١١

بسم الله الرحمن الرحيم

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيـــــات

الفرع العلمي والصناعي

الفترة الأولى

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

الوحدة ١

النتاجات

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المتجهات والعمليات عليها والعبارات الرياضية وادوات الربط في الحياة العملية من خلال الآتي:

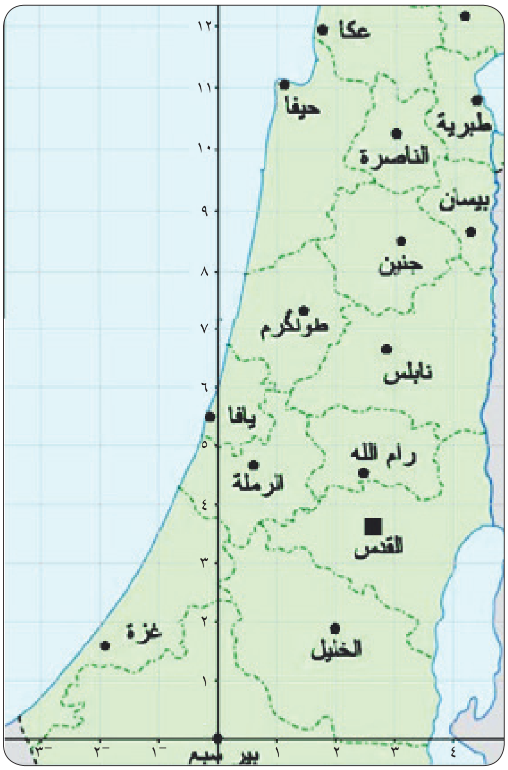
١. تحديد النقاط في الفراغ وإيجاد المسافة بين نقطتين وإحداثيات المنتصف بين نقطتين.
٢. إجراء العمليات على المتّجهات في المستوى والفراغ وطرق تمثيلها.
٣. تحديد الزوايا الاتجاهية لمتجهات في الفراغ.
٤. تطبيقات فيزيائية وحياتية على المتجهات.
٥. توظيف المتجهات في تطبيقات فيزيائية وهندسية وحياتية.
٦. إعطاء أمثلة واقعية على المُسَلّمات والنظريات في الهندسة الفراغية وتطبيقاتها.
٧. تعريف الأوضاع المختلفة لكل من: مستقيمين مختلفين، ولمستقيم ومستوى، ومستويات مختلفة في الفراغ.
٨. تنمية القدرة على التعبير والدقة في استخدام المصطلحات الهندسية.
٩. التعرف إلى أنواع العبارات الرياضية، وأدوات الربط بينها.
١٠. التعرف إلى جداول الصواب، وتوظيفها في إثبات تكافؤ العبارات.

١ - ١ الإحداثيات الدّيكارتية في الفراغ ثلاثي الأبعاد Cartesian Coordinates in Space

أتذكر أنّ : المسافة بين النقطتين أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب(س$_2$ ، ص$_2$)

$$\text{أب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

وإحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة أب = $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} \text{ ، } \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right)$



نشاط ١: بالاعتماد على الخريطة الآتية إذا مثلنا موقع مدينة رام الله بالنقطة أ (٥,٢ ، ٥,٤) وموقع مدينة غزة بالنقطة ب (⁻٢ ، ٥,١). أجد المسافة بين المدينتين. (ملاحظة : كل وحدة تعادل ١٠كم والإحداثيات تقريبية).

أب= ______________

لاحظ أنّ إحداثيات موقع مدينة نابلس (٣، ٦,٦)
وإحداثيات موقع مدينة الناصرة (٣ ، ١٠,٢)
بالاعتماد على قانون إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة، أجد إحداثيات موقع مدينة جنين والتي تقع تقريبا في منتصف المسافة بين نابلس والناصرة.

إحداثيات موقع مدينة جنين= (________ ، ________)

أقارن الإجابة بالرجوع إلى الخريطة. (________ ، ________)

نشاط ٢: إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث نقاط في الفراغ ، وكانت جـ تقع في منتصف $\overline{\text{أب}}$ بحيث أن أ (١٢، ⁻٤ ، ٨) ، جـ (⁻٤ ، ١ ، ٥) أجد:

١ إحداثيات ب ٢ طول $\overline{\text{أب}}$

الحل : ١ نفرض إحداثيات ب (س ، ص ، ع)

فيكون $\frac{\text{س} + 12}{2} = -4$ ومنها س = ________

وبنفس الطريقة ص= ______ و ع = ______

٢ أب = $\sqrt{\text{______} + \text{______} + \text{______}}$

مثال ١ : إذا كانت أ(٢س ، ٢س ، ٥) ، ب(⁻١ ، ⁻٢، ٠) وكان أب= ٥ $\sqrt{٢}$ أجد قيم س.

الحل : (أ ب)^{٢} = (٢س + ١)^{٢} + (٢س + ٢)^{٢} + ٢٥ = ٥٠ (لماذا ؟)

ومنها ينتج ٤س^{٢} + ٤س + ١ + ٤س^{٢} + ٨س + ٤ + ٢٥ = ٥٠

٨س^{٢} + ١٢س − ٢٠ = ٠

ومنها ينتج : ٢س^{٢} + ٣س − ٥ = ٠

ومنها (٢س + ٥) (س − ١) = ٠

إذن س = $\frac{⁻٥}{٢}$ ، ١

تمارين ومسائل ١-١

١ أجد النقاط الآتية في الفراغ، ثم أجد بعد النقطة جـ عن المستويات س ص ، س ع ، ص ع

١ أ (٢ ، ٣ ، ٠)

٢ ب (٠ ، ٠ ، ⁻٢)

٣ جـ (⁻٣ ، ٢ ، ٤).

٣ نقطة في الفراغ بعدها عن المستوى س ص = ٢ وحدة وبعدها عن المستوى س ع = ٧ وحدات وبعدها عن المستوى ص ع = ٣ وحدات ما إحداثيات هذه النقطة. (أكتب جميع الحالات الممكنة).

٣ أ ب جـ مثلث فيه أ (١ ، ٣ ، ٢) ، جـ (⁻١ ، ٣، ٢)

فإذا كانت النقطة د (س ، ⁻٢ ، س − ٢) هي إحداثيات منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

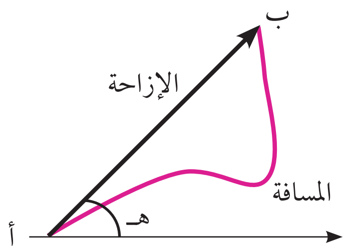
وكان (جـ د) = $\sqrt{٤٢}$ وحدة أجد إحداثيات النقطة ب حيث س < ٠

١ - ٢ المتجهات في المستوى Vectors in Plane

أتذكّر أن: المسافة المقطوعة هي مجموع المسافات التي يسيرها الجسم من نقطة البداية إلى نقطة النهاية أما الإزاحة فهي كمية متجهه تحدد بعنصرين هما:

1. **طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة البداية ونقطة النهاية.**
2. **الزاوية التي تصنعها القطعة المستقيمة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (اتجاه الحركة).**

في الشكل الآتي المسافة المقطوعة هي طول المسار باللون الأحمر، أما الإزاحة فهي تحدد بطول القطعة أب والتي تصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ واتجاه الحركة هو من أ إلى ب.



أتعلم: تقسم الكميات إلى نوعين كميات متجهة تتحدد بالمقدار والاتجاه، وكميات قياسية (غير متجهة تحدد بالمقدار فقط.

المتجه يحدد بالمقدار والاتجاه ويمكن تمثيله هندسيا في المستوى بقطعة مستقيمة موجهة اتجاهها من نقطة البداية إلى نقطة النهاية وطولها يمثل مقدار المتجه، ويرمز للمتجه بالرمز $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، بحيث تكون نقطة البداية هي أ $(\text{أ}_1 ، \text{أ}_2)$ ونقطة النهاية هي ب$(\text{ب}_1 ، \text{ب}_2)$ أو بالرمز $\overleftarrow{\text{م}}$ ، ويرمز لطول المتجه بالرمز $|\overleftarrow{\text{أب}}|$.

ولتسهيل تمثيل المتجهات وإجراء العمليات عليها فإنّنا نمثل المتجه في ما يسمى الوضع القياسي، بحيث نجعل نقطة البداية (٠ ، ٠) ونقطة النهاية جـ$(\text{ب}_1 - \text{أ}_1 ، \text{ب}_2 - \text{أ}_2)$

ويكون $|\overleftarrow{\text{أب}}| = \sqrt{(\text{ب}_1 - \text{أ}_1)^2 + (\text{ب}_2 - \text{أ}_2)^2}$

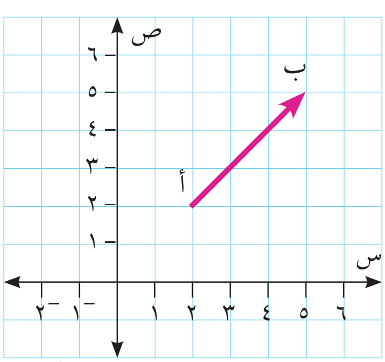
نشاط ١: في الشكل المجاور إحداثيات نقطة البداية هي ________

إحداثيات نقطة النهاية هي ____________

طول المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ = ____________

قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ____________

أمثل المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ في الوضع القياسي



تعريف: يتساوى المتجهان $\overleftarrow{م_١}$ ، $\overleftarrow{م_٢}$ إذا كان لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه أي أنهما يمثلان بنفس الزوج المرتب في الوضع القياسي.

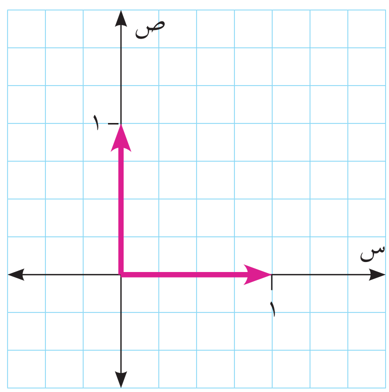
متجهات خاصة:

١ المتجه الصفري: وهو المتجه الذي طوله صفر وحدة واتجاهه غير معين ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{٠}$.

٢ متجه الوحدة: وهو المتجه الذي طوله وحدة واحدة.

٣ متجها الوحدة الأساسيان: $\overleftarrow{و_١}$ وهو متجه الوحدة السّيني، ويمثل بالزوج المرتب (١ ، ٠).

$\overleftarrow{و_٢}$ وهو متجه الوحدة الصّادي، ويمثل بالزوج المرتب (٠ ، ١).



مثال ١ : إذا كانت أ (⁻٥ ، ٢) ، ب (١ ، ٣) ، جـ (١ ، ٤)

١ أمثّل $\overleftarrow{أ ب}$ في الوضع القياسي.

٢ أكتب $\overleftarrow{أ ب}$ بدلالة متجهي الوحدة.

٣ أجد قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{أ ب}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٤ أجد إحداثيات النقطة د بحيث إنّ $\overleftarrow{أ ب}$ = $\overleftarrow{د جـ}$.

الحل :

١ الزوج المرتب الذي يمثل $\overleftarrow{أ ب}$ = ب - أ = (١ ، ٣) - (⁻٥ ، ٢) = (٦ ، ١)

٢ $\overleftarrow{أ ب}$ = ٦ $\overleftarrow{و_١}$ + $\overleftarrow{و_٢}$

٣ ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{١}{٦}$

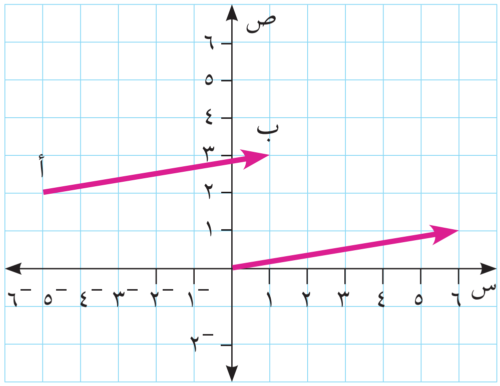
ومنها هـ تساوي تقريبا ١٠°

٤ بما أنّ $\overleftarrow{أب}$ = $\overleftarrow{د جـ}$

إذن: ب − أ = جـ − د

(٦ ، ١) = (١ ، ٤) − د

ومنها د (⁻٥ ، ٣)



تمارينٌ ومسائلُ ١-٢:

١ إذا كانت أ (⁻٢ ، ٣) ، ب (٢ ، ٥) ، جـ (٤ ، ٣) ثلاث نقاط في المستوى

أ أمثل المتجهين $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين

ب أجد طول كل من: $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$.

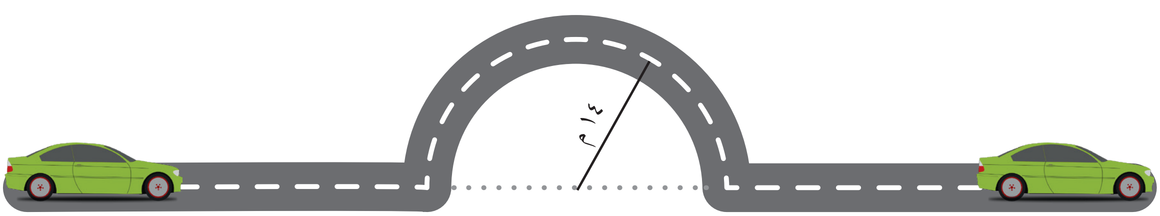
٢ إذا كان $\overleftarrow{م_١}$ = $\overleftarrow{م_٢}$ وكان $\overleftarrow{م_١}$ = (٢س + ٣ ، ص − ٢) ، $\overleftarrow{م_٢}$ = (ص ، س + ٣)

أجد قيم س و ص.

٣ تحركت سيارة من النقطة أ إلى النقطة ب حسب المسار الموضح في الشكل الآتي: أجد:

أ المسافة الكلية المقطوعة.

ب مقدار واتجاه إزاحة السيارة .



أولاً- جمع المتجهات جبرياً:

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (أ$_1$ ، أ$_2$) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (ب$_1$ ، ب$_2$) متجهين في الوضع القياسي، فإنّ حاصل جمع المتجهين هو المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (أ$_1$ + ب$_1$ ، أ$_2$ + ب$_2$) .

مثال ١ : إذا كانت أ (١ ، ٣) ، ب(−١ ، ٢) ، جـ (٢ ، −١) أجد بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

١ $\overleftarrow{\text{أب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$

الحل :

١ $\overleftarrow{\text{أب}}$ = ب − أ = (−١ ، ٢) − (١ ، ٣) = (−٢ ، −١)

$\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = جـ − ب = (٢ ، −١) − (−١ ، ٢) = (٣ ، −٣)

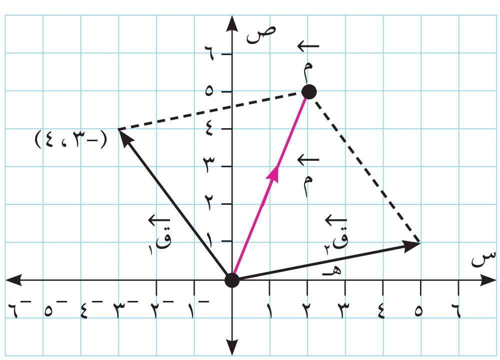
$\overleftarrow{\text{أب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = (−٢ ، −١) + (٣ ، −٣) = (١ ، −٤) = $\overleftarrow{\text{و}}_1$ + −٤ $\overleftarrow{\text{و}}_2$

٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ = (١ ، ٣) + (−٣ ، ٣) = (−٢ ، ٦) = −٢ $\overleftarrow{\text{و}}_1$ + ٦ $\overleftarrow{\text{و}}_2$

نشاط ١ : أثرت قوتان $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_2$ في جسم موجود في نقطة الأصل، فتحرك الجسم من نقطة الأصل إلى النقطة (٢ ، ٥) فإذا كانت $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ = −٣ $\overleftarrow{\text{و}}_1$ + ٤ $\overleftarrow{\text{و}}_2$ (انظر الشكل)

$\overleftarrow{\text{ق}}_2$ = $\overleftarrow{\text{م}}$ − ____ = ____ − ____ = (٥ ، ١) = ____ $\overleftarrow{\text{و}}_1$ + ____ $\overleftarrow{\text{و}}_2$

| $\overleftarrow{\text{ق}}_2$ | = ______ ظاهـ =



ثانياً - ضرب المتجه بعدد حقيقي

تعريف: إذا كان $\overleftarrow{م}$ متجها غير صفري ، وكان أ $\in$ ح*
فإنّ أ $\overleftarrow{م}$ متجه يوازي $\overleftarrow{م}$ طوله $= |$ أ . $\overleftarrow{م}| = |$أ$|\ |\overleftarrow{م}|$
ويكون في نفس اتجاه $\overleftarrow{م}$ إذا كانت أ موجبة وعكس اتجاه $\overleftarrow{م}$ إذا كانت أ سالبة.

مثال ٢ : إذا كان $\overleftarrow{م} = (٢ ، ٤)$ أجد كلا من المتجهات الآتية :

١ $٢\,\overleftarrow{م}$ ، $\frac{-١}{٢}\overleftarrow{م}$

٢ أجد $|٢\,\overleftarrow{م}|$ ، $|\frac{-١}{٢}\overleftarrow{م}|$

الحل :

١ $٢\,\overleftarrow{م} = ٢(٢ ، ٤) = (٤ ، ٨)$

$\frac{-١}{٢}\overleftarrow{م} = \frac{-١}{٢}(٢ ، ٤) = (-١ ، -٢)$

٢ $|٢\,\overleftarrow{م}| = \sqrt{١٦ + ٦٤} = \sqrt{٨٠}$

$|\frac{-١}{٢}\overleftarrow{م}| = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$

تعريف: إذا كان $\overleftarrow{م}$ متجها غير صفري، فإنّ متجه الوحدة باتجاه $\overleftarrow{م}$ هو $\hat{م}$ حيث $\hat{م} = \frac{\overleftarrow{م}}{|\overleftarrow{م}|}$

مثال ٣ : إذا كان $\overleftarrow{م} = -٣\,\overleftarrow{و}_٢ + ٤\,\overleftarrow{و}_١$ أجد متجه وحدة باتجاه $\overleftarrow{م}$

الحل :

$|\overleftarrow{م}| = ٥$ وحدات (لماذا؟)

متجه الوحدة باتجاه $\overleftarrow{م} = \hat{م} = \frac{\overleftarrow{م}}{|\overleftarrow{م}|} = (\frac{٤}{٥} ، \frac{-٣}{٥})$ (تحقق أن طوله = ١ وحدة)

نشاط ٢: إذا كان $\overleftarrow{م}_١ = ٣\,\overleftarrow{و}_١ - ٤\,\overleftarrow{و}_٢$ وكان أ$(٢ ، -١)$ ، ب $(٦ ، ٢)$ أجد ما يلي:

١ $\overleftarrow{أب}$ في الوضع القياسي = ____________

❷ $\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{أب} =$ ____________

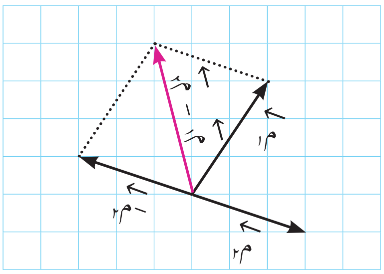
❸ $\dfrac{\overleftarrow{م}_{١}}{|\overleftarrow{م}_{١}|} =$ ____________

ثالثاً- طرح المتجهات:

لطرح متجهين فإنّنا نستخدم الخاصية الآتية:

$$\overleftarrow{م}_{١} - \overleftarrow{م}_{٢} = \overleftarrow{م}_{١} + (-\overleftarrow{م}_{٢})$$

الشكل المجاور يوضح عملية طرح متجهين.



نشاط ٣: إذا كان $\overleftarrow{م}_{١} = (-٢ ، ٥)$، $\overleftarrow{م}_{٢} = (٣ ، ٤)$ فإنّ $\overleftarrow{م}_{٢} - ٢\,\overleftarrow{م}_{١} =$ (______ ، ______)

الخواصّ الأساسية للعمليات على المتجهات:

إذا كان $\overleftarrow{م}_{١}$ ، $\overleftarrow{م}_{٢}$ ، $\overleftarrow{م}_{٣}$ ثلاثة متجهات في المستوى وكانت أ ، ب $\in$ ح فإنّ:

❶ $\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{م}_{٢} = \overleftarrow{م}_{٢} + \overleftarrow{م}_{١}$ (الخاصية التبديلية)

❷ $(\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{م}_{٢}) + \overleftarrow{م}_{٣} = \overleftarrow{م}_{١} + (\overleftarrow{م}_{٢} + \overleftarrow{م}_{٣})$ (الخاصية التجميعية)

❸ $\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{٠} = \overleftarrow{٠} + \overleftarrow{م}_{١} = \overleftarrow{م}_{١}$ (العنصر المحايد)

❹ $\overleftarrow{م}_{١} + (-\overleftarrow{م}_{١}) = (-\overleftarrow{م}_{١}) + \overleftarrow{م}_{١} = \overleftarrow{٠}$ (النظير الجمعي)

❺ $أ(\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{م}_{٢}) = أ\,\overleftarrow{م}_{١} + أ\,\overleftarrow{م}_{٢}$

❻ $(أ + ب)(\overleftarrow{م}_{١}) = أ\,\overleftarrow{م}_{١} + ب\,\overleftarrow{م}_{١}$

❼ $|أ\,\overleftarrow{م}_{١}| = |أ|\,|\overleftarrow{م}_{١}|$

مثال ٤ : إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (−٢ ، ٤) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٦ ، ٢)، أجد المتجه $\overleftarrow{س}$ الذي يحقق المعادلة الآتية:

٢ $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{أ}$ = ٣ $\overleftarrow{ب}$

الحل : بإضافة $\overleftarrow{أ}$ إلى طرفي المعادلة تصبح ٢ $\overleftarrow{س}$ = ٣ $\overleftarrow{ب}$ + $\overleftarrow{أ}$

ثم نضرب المعادلة في $\frac{١}{٢}$ فتصبح $\overleftarrow{س}$ = $\frac{١}{٢}$(٣ $\overleftarrow{ب}$ + $\overleftarrow{أ}$)

ومنها $\overleftarrow{س}$ = (٨ ، ٥)

تمارينُ ومسائلُ ١-٣

١ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (−٣ ، ٥) ، $\overleftarrow{ب}$ = ٣ $\overleftarrow{و}_{١}$ + ٤ $\overleftarrow{و}_{٢}$ ، أكتب −٥ $\overleftarrow{أ}$ + ٢ $\overleftarrow{ب}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

٢ إذا كانت أ(س ، −٢) ، ب(٥ ، س) أجد قيمة/ قيم س التي تجعل طول المتجه $\overleftarrow{أب}$ = ٥ وحدات

٣ أحل المعادلة المتجهية الآتية حيث $\overleftarrow{أ}$ = (٣ ، −٥) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٢ ، −٦)

٤ $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{أ}$ = ٣ $\overleftarrow{ب}$

٤ أثرت قوتان في جسم بحيث إن $\overleftarrow{ق}_{١}$ = ٢ $\overleftarrow{و}_{١}$ + ٤ $\overleftarrow{و}_{٢}$ ، $\overleftarrow{ق}_{١}$ + $\overleftarrow{ق}_{٢}$ = (٥ ، ٧) أجد $\overleftarrow{ق}_{٢}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

٥ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (−٢ ، ٦) أجد:

أ متجه طوله ٥ وحدات وعكس اتجاه $\overleftarrow{أ}$

ب متجه طوله ٥ أمثال $\overleftarrow{أ}$ وبنفس اتجاه $\overleftarrow{أ}$

أتعلم: يمكن تطبيق جميع العمليات على المتجهات في المستوى على المتجهات في الفراغ.

نشاط ١: أطلق صاروخ من نقطة إحداثياتها أ (١ ، ٣ ، ٢) وبعد مدة من الزمن وصل إلى النقطة ب (٣٠ ، ٤٥ ، ٢٠)، فإذا كانت نقطة الأصل تمثل برج المراقبة وكانت الوحدات بالكيلومتر، فإنّ:

$\overleftarrow{\text{أب}}$ = (ــــــ ، ــــــ ، ٢٠ − ٢) = (ــــــ ، ــــــ ، ١٨)

$\overleftarrow{\text{أب}}$ = ــــــ + ــــــ + ــــــ

مثال ١ : إذا كان $\overleftarrow{م_١}$ = ب $\overleftarrow{و_١}$ − ٢ أ $\overleftarrow{و_٢}$ +٥ $\overleftarrow{و_٣}$ وكان $\overleftarrow{م_٢}$ = أ $\overleftarrow{و_١}$ + ب $\overleftarrow{و_٢}$ −٦ $\overleftarrow{و_٣}$ أجد:

أ ، ب ، جـ علماً بأن $\overleftarrow{م_١}$ + $\overleftarrow{م_٢}$ = (٩ ، −٣ ، جـ)

الحل : $\overleftarrow{م_١}$ + $\overleftarrow{م_٢}$ = (ب + أ ، −٢ أ + ب ، −١) = (٩ ، −٣ ، جـ) ومنها جـ = −١

ب+ أ = ٩ ، −٢أ + ب = −٣ وبحل المعادلتين ينتج: أ = ٤ و ب = ٥

مثال ٢ : إذا كانت أ (−٦ ، ٤ ، ٢) ب(٨ ، −٢ ، ٤) أجد ما يلي:

١ متجه يوازي $\overleftarrow{\text{أب}}$ وطوله ٣ امثال طول $\overleftarrow{\text{أب}}$.

٢ متجه عكس اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$ وطوله ٣ وحدات.

الحل :

١ $\overleftarrow{\text{أب}}$ = (٨ ، −٢ ، ٤) − (−٦ ، ٤ ، ٢) = (١٤ ، −٦ ، ٢)

لإيجاد متجه طوله ٣ أمثال $\overleftarrow{\text{أب}}$ ويوازيه نضرب $\overleftarrow{\text{أب}}$ في ±٣

فيصبح ±٣ (١٤، −٦ ، ٢)

٢ نجد أولاً متجه وحدة باتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$ وهو $\dfrac{\overleftarrow{\text{أب}}}{|\overleftarrow{\text{أب}}|}$ = $\left(\dfrac{١٤}{\sqrt{٢٣٦}} ، \dfrac{-٦}{\sqrt{٢٣٦}} ، \dfrac{٢}{\sqrt{٢٣٦}}\right)$

نضرب متجه الوحدة في −٣ فيكون المتجه المطلوب $\left(\dfrac{-٤٢}{\sqrt{٢٣٦}} ، \dfrac{١٨}{\sqrt{٢٣٦}} ، \dfrac{-٦}{\sqrt{٢٣٦}}\right)$

نشاط ٢: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، ٩ ، ٥)، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (س + ١ ، ص$^{\text{٢}}$، $\frac{\text{ع}}{\text{٢}}$) أجد س ، ص ، ع

علماً بأن : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = $\overleftarrow{\text{ب}}$

س + ١ = ________ ومنها س = ______

ص$^{\text{٢}}$ = ______ ومنها ص= ______

$\frac{\text{ع}}{\text{٢}}$ = ______ ومنها ع = _______

نشاط ٣: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{١}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{٢}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ٥ ، ٨) أجد ما يلي:

١ ٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ب}}$ = __________

٢ | $\overleftarrow{\text{أ}}$ | + | $\overleftarrow{\text{ب}}$ | = __________

٣ | $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ | = __________

٤ متجه وحدة باتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ = __________

٥ متجه وحدة باتجاه $\overleftarrow{\text{ب}}$ = __________

٦ متجه عكس اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ وطوله ٤ وحدات = __________

تمارينُ ومسائلُ ١ – ٤

١ أثرت قوتان في جسم، فإذا كانت $\overleftarrow{\text{ق}}_{\text{١}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{١}}$ − ٢ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{٢}}$ + $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{٣}}$
$\overleftarrow{\text{ق}}_{\text{٢}}$ = −٢ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{١}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{٢}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{٣}}$ أجد محصلة هاتين القوتين.

٢ إذا كانت أ (−٦ ، ٢ ، ٣) ، ب (٢ ، ٤ ، ٨) أجد ما يلي:

أ متجه طوله ٤ أمثال $\overleftarrow{\text{أب}}$ ويوازيه.

ب متجه طوله ٤ وحدات وبنفس اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$.

جـ متجه وحدة عكس اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$.

٣ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٢، ٤ ، ٦) وكان ٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ب}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{١}}$ + ٢٣ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{٢}}$
أجد $\overleftarrow{\text{ب}}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

٤ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (−١ ، ٧ ، ٦) وكان ٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ − ٣ $\overleftarrow{\text{ب}}$ = −٧ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{١}}$ − $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{٢}}$ − ١٣ $\overleftarrow{\text{و}}_{\text{٣}}$
أجد | $\overleftarrow{\text{أ}}$ − $\overleftarrow{\text{ب}}$ | .

١ - ٥ ضرب المتجهات Product of Vectors الضرب (القياسي)

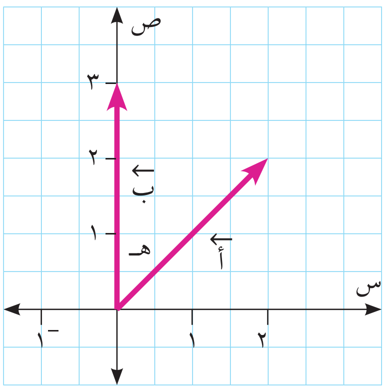
تعريف : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين ، فإنّ الضرب القياسي لهذين المتجهين هو $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}$
حيث $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = |\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}|$ جتا هـ حيث هـ قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ حيث هـ $\in [\,٠ ، \pi\,]$.

مثال ١ : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (٢ ، ٢)$، $\overleftarrow{\text{ب}} = (٠ ، ٣)$، أجد $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}$ باستخدام تعريف الضرب الداخلي للمتجهات.

الحل : بتمثيل المتجهين هندسياً في المستوى ، فإنّ قياس الزاوية المحصورة بين المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ والاتجاه الموجب لمحور السينات يساوي ٤٥ ° لماذا؟ ومنها ينتج أن: هـ = ٤٥ °

$\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = |\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}|$ جتا ٤٥°

$= \sqrt{٨} \times ٣ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٦$



نشاط ١: ما قيمة ❶ $\overleftarrow{\text{و}}_١ \cdot \overleftarrow{\text{و}}_٢$ ❷ $\overleftarrow{\text{و}}_٢ \cdot \overleftarrow{\text{و}}_٢$ ❸ $\overleftarrow{\text{و}}_١ \cdot -٢\,\overleftarrow{\text{و}}_٢$

الحل :
١) $\overleftarrow{\text{و}}_١ \cdot \overleftarrow{\text{و}}_٢ = |\overleftarrow{\text{و}}_١|\,|\overleftarrow{\text{و}}_٢|$ جتا ٩٠° = ____________
٢) $\overleftarrow{\text{و}}_٢ \cdot \overleftarrow{\text{و}}_٢ =$ ____________
٣) $\overleftarrow{\text{و}}_١ \cdot -٢\,\overleftarrow{\text{و}}_٢ =$ ____________

خصائص الضرب (القياسي) الداخلي:

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ متجهاتٍ غيرَ صفريةٍ و كان د $\in$ ح* ، فإنّ

١) $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{أ}} = |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢}$ لماذا ؟

٢) $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} \cdot \overleftarrow{\text{أ}}$ (الخاصية التبديلية) لماذا؟

٣) $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot (\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{جـ}}) = (\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}) + (\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{جـ}})$ (التوزيع من اليمين)

٤ $(\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ}) \cdot \overleftarrow{أ} = (\overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{أ}) + (\overleftarrow{جـ} \cdot \overleftarrow{أ})$ (التوزيع من اليسار)

٥ $د(\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}) = (د\overleftarrow{أ}) \cdot \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{أ} \cdot (د\overleftarrow{ب})$ لكل $د \in ح^*$

نظرية : **إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_١ ، أ_٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_١ ، ب_٢)$ فإنّ $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = أ_١ب_١ + أ_٢ب_٢$**

ويمكن تعميم النظرية من المستوى إلى الفراغ كما يلي :

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_١ ، أ_٢ ، أ_٣)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_١ ، ب_٢ ، ب_٣)$

فإنّ $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = أ_١ب_١ + أ_٢ب_٢ + أ_٣ب_٣$

مثال ٢ : إذا كان $\overleftarrow{أ} = (٣ ، ٥ ، -١)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٢ ، -٢ ، ٤)$ أجد $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$

الحل : $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = ٣ \times ٢ + ٥ \times -٢ + -١ \times ٤ = -٨$

نشاط ٢ : إذا كان $\overleftarrow{أ} = (٣ ، ٠)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٠ ، ٤)$

١ أعيّن المتجهين في المستوى الدّيكارتي.

٢ أجد $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$ ، فسّر إجابتك.

$\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = |\overleftarrow{أ}| \, |\overleftarrow{ب}|$ جتا هـ = __________

نتيجة: يكون المتجهان غير الصفريين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$ = صفرًا

مثال ٣ : أبين أن كل زوجين من المتجهات الآتية متعامدان :

١ $\overleftarrow{أ} = (٢ ، ٤ ، -٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٣ ، ١ ، ٥)$

١ $\overleftarrow{و_١}$ ، $\overleftarrow{و_٢}$ في الفراغ

الحل :

١ $(٢ ، ٤ ، -٢) \cdot (٣ ، ١ ، ٥) = ٦ + ٤ - ١٠$ = صفرًا إذن $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$

٢ $\overleftarrow{و_١} \cdot \overleftarrow{و_٢} = (١ ، ٠ ، ٠) \cdot (٠ ، ١ ، ٠)$ = صفرًا إذن $\overleftarrow{و_١} \perp \overleftarrow{و_٢}$

نظرية: إذا كان المتجه $\overleftarrow{أ}$ = (أ$_١$ ، أ$_٢$ ، أ$_٣$) و كانت هـ$_١$ ، هـ$_٢$ ، هـ$_٣$ قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه مع المحاور الإحداثية الموجبة س ، ص ، ع على الترتيب، فإنّ :

أ) جتا هـ$_١$ = $\frac{أ_١}{|\overleftarrow{أ}|}$ ، جتا هـ$_٢$ = $\frac{أ_٢}{|\overleftarrow{أ}|}$ ، جتا هـ$_٣$ = $\frac{أ_٣}{|\overleftarrow{أ}|}$

ب) جتا^٢ هـ$_١$ + جتا^٢ هـ$_٢$ + جتا^٢ هـ$_٣$ = ١

تُسمّى الزوايا هـ$_١$ ، هـ$_٢$ ، هـ$_٣$ الزوايا الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{أ}$ ، وهي الزوايا التي تحدد اتجاه المتجه في الفراغ.

مثال ٤ :

١) أجد قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{أ}$ = (١ ، ٠ ، $\sqrt{٣}$) مع المحاور الإحداثية.

٢) أبين أن: جتا^٢ هـ$_١$ + جتا^٢ هـ$_٢$ + جتا^٢ هـ$_٣$ = ١

الحل :

١) جتا هـ$_١$ = $\frac{أ_١}{|\overleftarrow{أ}|}$ = $\frac{١}{٢}$ ومنها هـ$_١$ = ٦٠°

جتا هـ$_٢$ = $\frac{أ_٢}{|\overleftarrow{أ}|}$ = $\frac{صفر}{٢}$ ومنها هـ$_٢$ = ٩٠°

جتا هـ$_٣$ = $\frac{أ_٣}{|\overleftarrow{أ}|}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ومنها هـ$_٣$ = ٣٠°

٢) جتا^٢ هـ$_١$ + جتا^٢ هـ$_٢$ + جتا^٢ هـ$_٣$ = $(\frac{١}{٢})^٢ + (٠)^٢ + (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢$ = ١

تمارينُ و مسائلُ ١ - ٥

١) أجد ما يلي :

أ) $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ علما بأن: $\overleftarrow{أ}$ = (٥ ، ٣ ، ٠)، $\overleftarrow{ب}$ = (-١ ، ٢ ، ٢)

ب) $\overleftarrow{و_١}$. $\overleftarrow{و_٣}$

٢) أجد قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين (١ ، ٤ ، ٣) ، (٣ ، ١٢ ، ٩)

٣) أجد قيمة س :

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (جتاس ، -جاس)، $\overleftarrow{ب}$ = (جتاس ، ١ + جاس)، وكان $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$، س ∈]٠ ، π[.

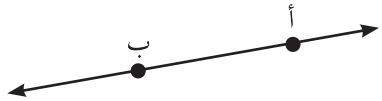
١ - ٦ الهندسة الفراغية Space Geometry

يتكون البناء الرياضي الهندسي من مُسميات أولية ومُسلّمات ونظريات

- **المسميات أولية:** وهي ليس لها تعريف مثل النقطة والمستقيم والمستوى والفراغ. ويمكن إعطاء أمثلة من الواقع مثل موقع مدينة على الخارطة وحافة مسطرة و ملعب كرة قدم.
- **المُسلّمة :** هي عبارة رياضية تربط بين المسميات الأولية وتقبل صحتها دون برهان.
- **النظرية:** عبارة رياضية يمكن إثبات صحتها بالاعتماد على مفاهيمَ ، أو حقائقَ ، أو مُسلّمات أو نظريات سابقة.

وفيما يلي بعض هذه المُسلّمات:

١ مُسلّمة ١ : لأي نقطتين مختلفتين في الفراغ يوجد مستقيم واحد فقط يمر بهما.

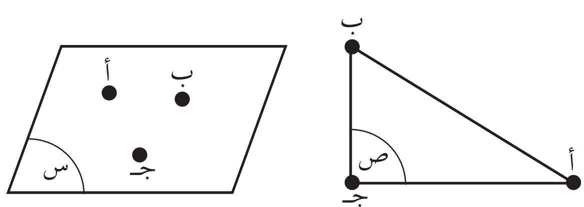


يسمى المستقيم بنقطتين واقعتين عليه مثل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ أو المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

أتذكّر: أن النقاط المستقيمة هي النقاط التي تقع على خط مستقيم واحد.

٢ مُسلّمة ٢ : المستوى يحتوي على ثلاث نقاط على الأقل ، مختلفة وليست على استقامة واحدة.

يسمى المستوى أ ب جـ ، أو المستوى س



أتعلّم: النقاط المستوية هي النقاط التي تقع في نفس المستوى.

نشاط ١: يمكن تحديد مستوى واحد فقط بـ :

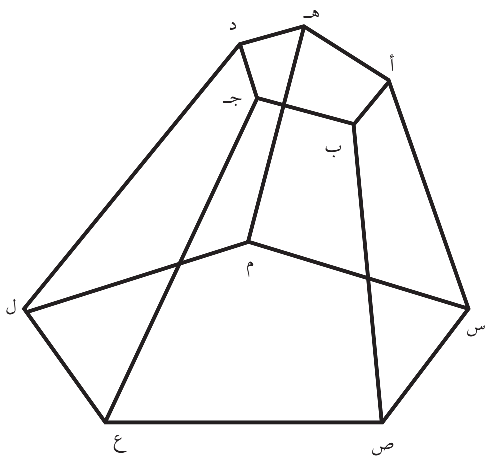
١ ثلاث نقاط غير مستقيمة .

٢ مستقيم ونقطة ______

٣ مستقيمين ________

٤ مستقيمين ________

٣ **مُسلّمة ٣: الفراغ يحتوي على أربع نقاط على الأقل مختلفة و غير مستوية.**



نشاط ٢: من الشكل المجاور أسمي

أ ٤ مستقيمات

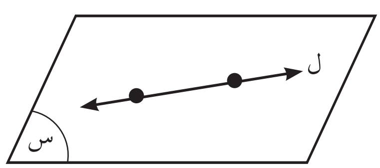
١) المستقيم أ ب ٢) ________

٣) ________ ٤) ________

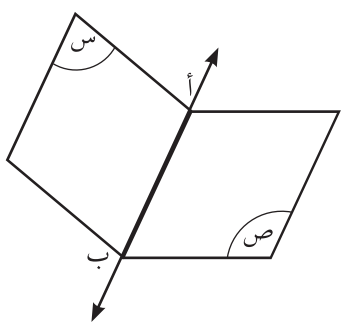
ب ٤ مستويات

١) المستوى أ ب هـ ٢) ________

٣) ________ ٤) ________



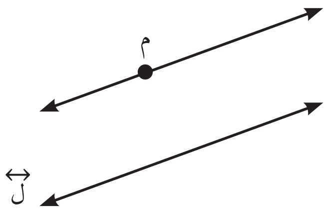
٤ **مُسلّمة ٤: إذا اشترك المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ والمستوى س في نقطتين مختلفتين، فإنّ المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ يقع بأكمله في المستوى.**



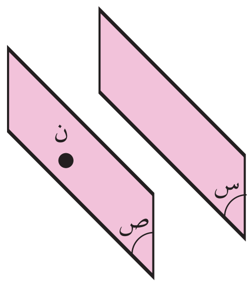
٥ **مُسلّمة ٥: إذا تقاطع مستويان مختلفان، فإنّ تقاطعهما هو خط مستقيم.**

وبالرموز س ∩ ص = $\overleftrightarrow{أ ب}$

٦ مُسلّمة ٦ : إذا وقعت نقطة خارج مستقيم معلوم فإنّه يوجد مستقيم واحد فقط يمرّ بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.



٧ مُسلّمة ٧: إذا كانت ن نقطة لا تنتمي للمستوى س فإنّه يوجد مستوى واحد فقط يمر بالنقطة ن ويوازي المستوى س.



العلاقة بين مستقيمين في الفراغ :

١ مستقيمان متوازيان: وهما مستقيمان يقعان في مستوى واحد ولا يتقاطعان.

٢ مستقيمان متقاطعان: وهما مستقيمان يقعان في مستوى واحد و يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

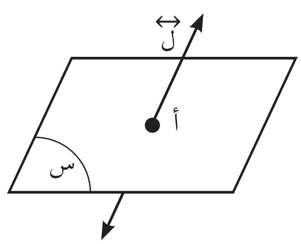
٣ مستقيمان متخالفانّ: وهما مستقيمان لا يتقاطعان ولا يقعان في نفس المستوى .

العلاقة بين مستقيم و مستوى في الفراغ

هنالك ثلاث حالات لها :

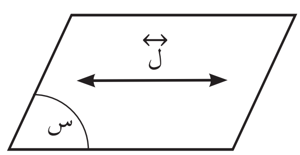
١ مستقيم يقطع مستوى في نقطة

$\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \text{س} = \{\text{أ}\}$



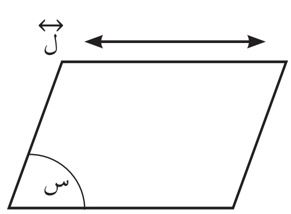
٢ مستقيم يقع بأكمله في المستوى

$\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \text{س} = \overleftrightarrow{\text{ل}}$



٣ مستقيم يوازي مستوى وهو مستقيم لا يشترك مع المستوى في أي نقطة

$\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \text{س} = \phi$



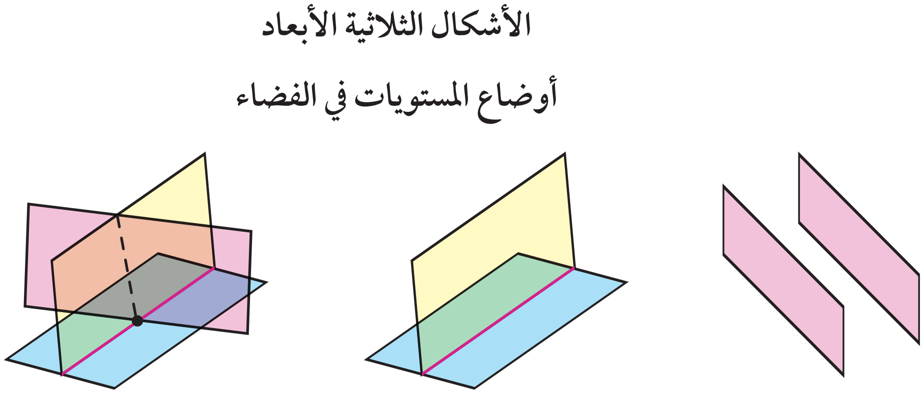
العلاقة بين المستويات في الفراغ:

يمكن للمستويات في الفراغ أن:

١ تتوازى.

٢ تتقاطع في خط مستقيم.

٣ تتقاطع في نقطة. انظر الشكل:



متقاطعة في نقطة — متقاطعان في مستقيم — متوازيان

تمارينُ و مسائلُ ١ - ٦

١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :

١ المستقيمان العموديان على مستوى واحد

أ) متوازيان ب) متقاطعان في نقطة

جـ) متخالفان د) متقاطعان في أكثر من نقطة

٢ أي نقطتين في الفراغ يمر بهما

أ) مستقيم واحد ب) مستقيمان

جـ) ٣ مستقيمات د) عدد لا نهائي من المستقيمات

٣ المستقيمان اللذان لا يتقاطعان ولا يجمعهما مستوى واحد هما

أ) متوازيان ب) متقاطعان

جـ) متخالفان د) متطابقان

٤ إذا كان المستوى س يوازي المستوى ص و كان المستقيم ل $\perp$ ص فإنّ المستقيم ل :

أ) يوازي س ب) يعامد س

جـ) يوازي ص د) يعامد مستقيم واحد فقط في س

٥ ما عدد نقاط تقاطع مستقيم يقطع مستوى ولا يقع بأكمله في المستوى ؟

أ) نقطة واحدة　　　　ب) نقطتين

جـ) ٣ نقاط　　　　د) عدد لا نهائي من النقاط

٢ أضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة و علامة (✗) أمام العبارة الخاطئة فيما يلي مع ذكر السبب في حالة العبارات الخاطئة :

١ إذا وقع مستقيمان في مستوى واحد ولم يتقاطعا فإنّهما متوازيان.

٢ يمكن رسم أكثر من مستقيم يمر بنقطة معلومة عموديا على مستوى معلوم.

٣ إذا كان س ، ص مستويين متوازيين وكان المستقيم ل $\subset$ س ، والمستقيم م $\subset$ ص فإنّ ل // م.

٤ إذا كان $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ مستقيمين في الفراغ و كان س مستوى معلوم حيث $ل_{١}$ $\perp$ س و$ل_{٢}$ $\perp$ س فإنّ $ل_{١}$ // $ل_{٢}$.

٥ أي ثلاث نقاط تعين مستوى.

٣ أذكر عدد المستويات التي يمكن أن تمر بكل مما يلي:

١ نقطة معلومة.

٢ نقطتين معلومتين.

٣ ثلاث نقاط معلومة ليست على استقامة واحدة.

أولاً: العبارة الرياضية

العبارة الرياضية : جملة خبرية (إما أن تكون صائبةً، أو خاطئةً، ولا تكون كليهما).

ولكل عبارة رياضية قيمة صواب: إما صائبة ويرمز لها بالرمز (ص) وإما خاطئة ويرمز لها بالرمز (خ).

مثال ١ : أقرأ ما يأتي، وأبيّن أيّاً منها يمثل عبارة رياضية؟

١ ياسر عرفات أول رئيس لمنظمة التحرير الفلسطينية.
٢ ما أجمل بحر غزة !
٣ الأرض تدور حول الشمس.
٤ ما ارتفاع جبل جرزيم؟
٥ زويل عالم كيمياء مصري.
٦ ١ عدد أولي.
٧ فدوى طوقان شاعرة فلسطينية.
٨ استمع لنصيحتي.

الحل :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عبارة	ليست عبارة	عبارة	ليست عبارة	عبارة	عبارة	عبارة	ليست عبارة

نشاط ١: أكتب قيم صواب العبارات الرياضية الواردة في الجدول الآتي*:

الرقم	العبارة الرياضية	قيمة الصواب
١	لُقِّب الخليفة عمر بن الخطاب رضي الله عنه بالفاروق	ص
٢	أعلى جبل في الوطن العربي هو جبل النبي شعيب في اليمن	
٣	نظم سميح القاسم قصيدة الأرض	
٤	مارك زوكربيرج مؤسس موقع فيس بوك	
٥	يقبل العدد ٢٢٥ القسمة على ٣ دون باقٍ	ص
٦	ق(٢) هو أحد أصفار الاقتران ق(س) = س^{٣} − ٨	خ

ولتسهيل التعامل مع العبارات الرياضية، فإنه بإمكاننا إعطاء العبارة الرياضية أحد الرموز الهجائية، فيمكن أن نرمز للعبارة الرياضية «النيل أطول نهر في العالم» بالرمز «ف» ونكتب ف: النيل أطول نهر في العالم.

* يمكن الحصول على بعض المعلومات بالرجوع إلى الشبكة العنكبوتية

ثانياً: نفي العبارة الرياضية

يقول الشاعر: وليس عتابُ الناسِ للمرءِ نافعاً إذا لم يكن للمرءِ لُبٌّ يعاتبه

تتعدد في اللغة العربية أدوات النفي، مثل: ليس، لا، لم وغيرها، وبهذه الأدوات يمكن أن ننفي العبارة الرياضية، فنفي العبارة الرياضية ف: النيل أطول نهر في العالم هو: النيل ليس أطول نهر في العالم، وتكتب رمزياً ~ ف: ونفي العبارة الرياضية ن: **ط** $\subseteq$ **ص**، هو ~ ن : **ط** $\nsubseteq$ **ص**.

أفكر وأناقش: ما العلاقة بين قيمة صواب العبارة الرياضية ف، وقيمة صواب نفيها؟

مثال ٢ : أنفي كل عبارة من العبارات الرياضية الآتية، دون استخدام «ليس صحيحاً أن»:

١ منير نايفة عالم ذرة فلسطيني
٢ ٩١ عدد أولي
٣ $\sqrt[٣]{١٥}$ عدد غير حقيقي
٤ ٧ أحد عوامل ٨٣
٥ ٢ $\leq$ −٧
٦ $\frac{٢}{٣} > \frac{٣}{٢}$

الحل :

العبارة الرياضية	منير نايفة عالم ذرة فلسطيني	٩١ عدد أولي	$\sqrt[٣]{١٥}$ عدد غير حقيقي	٧ أحد عوامل ٨٣	٢ $\leq$ −٧	$\frac{٢}{٣} > \frac{٣}{٢}$
نفيها	منير نايفة ليس عالم ذرة فلسطيني	٩١ عدد غير أولي	$\sqrt[٣]{١٥}$ عدد حقيقي	٧ ليس أحد عوامل ٨٣	٢ $>$ −٧	$\frac{٢}{٣} \leq \frac{٣}{٢}$

تمارين ومسائل ١-٧

١ أبيّن فيما إذا كانت الجمل الآتية تمثل عبارات رياضية أم لا؟

أ) يقع المسجد الأقصى في القدس. ب) سبسطية بلدة أثرية. جـ) ٢ ^٣^ = ٣ ^٢^

د) ٢س^٢^ + ص^٢^ = ١ تمثل معادلة دائرة. هـ) يا طلبتي الأعزاء. و) سجّل أنا عربي.

٢ أبيّن قيم الصواب لكل من العبارات الرياضية الآتية:

١ منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ متماثل حول نقطة الأصل.

٢ $\sqrt{٤٥} > \sqrt[٣]{١٣٥}$

٣ ق(س) = س^٢^ اقتران فردي.

٤ العدد ٢^١٠^ من مضاعفات العدد ٣٢

٥ الصفر عدد نسبي.

٦ المستقيم الذي معادلته س = ٢ يعامد المستقيم الذي معادلته ص = $\frac{١}{٢}$

٣ أنفي العبارات الرياضية الواردة في السؤال السابق.

١ – ٨ جداول الصواب، وأدوات الربط (Truth Tables and Connection Tools)

العبارة الرياضية المركبة: هي عبارة رياضية تتكون من عبارتين رياضيتين، أو أكثر تربط بينها أدوات ربط مثل (و) ، (أو) ، (إذا كان... فإن ...) ، (...إذا وفقط إذا ...).

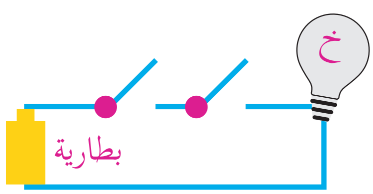
١ أداة الربط (و) (and)

يرمز لأداة الربط (و) بالرمز ∧ .

جدول الصواب للعبارة الرياضية: ف ∧ ن يمكن تمثيله بالجدول التالي:

ف	ن	ف ∧ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

أفكر وأناقش: ما أوجه الشبه بين قيم الصواب الممكنة للعبارة الرياضية ف ∧ ن
وإمكانات تشغيل الدارة الكهربائية ذي المفتاح المزدوج الممثلة بالشكل المجاور؟



نشاط ١: أكتب قيمة الصواب لكل من العبارات الرياضية المركبة الآتية في المكان المخصص، موضحاً السبب:

١ العسل مفيد لصحة الإنسان، والنحلة حشرة مفيدة للبيئة.

ألاحظ أن مركبتي العبارة صحيحتان، وأداة الربط هي (و) لذا فالعبارة المركبة صحيحة.

٢ الأسد مفترس، والحمامة جارحة ____________

٣ (٢ ∈ ح) ∧ (٢ > -٥) (خ) لأن ٢ ∈ ح صائبة ، ٢ > -٥ خاطئة ∴ ص ∧ خ هو خ

٤ ($٢^{٣}$ = ٨) ∧ $لو_{٢}$ (٨) = ٣ ____________

٥ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ = $\sqrt{٣}$) ∧ (ظا $\frac{\pi}{٤}$ = $\sqrt{٣}$) ____________

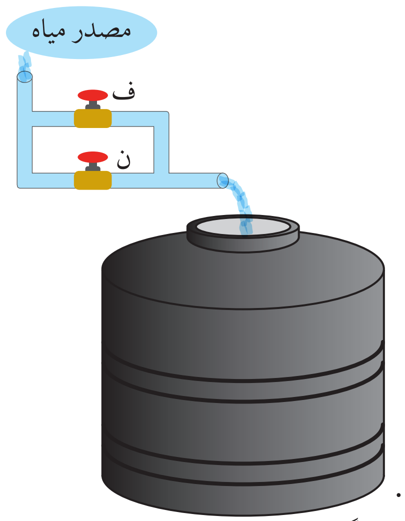
٢ أداة الربط (أو) (or)

يرمز لأداة الربط (أو) بالرمز (٧)

جدول الصواب للعبارة الرياضية: ف ٧ ن يمكن تمثيله بالجدول التالي:

ف	ن	ف ٧ ن
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

نشاط ٢: أتأمل الشكل المجاور، كيف يمكن الربط بين إمكانية تدفق الماء من مصدره، والوصول للخزان، مع أداة الربط (أو) وجدول صوابها.



١ أذكر الحالات التي سيتدفق بها الماء من المصدر وصولاً إلى الخزان.

١- المحبسان ف ، ن مفتوحان

٢- ______________ .

٣- ______________ .

٢ ما الحالة التي لن يصل بها الماء إلى الخزان؟ ____________ .

٣ أستخدم الرمز ص إذا كان المحبس مفتوحاً، خ إذا كان مغلقاً، ثم أمثل الحالات السابقة في جدول، وأقارنه بجدول الصواب الخاص بأداة الربط (أو).

مثال ١ : أوضح قيم صواب العبارات الرياضية المركبة الآتية:

١ المثلث مجسم أو الإسطوانة شكل مستوٍ.

٢ (∅ ⊃ {٠}) أو (٢ ∌ {٢٣})

٣ (مجموع قواسم العدد ١٨ < ٤٠) أو ٧ تقسم على ٢٨ دون باقٍ.

الحل : ألاحظ الجدول

رقم العبارة	المركبة الأولى ف	المركبة الثانية ن	ف ٧ ن
١	خ	خ	خ
٢	ص	ص	ص
٣	خ	خ	خ

تمارين و مسائل ١-٨

١ لتكن ف: النيون من العناصر النبيلة ، ن: الكبريت فلز

أعبر عن العبارات الرياضية الرمزية الآتية بالكلمات، وأبيّن قيمة صواب كل منها:

أ ف ∧ ~ ن   ب ~ ف ∧ ~ ن   جـ ~ ف ∨ ن

٢ أبين قيمة صواب كل من العبارات الرياضية المركبة الآتية:

أ يحدث الخسوف للشمس و يحدث الكسوف للقمر

ب م (٢ ، ٥) تحقق ص = ٢س + ١ أو ك (⁻٢ ، ⁻١) تقع في الربع الثالث في المستوى الديكارتي

جـ ($\sqrt{٢}$ ∈ ح) و (π عدد نسبي)

٣ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كانت ف عبارة رياضية صائبة ، ن خاطئة ، ما العبارة الرياضية المركبة الصائبة فيما يأتي؟

أ) ف ∧ ن   ب) ~ ف ∧ ن   جـ) ~ ف ∨ ~ ن   د) ن ∨ ~ ف

٢ ما العبارة الرياضية الصائبة فيما يأتي؟

أ) الألوان الأساسية هي: أحمر، أصفر، أزرق

ب) الألوان الثانوية هي: أحمر، أصفر، أزرق

جـ) الألوان الباردة هي: أحمر، أصفر، أزرق

د) الألوان المحايدة هي: أحمر، أصفر، أزرق.

٣ ما العبارة الرياضية **التي قيمة صوابها** (خ) فيما يأتي؟

أ) ابن الهيثم عالم بصريات و أبو قراط أبو الطب.

ب) ابن الهيثم ليس عالم بصريات أو أبو قراط أبو الطب.

جـ) ابن الهيثم عالم بصريات أو أبو قراط ليس أبا الطب.

د) ابن الهيثم ليس عالم بصريات و أبو قراط أبو الطب.

٤ ما العبارة الرياضية الصحيحة فيما يأتي؟

أ) ⁻٣ عدد غير صحيح ∨ $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي.

ب) ⁻٣ عدد غير صحيح ∨ $\sqrt{٢}$ عدد نسبي.

جـ) ⁻٣ عدد غير صحيح ∧ $\sqrt{٢}$ عدد نسبي.

د) ⁻٣ عدد غير صحيح ∧ $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي.

١ - ٩ أدوات الربط الشرطية (Conditional Connection Tools)

أولاً: أداة الربط: (إذا كان ... فإن ...) (If... then...)

تسمى أداة الربط (إذا كان... فإن ...) أداة الشرط ويرمز لها بالرمز (←)

جدول الصواب للعبارة الرياضية: ف ← ن يمكن تمثيله بالجدول التالي:

ف	ن	ف ← ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	خ	ص

ويلاحظ أن العبارة الرياضية الشرطية ف ← ن تكون خاطئة في الحالة الوحيدة، عندما تكون مقدمتها صائبة وتاليها خاطئاً .

نشاط ١: أكتب قيم صواب كل من العبارات الرياضية الآتية في المكان المخصص، وأبيّن السبب:

١ إذا كان وادي الباذان يقع في نابلس فإن سلفيت محافظة الزيتون.

وادي الباذان في نابلس عبارة صائبة،

وكذلك سلفيت محافظة الزيتون ∴ ص ← ص هو .....

٢ للمثلث متساوي الساقين محورا تماثل إذن مجموع قياسات زواياه = ١٨٠° ________ .

٣ (إذا كان الصفر حلاً للمعادلة س^{٢} = س) فإن ($٤^{-\frac{١}{٢}}$ = ٢) ________ .

الصفر حل للمعادلة س^{٢} = س صائبة، $٤^{-\frac{١}{٢}}$ = ٢ خاطئة (لماذا؟) ∴ ص ← خ هو ___ .

ثانياً: أداة الربط (... إذا وفقط إذا...) (If and only if...)

يرمز لهذه الأداة بالرمز (↔) وتسمى أداة الشرط الثنائية وتقرأ ف إذا وفقط إذا ن

جدول الصواب للعبارة الرياضية: ف ↔ ن يمكن تمثيله بالجدول التالي:

ف	ن	ف ↔ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	ص

مثال ١ : أبين قيم الصواب للعبارات الرياضية الآتية:

١ الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$ إذا وفقط إذا $\sum$ س = ن × $\overline{س}$.

٢ قطرا المستطيل متعامدان إذا وفقط إذا كانت زواياه قوائم.

٣ ٢ + ٣ > ١٠ إذا وفقط إذا كان ٥١ عدداً أولياً.

٤ $\sqrt{٤}$ = ± ٢ ↔ |−٤| = ٤

٥ الحرم الإبراهيمي في الخليل إذا وفقط إذا كانت كنيسة المهد في القدس.

الحل : ١ ، ٣ صائبتان ، ٢ ، ٤ ، ٥ خاطئة.

تمارين ومسائل ١-٩

١ لتكن ف : الوتر أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية

ن : مجموع قياسات زوايا الشكل الخماسي الداخلية = ٥٤٠°

أعبر عما يأتي بالكلمات:

١ ف ← ن ٢ ∼ ن ← ∼ ف ٣ ∼ ف ↔ ن

٢ أبين قيم الصواب لكل مما يأتي:

١ إذا كان الصفر عدداً فردياً فإن الواحد عدد أولي.

٢ إذا كان ١٠٠ أحد قوى العشرة فإما −٣ > −٢ أو [٣ , ١] = ٣

٣ إذا كان ٥ من عوامل العدد ٢٠ فإنه (٥ × ٤ = ٢٠) و (٢٠ ÷ ٥ = ٤)

٤ ٢ + −٥ = ٣ و −٨ عدد زوجي إذن ٥ × −٦ = ٣٠

٣ أصمم جدول الصواب لكل من العبارات الرياضية الآتية:

١ (ف ← ن) ∧ ∼ ف ٢ (∼ ف ∨ ن) ← (ف ∧ ∼ ن) ٣ ∼ (ف ← ن) ∧ ∼ م

تمارينُ عامّةٌ

١ أضعْ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي:

١ ما عدد المستويات التي تمر بمستقيمين متوازيين؟

أ) ١　　ب) ٢

جـ) ٠　　د) عدد لا نهائي من المستويات

٢ ما العلاقة بين المستقيمين المتخالفين؟

أ) يقعان في مستوى واحد ولا يتقاطعان.

ب) يقعان في مستوى واحد ويتقاطعان.

جـ) لا يقعان في مستوى واحد ولا يتقاطعان.

د) لا يقعان في مستوى واحد ويتقاطعان.

٣ ما المسافة بين النقطة أ(٤ ، ٣ ، ٢) والمستوى س ع ؟

أ) ٤　　ب) ٣　　جـ) ٢　　د) ١

٤ ما قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، ١) $\overleftarrow{ب}$ = (-١ ، ٢)؟

أ) ٩٠°　　ب) ٠　　جـ) ١٨٠　　د) ٤٥

٥ ما قيمة س التي تجعل المتجهين الآتيين في نفس الاتجاه؟ $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، س)　$\overleftarrow{ب}$ = (٤ ، ٦)

أ) ٠　　ب) ٣　　جـ) -٣　　د) ١

٦ إذا كانت أ(-٥ ، ٤ ، ٢) وكانت جـ(٦ ، ٣ ، ٤) تقع في منتصف $\overline{أ ب}$ ، فما إحداثيات النقطة ب؟

أ) $(\frac{١}{٢} ، \frac{٧}{٢} ، ٣)$　　ب) (٧ ، ١٠ ، ١٠)

جـ) (١٣ ، ١ ، ٤)　　د) (١٧ ، ٢ ، ٦)

٧ ما قيمة م الموجبة التي تجعل المتجهين التاليين متعامدين ؟

$\overleftarrow{أ}$ = (م ، ٣ ، -١) ، $\overleftarrow{ب}$ = (م + ١ ، -٤ ، -٣م)

أ) ٦　　ب) ٢　　جـ) ٤　　د) ٣

٨ إذا كان | $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$ | = | $\overleftarrow{أ}$ | + | $\overleftarrow{ب}$ | ، ($\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين غير صفريين) فما العبارة الصائبة؟

أ) $\overleftarrow{أ}$ و $\overleftarrow{ب}$ متعامدين　　ب) $\overleftarrow{أ}$ و $\overleftarrow{ب}$ في نفس الاتجاه

جـ) $\overleftarrow{أ}$ و $\overleftarrow{ب}$ عكس الاتجاه　　د) $\overleftarrow{أ}$ و $\overleftarrow{ب}$ متجها وحدة

٩ إذا كانت ف عبارةً رياضيةً صائبةً، ن عبارةً رياضيةً صائبةً، ما العبارة الرياضية المركبة الصائبة فيما يأتي؟

أ) ف ← ~ن   ب) ن ← ~ف   جـ) ف ∧ ~ن   د) ف ∨ ~ن

١٠ ما نفي العبارة الرياضية (٣ + ٤ ≠ ٧) ∧ (٥ ≥ ١) ؟

أ) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ ≥ ١)   ب) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ < ١)

جـ) (٣ + ٤ ≠ ٧) ∨ (٥ ≥ ١)   د) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ > ١)

١١ ما الجملة التي تمثل عبارة رياضية فيما يأتي؟

أ) عدد يقل عن س بـ ١   ب) يا عالماً بحالي   جـ) شكراً لك   د) الصفر عدد زوجي.

١٢ ما العبارة الرياضية الصائبة فيما يأتي؟

أ) -٣ ∈ ص ← ٣ عدد نسبي   ب) -٣ ∈ ص ↔ -٣ ∉ ح

جـ) -٣ ∈ ص ↔ -٣ > -٥   د) -٣ ∈ ص ∧ -٣ ∉ ح

١٣ ما نفي العبارة الرياضية (٣ + ٤ ≠ ٧) ∧ (٥ ≥ ١) ؟

أ) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ ≥ ١)   ب) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ < ١)

جـ) (٣ + ٤ ≠ ٧) ∨ (٥ ≥ ١)   د) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ > ١)

١٤ ما الجملة التي تمثل عبارة رياضية فيما يأتي؟

أ) عدد يقل عن س بـ ١   ب) يا عالماً بحالي   جـ) شكراً لك   د) الصفر عدد زوجي.

١٥ ما العبارة الرياضية الصائبة فيما يأتي؟

أ) -٣ ∈ ص ← ٣ عدد نسبي   ب) -٣ ∈ ص ↔ -٣ ∉ ح

جـ) -٣ ∈ ص ↔ -٣ > -٥   د) -٣ ∈ ص ∧ -٣ ∉ ح

٢ ما قياس الزوايا الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٠ ، -١) على الترتيب؟

٣ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (س، $\sqrt{٧٥}$) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (س ، ٠) س < ٠، أجد قيم س بحيث أن الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{\text{أ}}$ و $\overleftarrow{\text{ب}}$ تساوي ٦٠°.

٤ إذا كانت الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ تساوي ٦٠° وكان |$\overleftarrow{\text{أ}}$| = ٤ ، |$\overleftarrow{\text{ب}}$| = ١٠

أجد: أ $\overleftarrow{\text{أ}}$. $\overleftarrow{\text{ب}}$ ب |$\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$| جـ |$\overleftarrow{\text{أ}}$ - $\overleftarrow{\text{ب}}$|

ورقة عمل (١)

١ أ نقطة تقع على محور س ، ب نقطة تقع على محور ص ، جـ نقطة تقع على محور ع ، وكانت د ، هـ ، و تمثل إحداثيات المنتصف للقطع المستقيمة الثلاث $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}}$ على الترتيب بحيث إنّ د (٢، −٤ ، ٠)، هـ (٠ ، −٤ ، ٤)، ما إحداثيات النقطة و؟

٢ أجد قياس الزاوية التي يصنعها كل من المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٣، ٣) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٢$\sqrt{\text{٣}}$ ، ٢) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، ثم أجد قياس الزاوية المحصورة بينهما.

٣ إذا كان المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (م ، −٢م ، ١) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (ن ، ٢ن ، ٢) ،
أجد م ، ن علماً بأن ٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (١٩ ، −٢ ، ٨)

٤ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٦ ، ٢) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (ك ، ٣ ، م) ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (ك ، م ، ك + م) وكان $\overleftarrow{\text{أ}}$ // $\overleftarrow{\text{ب}}$
أجد:

أ ٢ |$\overleftarrow{\text{جـ}}$|^{٢} − ٤ $\overleftarrow{\text{ب}}$. $\overleftarrow{\text{ب}}$

ب (٤ $\overleftarrow{\text{ب}}$. $\overleftarrow{\text{جـ}}$) $\overleftarrow{\text{أ}}$

٥ استخدم الضرب الداخلي لإثبات نظرية فيثاغوروس.

٦ إذا كانت م: محمود درويش شاعر، ن: ناجي العلي رسام كاريكاتير، ع: عارف العارف مؤرخ
أعبر بالرموز عن العبارات الرياضية الآتية:

١ إذا كان محمود درويش شاعراً فإن ناجي العلي رسام كاريكاتير.

٢ ناجي العلي رسام كاريكاتير إذا وفقط إذا كان عارف العارف مؤرخاً.

٣ إذا كان محمود درويش شاعراً وعارف العارف مؤرخاً فإن ناجي العلي رسام كاريكاتير.

٤ إما عارف العارف مؤرخ أو محمود درويش شاعر إذن ناجي العلي رسام كاريكاتير.

نموذج اختبار

س١: أضعْ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي:

١ ما عدد المستويات التي تمر بمستقيمين متوازيين؟

أ) ١ ب) ٢

جـ) ٠ د) عدد لا نهائي من المستويات

٢ ما المسافة بين النقطة أ(٤ ، ٣ ، ٢) والمستوى س ع ؟

أ) ٤ ب) ٣ جـ) ٢ د) ١

٣ ما قيمة س التي تجعل المتجهين الآتيين في نفس الاتجاه؟ $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، س) $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٤ ، ٦)

أ) ٠ ب) ٣ جـ) -٣ د) ١

٤ اذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ (٢، ٤، ١) وكانت نقطة بداية المتجه (٠ ،١، -١) فما نقطة نهايته؟

أ) (-١، -٣، -٣) ب) (-١، -٥، -١) جـ) (١، ٥، ١) د) (١، ٣، ٣)

٥ إذا كانت ف عبارة رياضيةً صائبةً، ن عبارةً رياضيةً صائبةً، ما العبارة الرياضية المركبة الصائبة فيما يأتي؟

أ) ف ← ~ن ب) ن ← ~ف جـ) ف ∧ ~ن د) ف ∨ ~ن

٦ ما نفي العبارة الرياضية (٣ + ٤ ≠ ٧) ∧ (٥ ≥ ١) ؟

أ) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ ≥ ١) ب) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ < ١)

جـ) (٣ + ٤ ≠ ٧) ∨ (٥ ≥ ١) د) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ > ١)

س٢: أبين قيمة صواب كل من العبارات الرياضية المركبة الآتية:

أ يحدث الخسوف للشمس و يحدث الكسوف للقمر

ب م (٢ ، ٥) تحقق ص = ٢س + ١ أو ك (-٢ ، -١) تقع في الربع الثالث في المستوى الديكارتي

جـ ($\sqrt{٢}$ ∈ ح) و (π عدد نسبي)

س٣: أ) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين وكان |$\overleftarrow{\text{أ}}$| = ٦ ، |$\overleftarrow{\text{ب}}$| = ١٠ وكانت الزاوية بينهما ٦٠° أوجد |$\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$|:

ب) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = $\overleftarrow{\text{و١}}$ - $\overleftarrow{\text{و٢}}$ + $\overleftarrow{\text{٢و٣}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهاً بدايته: (٠، -٤، -٣)، ونهايته: (-١، -٦، -٢)، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ متجه ضعفي المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ وعكسه في الاتجاه، جد ما يأتي: متجه طوله ٣ وحدات باتجاه المتجه ($\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{٢جـ}}$)

س٤: حل المعادلة المتجهة: ٢$\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣$\overleftarrow{\text{ب}}$ - $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{جـ}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{و٢}}$