابتة (ف)} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} \text{ ، ف } = \frac{1000}{100} = 10$$

- أحدد رقم البداية، فأختار رقماً عشوائياً من ١ إلى ف أي من ١ إلى ١٠ وليكن ٦. وبالتالي يكون الشخص السادس هو أول عناصر العينة الذي سيتم استطلاع رأيه.

- أحدد العنصر الثاني بإضافة ف = ١٠ إلى الرقم الأول، فيكون الشخص صاحب الرقم $16 = 10 + 6$

- أرقام عناصر العينة هي ٦، ١٦، ٢٦،

٥. رقم العنصر السابع في هذه العينة هو



١. لدراسة أثر توظيف التكنولوجيا الحديثة على أداء الطلبة، قرر باحث أخذ عيّنة حجمها ١٠٪ من طلبة مدرسة الشهيد عبد القادر الحسيني الثانوية، إذا علمت أن عدد طلبة المدرسة ٥٠٠ طالب.
- أ. ما نوع العيّنة التي يمكن استخدامها لهذه الدراسة؟
- ب. أشرح طريقة سحب العيّنة.

٢. في مؤتمر للمهندسين الفلسطينيين، كان أعداد المشاركين كما في الجدول الآتي:

التخصص	معماري	مدني	ميكانيكي	كهربائي
العدد	١٥٠	٢٠٠	٨٠	٧٠

- أراد باحث استطلاع رأي المشاركين حول نتائج المؤتمر، فقرر سحب عينة من ٢٠ مهندساً من المشاركين اعتماداً على تخصصهم.
- أ. أحدد حجم العيّنة من كل تخصص.
- ب. أحدد عناصر العيّنة المطلوبة من كل تخصص.



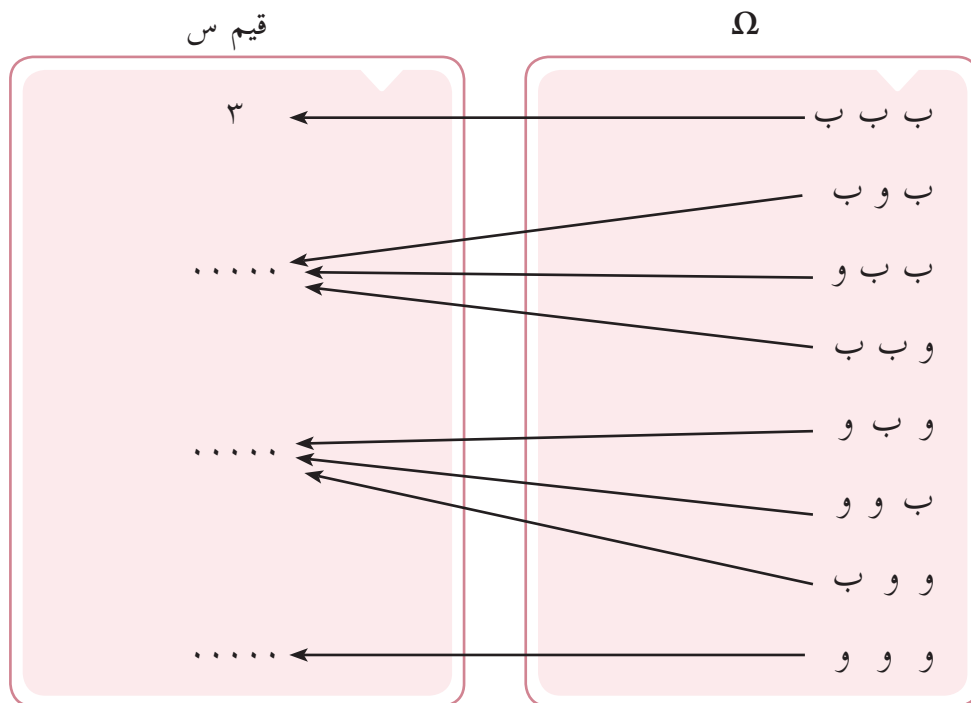
يعتبر معدل الخصوبة من المعدلات المهمة لقياس النمو السكاني في فلسطين، فقد يكون الاهتمام في تجربة اختيار عائلة فلسطينية من ثلاثة أطفال، من حيث الجنس وتسلسل الولادة منصباً على عدد الإناث في العائلة، وليس على النتائج الممكنة للتجربة.

١. الفضاء العيني لهذه التجربة هو { ب ب ب ، ب ب و ، ب و ب ، }

٢. إذا عرفنا المتغير س على أنه عدد الإناث في هذه العائلة فإن قيم س الممكنة هي:

{ ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ }

٣. أمثل العلاقة بين الفضاء العيني وقيم س بمخطط سهمي.



ألاحظ أن المخطط السابق يمثل اقتراناً، لماذا؟

مجاله ، ومداه

وفي مثل هذه الحالة، فإن س يسمى متغيراً عشوائياً منفصلاً .

تعريف: المتغير العشوائي المنفصل هو اقتران مجاله الفضاء العيني Ω ، ومداه مجموعة جزئية

من الأعداد الحقيقية، ويسمى توزيعاً احتمالياً إذا حقق ما يأتي:

$$0 \leq \sum_{r=1}^n (s) \leq 1, \quad 1 = \sum_{r=1}^n (s) \text{ حيث } n = \text{عدد القيم الممكنة للمتغير (س)}$$

تسمى مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي س بمدى المتغير العشوائي.

مثال (١): أي التوزيعات الآتية يمكن أن يكون توزيعاً احتمالياً؟

(ب)

س	٤	٦	٨	٣
ل (س)	٠,١٥	٠,٢	٠,٥	٠,١٥

(د)

س	١	٢	٣	٤
ل (س)	٠,٣	٠,٢	٠,٥	٠,١

(أ)

س	٤	٦	٨
ل (س)	٠,٢	٠,٤	٠,٦

(ج)

س	٣-	٢-	١-
ل (س)	٠,٢٥	٠,٣٥	٠,٥٤

التوزيع الثاني (ب) يشكل توزيعاً احتمالياً. لأن: $0 \leq ل(س) \leq 1$

$$1 = \sum_{r=1}^{\infty} ل(س_r)$$

عند رمي قطعتي نقد منتزمتين مرةً واحدةً، وتسجيل عدد مرات ظهور الصورة في كل رمية.

نشاط
(٢)

١. الفضاء العيني لهذه التجربة هو

٢. إذا عرفنا المتغير العشوائي س على أنه عدد مرات ظهور الصورة، فإن قيم س الممكنة هي

س	٠	١	...
ل (س)	$\frac{1}{4}$

٣. أكمل الجدول الآتي:

- مجموع قيم ل (س) هو

في تجربة إلقاء حجر نرد منتزمتين، إذا دلّ المتغير العشوائي س على الفرق المطلق بين العددين الظاهريين.

نشاط
(٣)

١. الفضاء العيني للتجربة هو $\Omega = \{ (١,١), (٢,١), \dots, (٦,٦) \}$.

٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	١	٠	١	٠	٠	٠
٢	٠	١	٠	١	٠	٠
٣	٠	٠	١	٠	١	٠
٤	٠	٠	٠	١	٠	١
٥	٠	٠	٠	٠	١	٠
٦	٠	٠	٠	٠	٠	١

٢. المدى لهذه التجربة هو

٣. أكمل تمثيل العلاقة بالشكل المجاور.

٤. أكمل جدول التوزيع الاحتمالي.

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل (س)	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$

مثال (٢): إذا كان س متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي يعطى بالعلاقة:
ل (س) = $\frac{س}{٢٠}$ حيث س = ١، ٣، ٤، ٥، ٧ أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير س.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{ل (س = ١)} &= \frac{١}{٢٠}, \text{ ل (س = ٣)} = \frac{٣}{٢٠}, \text{ ل (س = ٤)} = \frac{٤}{٢٠}, \text{ ل (س = ٥)} = \frac{٥}{٢٠}, \\ \text{ل (س = ٧)} &= \frac{٧}{٢٠} \end{aligned}$$

فيكون جدول التوزيع الاحتمالي هو:

س	١	٣	٤	٥	٧
ل (س)	$\frac{١}{٢٠}$	$\frac{٣}{٢٠}$	$\frac{٤}{٢٠}$	$\frac{٥}{٢٠}$	$\frac{٧}{٢٠}$

تمارين ومسائل (٤-١)



١ ألقىت قطعة نقد منتظمة مرتين، فإذا صممت لعبة بحيث يربح اللاعب نقطة واحدة عن كل صورة تظهر، ويخسر نقطة عن كل كتابة، وإذا عُرف المتغير العشوائي على أنه مقدار الربح الذي يحصل عليه اللاعب، أكتب:
أ. عناصر المتغير العشوائي
ب. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

٢ إذا كان س متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي يعطى بالعلاقة ل (س) = $\frac{س^٢}{٣٠}$ حيث س = ١، ٢، ٣، ٤ أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير س.

٣ الجدول الآتي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

س	٠	١	٢	٣	٤
ل (س)	٠,٢	أ	٠,١٥	٠,١	٠,٠٥

جد قيمة الثابت أ.



يهتم المجتمع الفلسطيني بصورة عامة بإنجاب الذكور من الأبناء، ففي دراسة لمركز أبحاث فلسطيني عن توقع عدد الذكور في العائلات ذات الأربعة أطفال، تم تنفيذ التجربة، حيث عرف المتغير العشوائي على أنه عدد الذكور في العائلة، وإذا رمز للولد بالرمز (و) وللبنات بالرمز (ب). فإن الفضاء العيني لهذه التجربة هو $\Omega = \{وووو، ووب، ووبو، ووبب، ب، ببب، بببب\}$.
١. أكمل جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

س	٠	١	٢	...	٤
ل (س)	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$...

٢. أحسب قيمة المقدار

$$\sum_{r=1}^4 s_r \times l(s_r)$$

$$= 0 \times l(0) + 1 \times l(1) + 2 \times l(2) + 3 \times l(3) + 4 \times l(4)$$

$$= 0 + \frac{1}{16} \times 1 + \frac{4}{16} \times 2 + \dots$$

$$= \frac{32}{16} = 2$$

وهذا ما يعرف بتوقع المتغير العشوائي "الوسط الحسابي للمتغير العشوائي".

تعريف: يطلق على وسط التوزيع الاحتمالي بالتوقع للمتغير العشوائي المنفصل ويرمز له

$$\sum_{r=1}^n s_r \times l(s_r) = \text{حيث } s_r \text{ (س)}$$



ألقيت قطعة نقد معدنية من فئة مائة مل فلسطيني ثلاث مرات، فإذا دلّ المتغير العشوائي على عدد مرات ظهور السنبله "الصورة".

- الفضاء العيني لهذه التجربة هو $\Omega = \{ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ص ك ك، ك ص ص، ك ك ك\}$

- المدى للمتغير العشوائي هو $\{٠، ١، ٢، ٣\}$

- أكمل جدول التوزيع الاحتمالي

٣	٢	١	٠	س
...	$\frac{٣}{٨}$...	$\frac{١}{٨}$	ل (س)

$$\text{التوقع} = \sum_{r=1}^3 \text{س}_r \times \text{ل (س}_r)$$

$$\text{ت (س)} = \frac{٣}{٢} = \dots \times ٣ + \frac{٣}{٨} \times ٢ + \dots \times ١ + \frac{١}{٨} \times ٠$$

خصائص التوقع

يتأثر التوقع بالعمليات الحسابية الأربع، كونه يمثل الوسط الحسابي للمتغير العشوائي، وذلك كما في

العلاقة الآتية: $\text{ت (أ س} \pm \text{ب)} = \text{أ} \times \text{ت (س)} \pm \text{ب}$ حيث س متغير عشوائي أ، ب \in ح

مثال: إذا كان س متغيراً عشوائياً منفصلاً، وكان ت (س) = ٥، أجد ت (٣س - ٢)

الحل:

$$\text{ت (٣س - ٢)} = ٣ \times \text{ت (س)} - ٢ = ٣ \times ٥ - ٢ = ١٥ - ٢ = ١٣$$



١ إذا كان س متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي:

س	١	٢	٣	٤	٥
ل (س)	٠,١	٠,٣	٠,٢	٠,٣	٠,١

أحسب ما يأتي:

أ. توقع المتغير العشوائي س

ب. ت (٣ س - ٤)

٢ في تجربة إلقاء قطعتي نقد منتزمتين مرةً واحدةً، يكسب اللاعب نقطةً واحدةً إذا ظهرت

الصورة مرةً واحدةً ، ويكسب نقطتين إذا ظهرت الصورة مرتين. في حين يخسر خمس نقاط إذا

لم تظهر الصورة، إذا دلّ المتغير العشوائي س على عدد النقاط المكتسبة أجب عما يأتي:

أ. توقع المتغير العشوائي س

ب. ت (٢ س + ١)

٣ إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى في الجدول الآتي:

س	١	أ	٥
ل (س)	ب	٠,٥	ب

وكان ت (س) = ٣، أجد قيمة كل من أ، ب.



تعمل الشركات الفلسطينية بصورة عامة على رفع المستوى المعيشي للموظفين، من خلال الزيادة المستمرة في رواتبهم، فإذا كان سلّم رواتب الموظفين في شركة للمنظفات في غزة، كما في الجدول الآتي:

السنة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
الراتب بالدينار	٢٠٠	٢٥٠	٣٠٠	٣٥٠

يمكن ترتيب راتب الموظف حسب سنة الخدمة كما يأتي:

..... ، ٣٥٠ ، ٣٠٠ ، ٢٥٠ ، ٢٠٠

راتب الموظف في السنة الرابعة هو ٣٥٠ ديناراً.

راتب الموظف في السنة السابعة هو

راتب الموظف في السنة العاشرة هو

أأمل هذه الأنماط من الأعداد، ثم أكتب ثلاثة حدود أخرى لكل نمط.

(أ) ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ، ،

(ب) ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ، ،

(ج) $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ، ، ،

نشاط
(٢)

تعريف

المتتالية: هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية، أو مجموعة جزئية منها. ويسمى كل عدد فيها حداً، وتكتب على الصورة ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ، ح_٤، فهي ترتيب من الأعداد، وفق نمط، أو قاعدة معينة.

لديك المتتالية الآتية:

$$\dots, 9, 7, 5, 3, \dots$$

$$3 = 1 \text{ ح } \text{ الحد الأول في هذه المتتالية هو } 1 \text{ ح}$$

$$5 = 2 \text{ ح } \text{ الحد الثاني في هذه المتتالية هو } 2 \text{ ح}$$

$$\text{الحد السابع في هذه المتتالية هو } 15 = 7 \text{ ح} \text{ لماذا؟}$$

$$\dots = 10 \text{ ح} \text{ الحد الخامس عشر في هذه المتتالية هو } 10 \text{ ح}$$

$$\dots = 100 \text{ ح} \text{ الحد مئة في هذه المتتالية هو } 100 \text{ ح}$$

يمكن إيجاد قيمة أي حد في هذه المتتالية، باستخدام العلاقة $1 + 2 \text{ ح} = 1 + 2 \text{ ح}$ ويسمى الحد العام لهذه المتتالية.

$$\text{قيمة } 1 \text{ ح} = 2 \times \dots + 1 = \dots$$

الحدود الأربعة الأولى من المتتالية التي حدّها العام $1 + 3 \text{ ح} = 1 + 3 \text{ ح}$

$$4 = 1 + 1 \times 3 = 1 \text{ ح}$$

$$\dots = 1 + \dots \times 3 = 2 \text{ ح}, 7 = 1 + 2 \times 3 = 2 \text{ ح}$$

$$\dots = 4 \text{ ح} \text{ وهكذا}$$

إذا المتتالية هي: $\dots, \dots, \dots, \dots$

تمارين ومسائل (٦-١)



١) تعاقد موظف للعمل في شركة بمدينة القدس براتب سنوي قدره ٦٠٠٠ دينار، على أن يعطى علاوة سنوية ثابتة قدرها ١٠٠ دينار. أجد متتالية راتب الموظف في السنوات الأربع الأولى من عمله؟

٢) أكتب الحد العام لكل من المتتاليات الآتية:

$$(1) \dots, 25, 16, 9, 4, 1, \dots$$

$$(2) \dots, 16, 12, 8, 4, \dots$$



تهتم جمعية لرعاية المعاقين بتأهيل طلاب متلازمة داون لمهن بسيطة، فقامت الجمعية بتأهيل ٥ طلاب في الشهر الأول، و٧ طلاب في الشهر الثاني و ٩ طلاب في الشهر الثالث، وهكذا...

نشاط
(١)

فتكون المتتالية التي تمثل الطلاب الذين تم تأهيلهم هي ، ،
يمكن كتابة مجموع الطلاب الذين تم تأهيلهم بالصورة $٥ + ٧ + ٩ + \dots$
تسمى هذه الصورة بالمتسلسلة.

تعريف المتسلسلة: هي مجموع حدود من متتالية، قد تكون هذه الحدود أعداداً أو اقترانات، ويمكن كتابة المتسلسلات بصورة مختصرة، حيث نستخدم الرمز \sum ليُدلّ على رمز المجموع.

أعوض في المتسلسلة $\sum_{r=١}^٤ (٣ + ٢r)$

نشاط
(٢)

قيم $r = ١, ٢, ٣, ٤$ على التوالي فأحصل على:

$$\dots + \dots + (٣+٢ \times ٢) + (٣+١ \times ٢) = (٣ + ٢r) \sum_{r=١}^٤$$

$$\dots + \dots + \dots + ٥ =$$

(١) لديك المتتالية الآتية ١، ٢، ٣، ٤، ٥،

نشاط
(٣)

المتسلسلة المرافقة لها هي

يمكن كتابة المتسلسلة بالصورة المختصرة على الصورة $\sum_{r=١}^{\infty}$

(٢) لديك المتتالية الآتية $١ \times ٤, ٢ \times ٤, ٣ \times ٤, \dots, ٩ \times ٤$

المتسلسلة المرافقة لها هي

المتسلسلة بالصورة المختصرة هي

تمارين ومسائل (١-٧)



١ أكتب المفكوك فيما يأتي:

$$(أ) \sum_{r=1}^3 (2 + r^3)$$

$$(ب) \sum_{r=1}^3 (r^2 + 4r)$$

$$(ج) \sum_{r=1}^4 (1-r)$$

$$(د) \sum_{r=1}^3 5$$

٢ أستخدم الرمز \sum للتعبير عن المتسلسلات.

(أ) $k + k^2 + k^3 + \dots + k^8$ ، k ثابت.

(ب) $\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}$

(ج) $\frac{4}{20} + \dots + \frac{4}{4} + \frac{4}{3} + \frac{4}{2} + 4$



أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- أي التوزيعات الآتية يعتبر توزيعاً احتمالياً؟

- (أ) ل (س) = $\frac{1}{4}$ ، س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤
 (ب) ل (س) = $\frac{٥-س}{٣}$ ، س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦
 (ج) ل (س) = $\frac{س^٢}{٣٠}$ ، س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣
 (د) ل (س) = $\frac{س}{٢١}$ ، س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

٢- ما قيمة أ التي تجعل التوزيع الآتي توزيعاً احتمالياً؟

س	١	٢	٣	٤
ل (س)	أ	أ٢	٠,١	٠,١٥

- (أ) ٠,٢٥ (ب) ٠,٥ (ج) ٠,١ (د) ٠,٠١

٣- إذا كان س متغيراً عشوائياً وكان ت (٢س - ٥) = ٣ ما قيمة ت (٣س + ٢)؟

- (أ) ٤ (ب) ٨ (ج) ١٤ (د) ١٨

٤- إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) يعطى بالعلاقة:

$$ل(س) = ك \times س ، س = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ \text{ فما قيمة الثابت ك؟}$$

- (أ) ٠,١ (ب) ٠,٠١ (ج) ٠,٠٢ (د) ٠,٢

٥- في تجربة إلقاء حجر نرد منتظمين مرةً واحدةً، إذا كان توقع أن يكون مجموع العددين

الظاهرين يساوي ٧ فما قيمة ت (٣ - ٢س)؟

- (أ) ٧- (ب) ٧ (ج) ١١ (د) ١١-

٢ يلقي لاعب حجر نرد منتظم مرةً واحدةً، فإذا ظهر عدد أولي فإنه يكسب نفس العدد من النقاط، وإذا

ظهر عدد غير أولي فإنه يخسر نفس العدد من النقاط، إذا دلّ المتغير العشوائي على عدد النقاط التي يكسبها أو يخسرها.

(أ) أكون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

(ب) أحسب التوقع للمتغير العشوائي.



اختر الإجابة الصحيحة من البدائل المدرجة:

1- إجراء علمي منتظم يقوم به شخص لإيجاد حل لمشكلة ما هو:

(أ) البحث . (ب) البحث العلمي . (ج) العينات . (د) حل المشكلات .

2- من خطوات البحث العلمي:

(أ) تحديد المشكلة . (ب) صياغة الفرضيات . (ج) تصميم الخطة . (د) كل ما سبق .

3- من طرق جمع المعلومات للبحث العلمي:

(أ) الحصر الشامل . (ب) العينات . (ج) أ + ب . (د) لا شيء مما ذكر .

4- لدراسة صلاحية المواد الغذائية نستخدم أسلوب:

(أ) الحصر الشامل . (ب) العينات . (ج) البحث العلمي . (د) لا شيء مما ذكر .

5- لدراسة عدد المواليد في إحدى المستشفيات نستخدم أسلوب:

(أ) العينات . (ب) الحصر الشامل . (ج) البحث العلمي . (د) لا شيء مما ذكر .

6- العينات التي يتم اختيارها بشكل عشوائي:

(أ) الاحتمالية . (ب) غير الاحتمالية . (ج) الحصر الشامل . (د) لا شيء مما ذكر .

7- عينة يتم اختيارها بطريقة منتظمة ونقطة عشوائية:

(أ) العينة البسيطة . (ب) العينة الوصلية . (ج) العينة المنتظمة . (د) العينة الطبقية .

8- استطلاع آراء أول ٢٠ طالباً أقابلهم في الجامعة تعدّ عينة:

(أ) وصولية . (ب) قصدية . (ج) الصدفة . (د) لا شيء مما ذكر .

9- استطلاع آراء طلبة الفرع العلمي حول أهمية الدروس الخصوصية تعدّ عينة عشوائية:

(أ) منتظمة . (ب) وصولية . (ج) قصدية . (د) لا شيء مما ذكر .

10- من العينات الاحتمالية:

(أ) القصدية . (ب) الوصولية . (ج) المنتظمة . (د) غير ذلك .

◀ ١١- الحد العام للمتتالية: $\frac{1}{3^n}$ ، ١ ، ٣- ، ... هو:

(أ) $٧ - ٤ن$ (ب) $(\frac{1}{3})^n$ (ج) $\frac{1}{3} \times (٣-)^{١-n}$ (د) $\frac{1}{3} + ٣(١ - ن)$

◀ ١٢- الحد العام للمتتالية: (٥- ، ١- ، ٣ ، ٧ ، ...) هو:

(أ) $(٥ + ٤ن)^-$ (ب) $٩ - ٤ن$ (ج) $٥ - ن$ (د) $٤ن$

◀ ١٣- الحد العام للمتتالية: ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ... هو:

(أ) $٥ + ٣ن$ (ب) $٧ + ٣ن$ (ج) $٢ + ٣ن$ (د) $٥ - ٣ن$

◀ ١٤- الحد العام للمتتالية: ٢- ، ٣ ، ٨ ، ١٣ ، ... هو:

(أ) $٥ \times (١ + ن) + ٢-$ (ب) $٥ \times (١ - ن) + ٢-$ (ج) $٥ + ٢-$ (د) $٥ن - ٢-$

◀ ١٥- إذا كانت المتتالية: ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ... فإن ح_{١٢} يساوي:

(أ) ٣٦ (ب) ٣٩ (ج) ٤٢ (د) ٤٥

◀ ١٦- قيمة $\sum_{١=٧}^٥$ = $(٥ - ٧٢)$

(أ) ٨٧ (ب) ٣٧ (ج) ٥٧ (د) ٦٧

◀ ١٧- قيمة $\sum_{١=٧}^٥ (١ - ٧)$

(أ) ١ (ب) ٣ (ج) ١٠ (د) ١١

◀ ١٨- قيمة $\sum_{١=٧}^٨ (٢ + ٧٣)$

(أ) ٢٥ (ب) ٢٦ (ج) ١٢٠ (د) ١٢٤



السؤال الأول: انقل رمز الإجابة الصحيحة إلى جدول مناسب على ورقة الإجابة:

(١) أي العينات الآتية تعدّ عينة احتمالية؟

أ. القصدية. ب. الحصصية. ج. الكرة الثلجية. د. المنتظمة.

(٢) أي الظواهر الآتية يحتاج إلى أخذ عينة؟

أ. إجراء تعداد عام لمعلمين الرياضيات في فلسطين. ب. فحص المصاييح الصالحة من انتاج مصنع مصاييح.
ج. إجراء التعداد العام للمنشآت الصناعية في الخليل. د. إحصاء عدد طالبات الصف الأول في القدس.

(٣) صندوقان يحوي كل منهما كرتين، في الأول مرقمة بالأرقام ٢ ، ٣ وفي الثاني مرقمة بالأرقام ٤ ، ٦ سُحبت كرة من كل صندوق، إذا دل المتغير العشوائي س على حاصل ضرب العددين المسحوبين فما قيم س؟

أ. ١٨ ، ١٢ ، ٨ . ب. ١٨ ، ١٢ ، ٦ ، ٨ . ج. ٢٤ ، ٦ . د. ١٨ ، ١٢ ، ٦ .

(٤) ليكن س متغيراً عشوائياً يتبع توزيع ذات الحدين بحيث: $h = 4$ ، $p = \frac{1}{16}$ فما قيمة ت(س)؟

أ. $\frac{1}{4}$. ب. ٤ . ج. ١٦ . د. ١ .

(٥) ما الحد العام للمتتالية: ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ؟

أ. $h = 2$. ب. $h = 2n$. ج. $h = 2n^3$. د. $h = 2n^4$.

(٦) استطلع باحث آراء أول ١٠٠ طالب قابلهم في الجامعة، ما نوع هذه العينة؟

أ. قصدية. ب. صدفة. ج. وصولية. د. حصصية.

(٧) متغير يأخذ قيمةً عدديةً تحددها نتائج تجربة عشوائية ما هو:

أ) المتغير. ب) المتغير العشوائي. ج) التجربة العشوائية. د) $A + B$.

(٨) مجموع جميع احتمالات قيم المتغير العشوائي:

أ) ١ . ب) صفر . ج) ١- . د) كل ما سبق .

(٩) إذا كان س متغيراً عشوائياً يمثل عدد مرات الحصول على صورة عند إلقاء قطعة نقود ٣ مرات متتالية، فإنّ قيم المتغير العشوائي س يساوي:

أ) ٠ ، ١ ، ٢ . ب) ٣ . ج) ١ ، ٢ ، ٣ . د) ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ .

(١٠) إذا كان س متغيراً عشوائياً، وكان ت(٢س - ١) = ٥ ، فإن: ت(س) تساوي:

أ) ٥ . ب) ٣ . ج) ١١ . د) ١٥ .

السؤال الثاني:

أ. إذا كان S متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي يعطى بالعلاقة: $L(S) = S^2$ ، $S = 1, 2, 3, 4$ أوجد $(2S + 1)$.
ب. جد الحد السادس والعشرون من حدود المتتالية حسابية: $1, 2, 5, 8, \dots$

السؤال الثالث: يُراد سحب عينة منتظمة حجمها ٥٠ من مجتمع حجمه ١٠٠٠، إذا كان رقم العنصر الأول ١٣. فأوجد الرقم الثاني. وما هو رقم العنصر الأخير؟

السؤال الرابع: عند إلقاء قطعتي نقود منتزعتين ٥ مرات متتالية ما احتمال الحصول على صورتين فقط ٤ مرات؟

السؤال الخامس: يربح بائع مظلات شمسية ٥ دنانير في اليوم المشمس، ويخسر دينارين في اليوم غير المشمس، فإذا كان احتمال اليوم المشمس هو ٠,٧. احسب: توقع الربح اليومي للبائع .