

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين  
وزارة التربية والتعليم

١٢

# الرياضيات

"التكنولوجي"

الفترة الأولى

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين  
وزارة التربية والتعليم



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

facebook.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف +970 2 2983280 | فاكس +970 2 2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

## المحتويات

### الإحصاء والنهيات **Statistics and Probability**

٤	Standard Score	العلامة المعيارية
٨	Standard Normal Distribution	التوزيع الطبيعي المعياري
١٥	Limit of a function	نهاية الاقتران
١٧	Limits Rules	قوانين النهايات
٢١	Limit of Multi Rules Function	نهاية الاقتران متعدد القاعدة
٢٣	Limit of afunction at Infinity $\infty$	نهاية الاقتران عندما س $\infty$ ←
٢٦	Continuity	الاتصال

يتوقع من الطلبة دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التوزيع الطبيعي وخواصه في الحياة العملية من خلال الآتي:

١. حساب العلامة المعيارية، وتفسيرها.
٢. التعرف إلى منحنى التوزيع الطبيعي المعياري، وخواصه.
٣. استخدام جدول التوزيع الطبيعي في إيجاد المساحة تحت المنحنى.
٤. توظيف خواص التوزيع الطبيعي في حل مسائل مشكلات حياتية.
٥. التعرف إلى مفهوم نهاية الاقتران عند نقطة.
٦. إيجاد نهاية الاقتران عند نقطة باستخدام الرسم البياني.
٧. إيجاد نهاية اقتران متعدد القاعدة عند نقطة.
٨. التعرف إلى نهاية الاقتران في المالانهاية باستخدام القوانين.
٩. بحث اتصال اقتران عند نقطة.

## العلامة المعيارية Standard Score

القيمة الخام: هي القيمة الأصلية التي نحصل عليها في اختبار أو مقياس ما، ويرمز لها بالرمز «س». العلامة المعيارية: هي عدد الانحرافات المعيارية التي تبعد عنها القيمة (العلامة) الخام عن الوسط الحسابي، وبالرموز

$$\text{فإن: } ع = \frac{\mu - س}{\sigma}$$

نشاط (١):



معتمداً على المعلومات الواردة في الجدول الآتي الذي يبين علامات ثلاثة طلاب في الرياضيات والتكنولوجيا. أجب عن كل مما يأتي:

التكنولوجيا	الرياضيات	
٧٠	٦٤	الوسط الحسابي
٥	١٠	الانحراف المعياري
٨٠	٨٢	بلال
٧٠	٦٤	يامن
٦٠	٦٠	كنان

تحصيل بلال أفضل في .....  
أجد العلامة المعيارية للطلاب بلال في الرياضيات والتكنولوجيا:

$$\begin{aligned} \frac{\mu - س}{\sigma} &= \text{العلامة المعيارية للرياضيات } ع_1 \\ 1,8 &= \frac{64 - 82}{10} = \\ \frac{\mu - س}{\sigma} &= \text{العلامة المعيارية للتكنولوجيا } ع_2 \\ 2 &= \frac{70 - 80}{5} = \end{aligned}$$

تحصيل بلال أفضل في التكنولوجيا؛ لأن علامته المعيارية في التكنولوجيا أكبر من علامته المعيارية في الرياضيات.

تحصيل يامن أفضل في .....

تحصيل كنان أفضل في .....

❖ **مثال (١):** مزارع فلسطيني يزرع البندورة في سهل مرج ابن عامر، كان الوسط الحسابي لكتل (٣٠٠) صندوق بندورة ١٧ كغم، وانحرافها المعياري (٢) كغم، اختيرت ٣ صناديق، وكانت كتلتها ١٣ كغم، ١٩ كغم، ١٧ كغم على الترتيب. أجد العلامة المعيارية لكتل كل من الصناديق الثلاثة.

**الحل:**  $ع = \frac{\mu - س}{\sigma}$ ، حيث  $ع$  هي العلامة المعيارية،  $س$  الكتلة الخام،  $\mu$  الوسط الحسابي للكتل،  $\sigma$  الانحراف المعياري لها.

$$- \text{العلامة المعيارية لكتلة الصندوق الأول } ع_1 = \frac{١٧ - ١٣}{٢} = ٢$$

$$- \text{العلامة المعيارية لكتلة الصندوق الثاني } ع_٢ = \frac{١٧ - ١٩}{٢} = ١$$

$$- \text{العلامة المعيارية لكتلة الصندوق الثالث } ع_٣ = \frac{١٧ - ١٧}{٢} = \text{صفر}$$

❖ **مثال (٢):** حصلت عهد على علامة ما في الرياضيات، وكانت العلامة المعيارية المقابلة لها (١,٥) علماً بأن الوسط الحسابي لعلامات طالبات صفها كان (٨٥) والانحراف المعياري (٦)، أجد علامة عهد في اختبار الرياضيات.

$$\text{الحل: } ع = \frac{\mu - س}{\sigma}$$

$$\frac{٨٥ - س}{٦} = ١,٥$$

$$\text{ومنها } ٩ = س - ٨٥$$

$$س = ٩٤$$

**نتيجة:** إذا كانت القيم الخام لمجتمع إحصائي هي  $س_١، س_٢، س_٣، \dots، س_٤$ ، وكانت العلامات المعيارية المقابلة لها هي  $ع_١، ع_٢، ع_٣، \dots، ع_٤$ ، فإن الوسط الحسابي  $\bar{ع}$  للعلامات المعيارية يساوي صفرًا، والانحراف المعياري لها  $\sigma = ١$ .

❖ **مثال (٣):** إذا كانت العلامات المعيارية المناظرة لأطوال ٥ أشجار صنوبر كالاتي:

ل ، ٠,٥ ، صفر ، ٠,٥<sup>-</sup> ، ١,٥<sup>-</sup> فما قيمة ل؟

**الحل:** ل = ٠,٥ + ٠ + ٠,٥<sup>-</sup> + ١,٥<sup>-</sup> = صفر

ل + ١,٥<sup>-</sup> = صفر

ل = ١,٥

❖ **مثال (٤):** إذا كانت علامتا طالين في امتحان التكنولوجيا ٧٠ ، ٨٨ وكانت علامتا المعياريتان المناظرتان

٠,٨<sup>-</sup> ، ١ على الترتيب، ما الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعلامات طلبة الصف في الامتحان؟

**الحل:**

$$\frac{\mu - س}{\sigma} = ع$$

$$\frac{\mu - ٧٠}{\sigma} = ٠,٨<sup>-</sup> \text{ وبالضرب التبادلي:}$$

$$\mu - ٧٠ = \sigma \cdot ٠,٨<sup>-</sup> \text{ (١) } \dots\dots\dots$$

$$\frac{\mu - ٨٨}{\sigma} = ١ \text{ وبالضرب التبادلي:}$$

$$\mu - ٨٨ = \sigma \text{ (٢) } \dots\dots\dots$$

أحل المعادلتين (١) ، (٢) بالحذف

$$\mu - ٨٨ = \sigma$$

$$\mu - ٧٠ = \sigma \cdot ٠,٨<sup>-</sup>$$

بالطرح  $١٨ = \sigma$  ومنها  $١٠ = \sigma$

وبالتعويض في إحدى المعادلتين ينتج أن  $١٠ = \mu - ٨٨$  ومنها  $٧٨ = \mu$

أي أن الوسط الحسابي  $٧٨ =$  والانحراف المعياري  $١٠ =$

## تمارين ومسائل (١-١)



**س١:** في مزرعة خراف، إذا كانت كتل (٥) خراف كالتالي ٤٠ كغم، ٥٠ كغم، ٦٠ كغم، ٧٠ كغم، ٥٥ كغم. أجد العلامات المعيارية للكتل؟

**س٢:** إذا علمت أن علامة سمير في امتحان اللغة العربية ٧٢ ، وفي التكنولوجيا ٦٩ ، وفي الرياضيات ٧٥ ، والوسط الحسابي لعلامات طلبة الصف في المواد الثلاث بالترتيب هو ٦٩ ، ٦٨ ، ٧٩ ، والانحراف المعياري ١ ، ٤ ، ٢ ، في أي المواد كان تحصيل سمير أفضل؟

**س٣:** إذا كان الوسط الحسابي لأطوال أشجار الصنوبر في محيط برك سليمان في بيت لحم ١٧ متراً والانحراف المعياري لمجموعة الأطوال يساوي ٣م، أجد الأطوال الحقيقية للأشجار التي أطوالها المعيارية ٢ ، ١,٨- .

**س٤:** إذا حولت القيم الخام لمجتمع إحصائي إلى علامات معيارية فأصبحت كالتالي:  
٥,٠ ، ٥,٠-ك، ١,٥-، ٥,٠-، ٠ ، أجد قيمة ك؟ أتأكد أن الانحراف المعياري للعلامات المعيارية يساوي ١.

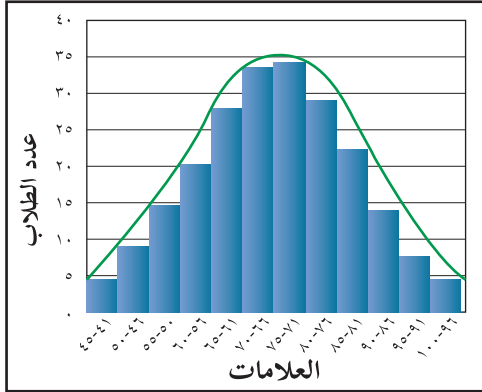
**س٥:** إذا كانت العلامات المعيارية المقابلة للقيمتين ٨٥ ، ٧٠ هي ١ ، ٢- على الترتيب. أحسب العلامة المعيارية للعلامة الخام ٧٥.

## التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Distribution

نشاط (١):



مثل المعلم حمدان علامات طلاب مدرسته في مادة الرياضيات بيانياً، كما هو في الشكل المجاور. ألاحظ أن هناك تجمعاً لعلامات الطلاب في المنتصف، كما أن شكل التمثيل البياني لتوزيع العلامات يشبه الجرس تقريباً. إن مثل هذا التوزيع يسمى توزيعاً طبيعياً.



(١) الوسط الحسابي للعلامات يقع في الفئة (٧١-٧٥)

(٢) الوسيط للعلامات يقع في الفئة .....

(٣) المنوال للعلامات هو مركز الفئة .....

أتعلم:

إذا كان الوسط = الوسيط = المنوال يكون التوزيع طبيعياً.

## التوزيع الطبيعي:

يوجد العديد من التوزيعات الاحتمالية، ومنها التوزيع الطبيعي، ويعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية في علم الإحصاء، لأنه يمثل كثيراً من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العملية، مثل: الأطوال، والكتل، والأعمار، ودرجات الحرارة، والدخل الشهري، وغيرها من الظواهر المتصلة.

### خصائص التوزيع الطبيعي:

(١) التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالوسط.

(٢) يتساوى فيه الوسط والوسيط والمنوال.

(٣) المنحنى متصل.

(٤) يقترب المنحنى من المحور س، ولكنه لا يمسه.

وسنركز في دراستنا هذه على التوزيع الطبيعي المعياري.

التوزيع الطبيعي المعياري: إذا كانت  $s_1$ ،  $s_2$ ، ...،  $s_n$  علامات خام تتبع التوزيع الطبيعي، فإن العلامات المعيارية المقابلة لها هي  $z_1$ ،  $z_2$ ، ...،  $z_n$ ، عر تتبع توزيعاً طبيعياً يسمى التوزيع الطبيعي المعياري، ويكون فيه الوسط الحسابي يساوي صفراً، والانحراف المعياري يساوي (1).

### جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري:

المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعي المعياري تساوي وحدة مساحة واحدة، وقد وضع العلماء جداول خاصة تبين نسبة المساحة تحت المنحنى والمحدودة بقيمة معينة من العلامات المعيارية. سنعتمد الجداول الملحقة في نهاية الكتاب والتي تعطي المساحة المحصورة تحت  $z$  حيث  $z$  عدد حقيقي.

❖ **مثال (1):** باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد كلاً من:

(أ) نسبة المساحة تحت ( $z = 1.17$ ).

(ب) نسبة المساحة فوق ( $z = 1.2$ ).

(ج) نسبة المساحة تحت ( $z = -1$ ).

(د) نسبة المساحة فوق ( $z = -0.5$ ).

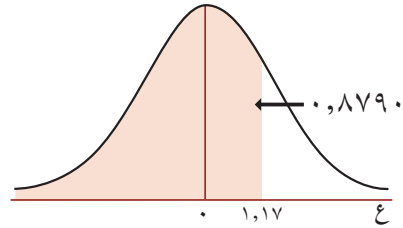
(هـ) نسبة المساحة المحصورة بين ( $z = -0.8$  و  $z = 0.15$ ).

ع	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

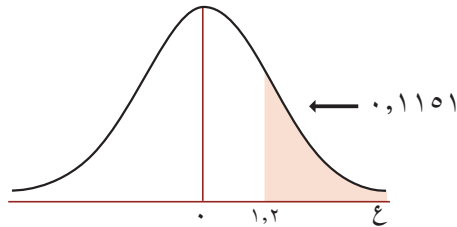


الحل:

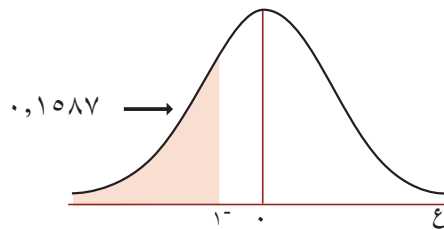
أ) نسبة المساحة تحت  $(ع = 1,17)$   $= 0,8790$ . ويتم إيجادها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وتحدد من تقاطع الصف  $1,1$  ومن العمود  $0,07$ ، حيث أن تقاطع العمود مع الصف يمثل قيمة المساحة. ألاحظ الشكل:



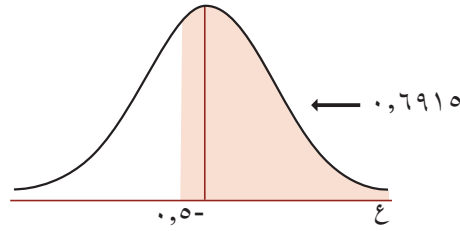
ب) نسبة المساحة فوق  $(ع = 1,2) = 1 -$  المساحة تحت  $(ع = 1,2) = 0,8849 - 1 = 0,1151$ . ألاحظ الشكل:



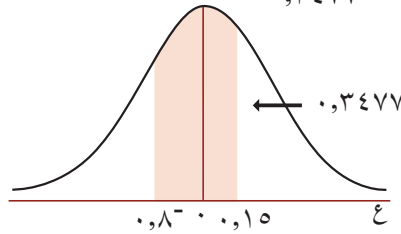
ج) نسبة المساحة تحت  $(ع = 1^-) = 0,1087$ . مباشرة من الجدول، ألاحظ الشكل:



(د) نسبة المساحة فوق (ع = ٠,٥-) = ١ - (المساحة تحت ع = ٠,٥-) = ٠,٦٩١٥ = ٠,٣٠٨٥ - ١ = ألاحظ الشكل:



(هـ) نسبة المساحة المحصورة بين (ع = ٠,٨-) و (ع = ٠,١٥-) = المساحة تحت (ع = ٠,١٥-) - المساحة تحت (ع = ٠,٨-) = ٠,٣٤٧٧ = ٠,٢١١٩ - ٠,٥٥٩٦ =

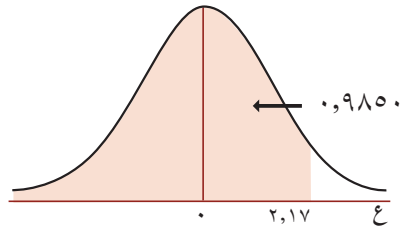


مثال (٢): أجد قيمة ع في كل مما يأتي:

(أ) نسبة المساحة تحتها تساوي ٠,٩٨٥٠

(ب) نسبة المساحة فوقها تساوي ٠,٦٦٢٨

**الحل:** (أ) نسبة المساحة تحت ع = ٠,٩٨٥٠ ، أبحث في الجدول عن المساحة ٠,٩٨٥٠ ، جد أنها تقع عند تقاطع صف ع = ٢,١ وعمود ٠,٠٧ ، ومنها ع = ٢,١٧ ، ألاحظ الشكل الآتي:

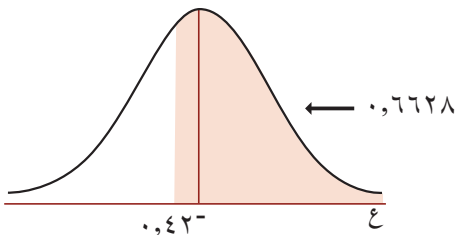


(ب) نسبة المساحة فوق ع = ٠,٦٦٢٨ = ١ - المساحة تحت ع

نسبة المساحة تحت ع = ٠,٦٦٢٨ - ١ =

٠,٣٣٧٢ =

من الجدول ع = ٠,٤٢- ألاحظ الشكل المجاور:



❖ **مثال (٣):** الوسط الحسابي لأعمار المصاييح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع هو ١٢٠٠ ساعة بانحراف معياري مقداره ٣٠٠ ساعة، فإذا كانت هذه الأعمار تتبع التوزيع الطبيعي واختير أحد المصاييح عشوائياً، فما النسبة المئوية لأن يبقى المصباح الكهربائي صالحاً لمدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة.

**الحل:** نسبة أن يبقى المصباح صالحاً لمدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة = المساحة فوق (ع)  $\mu = 1200$

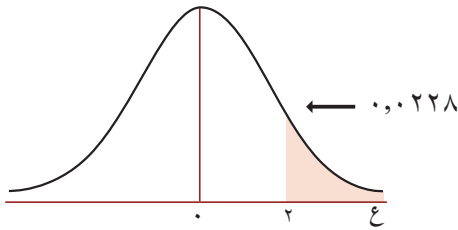
$$z = \frac{1200 - 1800}{300} = \frac{\mu - \text{س}}{\sigma} = \frac{\text{ع}}{1800 = \text{س}}$$

المساحة = المساحة فوق (ع = ٢)

١ - المساحة تحت (ع = ٢) =

$$0,0228 = 0,9772 - 1 =$$

النسبة المئوية المطلوبة =  $100\% \times 0,0228 = 2,28\%$



❖ **مثال (٤):** الوسط الحسابي لكتل ١٠٠٠ شخص يساوي ٦٥ كغم، والانحراف المعياري للكتل ١٠ كغم، فإذا كانت الكتل تتبع التوزيع الطبيعي، فما نسبة الأشخاص الذين تقع كتلتهم بين ٦٥ كغم و٩٥ كغم؟ وما عددهم؟

**الحل:** نسبة الأشخاص الذين كتلتهم بين ٦٥ كغم، ٩٥ كغم =

نسبة المساحة المظللة في الشكل المقابل.

أحول القيمة الخام ٩٥ إلى علامة معيارية

$$z = \frac{65 - 95}{10} = \frac{\mu - \text{س}}{\sigma} = \frac{\text{ع}}{95 = \text{س}}$$

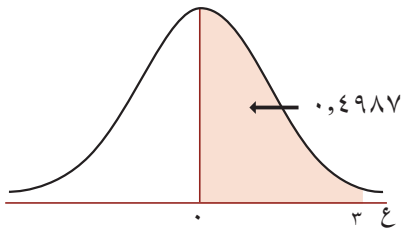
نسبة الأشخاص = المساحة بين (ع = صفر، و ع = ٣) لماذا؟

= المساحة تحت (ع = ٣) - ٠,٥ لماذا؟

$$0,5 - 0,9987 =$$

$$0,4987 =$$

عدد هؤلاء الأشخاص =  $1000 \times 0,4987 \approx 499$  شخصاً.



## تمارين ومسائل (١ - ٢)



**س١:** أجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري في كل من الحالات الآتية:

(أ) تحت (ع = ١,٣٨)

(ب) فوق (ع = ٠,٩٠)

(ج) بين (ع = ١,٥<sup>-</sup>) و (ع = ١,٥)

**س٢:** أجد العلامة المعيارية (ع) في كل من الحالات الآتية:

(أ) المساحة تحت ع هي ٠,٨٥٥٤

(ب) المساحة فوق ع هي ٠,٧٧٣٤

(ج) المساحة بين ع<sup>-</sup> و ع هي ٠,٦

**س٣:** إذا كانت أطوال طلبة مدرسة ثانوية فيها ٥٠٠ طالب، أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ١٦٥ سم، وانحراف معياري ١٠ سم، ما نسبة الطلبة الذين تنحصر أطوالهم بين ١٥٠ سم ، ١٨٠ سم؟ وما عددهم؟

**س٤:** إذا كانت علامات ٦٠٠ طالب تتخذ توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ٧٢ وانحراف معياري ٨ وكانت علامة النجاح هي ٦٠، أجد:  
(أ) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع علاماتهم بين ٦٢، ٧٨.  
(ب) عدد الطلبة الراسبين.

**س٥:** تتبع رواتب ١٠٠٠ موظف في إحدى الشركات توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ٧٠٠ دينار، وانحراف معياري ٢٠ ديناراً. أحسب عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين ٦٨٠ ديناراً و ٧٤٠ ديناراً.

## ورقة عمل

س١: إذا كانت العلامتان المعياريّتان المناظرتان للعلامتين ٧١ ، ٥٣ هما ٢ ، ١- على الترتيب، أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات الخام لطلبة الصف.

س٢: خط إنتاج في مصنع ينتج أكياساً من الأرز بوسط حسابي يساوي ١,٠١ كغم، وانحراف معياري يساوي ٠,٠٢ كغم. أجد:

(أ) نسبة الأكياس التي كتلتها أقل من ١,٠٣ كغم.

(ب) نسبة الأكياس التي تتراوح كتلتها بين ١ كغم و ١,٠٥ كغم.

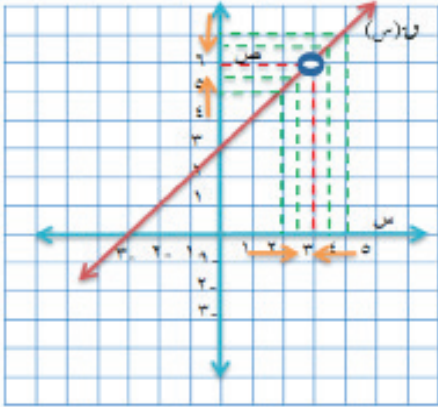
## نهاية الاقتران : Limit of a function

**تعريف:** نهاية الاقتران ق(س) عند نقطة:

- كلما اقتربت قيم س من العدد  $l$  من جهة اليمين اقتربت قيم  $ق(س)$  المقابلة لها من عدد حقيقي معين (ل) يعبر عنها بالصورة **نهاية (س) ل** =  $ل$  .  
 $س \leftarrow l^+$

- كلما اقتربت قيم س من العدد  $l$  من جهة اليسار اقتربت قيم  $ق(س)$  المقابلة لها من عدد حقيقي معين (ل) يعبر عنها بالصورة **نهاية (س) ل** =  $ل$  .  
 $س \leftarrow l^-$

- إذا كانت **نهاية (س) ل** = **نهاية (س) ل** =  $ل$  فإن **نهاية (س) ل** موجودة ويكون **نهاية (س) ل** =  $ل$  .  
 $س \leftarrow l^+$        $س \leftarrow l^-$



**مثال (١):** الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران:

$$ق(س) = \frac{س - ٣}{س - ٣} ، س \neq ٣ \text{ أجد ما يأتي:}$$

(١)  $ق(٣)$  (إن وجدت)

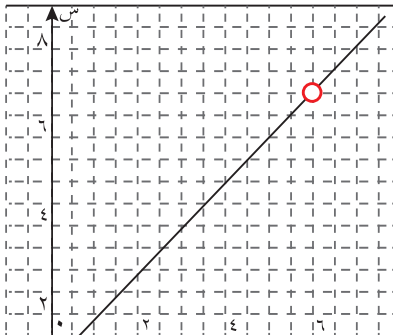
(٢) نهاية  $ق(س)$  عندما تقترب س من العدد ٣ (إن وجدت)

**الحل:** بملاحظة الشكل، أجد أن:

(١)  $ق(س)$  غير معرف عندما  $س = ٣$

(٢) **نهاية (س) ل** =  $٦$  وكذلك **نهاية (س) ل** =  $٦$  أي أن **نهاية (س) ل** =  $٦$  .  
 $س \leftarrow ٣^+$        $س \leftarrow ٣^-$

**أفكر وأناقش:** هل توجد علاقة بين وجود النهاية عندما تقترب س من س<sub>٠</sub> ووجود صورة س<sub>٠</sub> في الاقتران؟



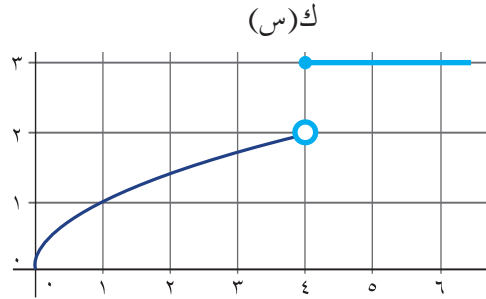
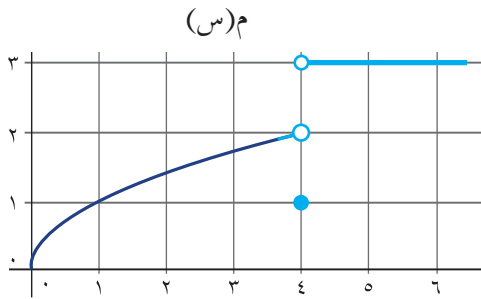
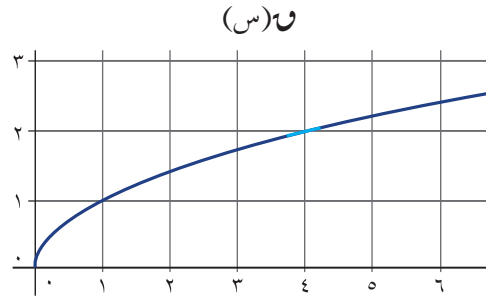
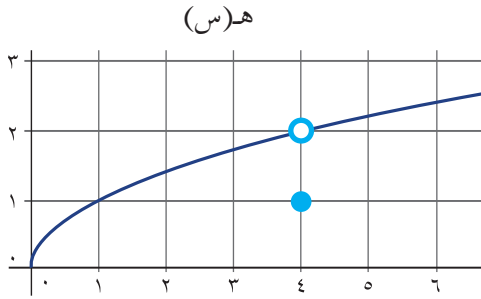
**نشاط (١):**

يوضح الشكل المجاور منحنى  $ق(س) = \frac{س - ٥}{س - ٦} ، س \neq ٦$

$ق(س) = \frac{(س - ٦) (١ + س)}{(س - ٦)} = ١ + س ، س \neq ٦$



س١: بالاعتماد على منحنيات الاقترانات الآتية: و(س) ، هـ(س) ، ك(س) ، م(س) أجد ما يأتي:



..... = هـ(٤) هـ

..... = و(٤) و  
س ← ٤

..... = م(٤) م

..... = ح(٤) ح  
س ← ٤

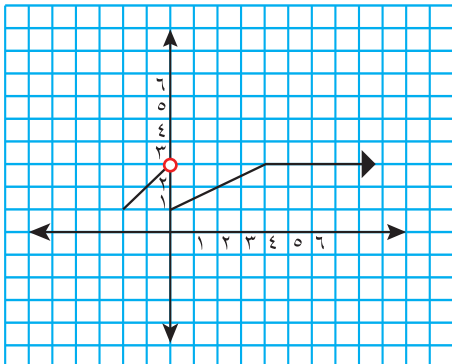
..... = و(٤) و

..... = ك(٤) ك  
س ← ٤

..... = هـ(٤) هـ

..... = م(٤) م  
س ← ٤

س٢: أعمد الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران و(س) لإيجاد:



..... = و(٤) و  
س ← ٤

..... = ك(٤) ك  
س ← ٤

..... = م(٤) م  
س ← ٤

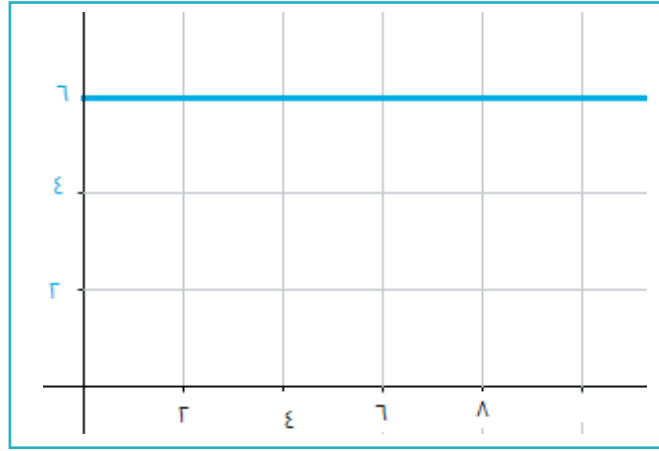
..... = هـ(٤) هـ  
س ← ٤

## قوانين النهايات Limits Rules

نشاط (١):



تعتبر البطاريات "الأعمدة الجافة" مصدراً من مصادر الطاقة الكهربائية، حيث تقوم بتزويد الدارة بالطاقة عن طريق المفتاح الكهربائي، عندما يكون المفتاح مغلقاً، ويسمى التيار الذي يسري في الدارة المغلقة تياراً مستمراً DC "Direct Current" وتبقى قيمة هذا النوع من التيار واتجاهه ثابتين مع مرور الزمن، فإذا استخدم طالب بطارية ذات مصدر جهد ثابت مقداره ٦ فولت، فإنه يمكن تمثيل الجهد مع مرور الزمن بالشكل المجاور:



...	...	١,٩٩	→ ١,٩٩٩	٢	← ٢,٠٠١	٢,٠١	...	...	الزمن
...	...	٦	...	...	...	...	٦	...	الجهد

الجهد عندما يقترب الزمن من ثابنتين هو ٦  
 الجهد عندما يقترب الزمن من ٣ ثوانٍ هو ٦  
 الجهد عندما يقترب الزمن من ٤ ثوانٍ هو .....  
 الجهد عندما يقترب الزمن من ٨ ثانية هو .....  
 يمكن تمثيل الجهد بالاقتران  $t(n) = \dots$

استخدم الجدول في إيجاد نهايات  $t(n)$





- قاعدة (١): إذا كان  $u$  (س) =  $ج$  فإن  $نهاية$  (س) =  $ج$  حيث  $ل$ ،  $ج \in \mathcal{C}$

- قاعدة (٢): إذا كانت  $نهاية$  (س) =  $ل$ ،  $نهاية$  (س) =  $ك$  وكان  $ك$ ،  $ل$ ،  $ج$  أعداداً حقيقية، فإن:

$$(١) \quad نهاية (س) \pm نهاية (هـ) = نهاية (س) \pm نهاية (هـ) = ل \pm ك$$

$$(٢) \quad نهاية (س) \cdot نهاية (ج) = نهاية (س) \cdot ج = ل \cdot ك$$

$$(٣) \quad نهاية (س) \cdot نهاية (هـ) = نهاية (س) \cdot نهاية (هـ) = ل \cdot ك$$

$$(٤) \quad نهاية (س) = \frac{نهاية (س)}{نهاية (هـ)} = \frac{نهاية (س)}{ك} \neq ٠، \quad \frac{ل}{ك}$$

$$(٥) \quad نهاية (س) = نهاية (نهاية (س)) = نهاية (ل) = \mathcal{C} \text{، } \mathcal{C} \neq \mathcal{P}$$

مثال (١): إذا كان  $نهاية$  (س) =  $٤$ ،  $نهاية$  (س) =  $٣$

$$(١) \quad نهاية (س) + نهاية (هـ) = نهاية (س) + نهاية (هـ) = ٣ + ٤ = ٧$$

$$(٢) \quad نهاية (س) - نهاية (هـ) = نهاية (س) - نهاية (هـ) = ٣ - ٤ = -١$$

$$(٣) \quad نهاية (س) \cdot نهاية (هـ) = نهاية (س) \cdot نهاية (هـ) = ٣ \cdot ٤ = ١٢$$

$$(٤) \quad نهاية (س) = \frac{نهاية (س)}{نهاية (هـ)} = \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣}$$

$$(٥) \quad نهاية (س) = نهاية (نهاية (س)) = نهاية (٤) = ١٦$$

أذكر: اقتران كثير الحدود هو اقتران يكون على الصورة:

$$u(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{، حيث } \mathcal{C} \ni a_i$$



$$\text{ب) هنا (س)} = \frac{\text{س}^2 - 25}{\text{س}^2 - 5\text{س}}$$

بالتعويض المباشر ينتج ÷ وهي كمية غير معينة، لذا نلجأ للتحليل ثم الاختصار ثم التعويض.

$$\text{هنا} = \frac{(\text{س} - 5)(\text{س} + 5)}{\text{س}(\text{س} - 5)}$$

$$\text{هنا} = \frac{(\text{س} + 5)}{\text{س}}$$

..... =

نشاط (٣):

$$\text{جد هنا} = \frac{\text{س}^2 - 4}{\text{س}^2 - 2}$$

عند التعويض المباشر، نحصل على:  $\frac{4 - 4}{2 - 2}$  وهي كمية غير معينة.

$$\text{هنا} = \frac{\text{س}^2 - 4}{\text{س}^2 - 2} = \frac{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)} = \frac{\text{س} + 2}{\text{س} + 2} = \dots\dots\dots$$

نشاط (٤):

$$\text{جد هنا} = \frac{\text{س}^3 + 27}{(\text{س} + 3)^3}$$

عند التعويض المباشر نحصل على .....

$$\text{هنا} = \frac{\text{س}^3 + 27}{(\text{س} + 3)^3} = \dots\dots\dots$$



س١: إذا كان نهايا (س) =  $2^-$  ، نهايا (س) =  $3$  . أجد النهايات الآتية:

أ) نهايا  $(2^2 + (س)^2 - (س) - (س)^2)$

ب) نهايا  $\frac{5(س)}{2(س)^2 + (س)^2 + (س)}$

ج) نهايا  $(4(س) + (س)^2 + 3 - 2(س)^2)$

س٢: جد النهايات الآتية:

أ) نهايا  $\frac{3(س)^2 - 12(س)}{16 - 2(س)^2}$

ب) نهايا  $\frac{1 - 3(س)}{1 - 2(س)}$

ج) نهايا  $\frac{5 - 2(س)}{5(س) - 5}$

س٣: إذا كان نهايا  $\frac{9 - 2(س)^2}{3 - (س)^2} = 24$  فما قيمة الثابت  $\mu$  .

س٤: إذا كان نهايا (س) =  $\frac{2(س)^2 - 2(س)}{8 - 2(س) + 2(س)}$  ،  $2 \neq (س)$  ،  $4 \neq (س)$  ، أجد نهايا (س).

## نهاية الاقتران متعدد القاعدة: Limit of Multi Rules Function

قاعدة:



إذا كان  $l$  (س) اقتراناً متعدد القاعدة، ويُغير من قاعدته عند  $s = l$ ، وكانت  $\lim_{s \rightarrow l^+} f(s) = \lim_{s \rightarrow l^-} f(s) = l$ ، فإن  $f(s)$  موجودة وتساوي  $l$ .

مثال (١): إذا كان  $l$  (س) =  $\left. \begin{array}{l} 1+s^2, \quad s < 2 \\ 1+s^2, \quad s \geq 2 \end{array} \right\}$  ، جد:

(١) نهاية (س)  $\lim_{s \rightarrow 4^-} f(s)$       (٢) نهاية (س)  $\lim_{s \rightarrow 1^-} f(s)$       (٣) نهاية (س)  $\lim_{s \rightarrow 2^+} f(s)$       (٤) نهاية (س)  $\lim_{s \rightarrow 2^-} f(s)$       (٥) نهاية (س)  $\lim_{s \rightarrow 2} f(s)$

الحل: (١) نهاية (س)  $\lim_{s \rightarrow 4^-} f(s) = \lim_{s \rightarrow 4^-} (1+s^2) = 17$

(٢) نهاية (س)  $\lim_{s \rightarrow 1^-} f(s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} (1+s^2) = 2$

(٣) نهاية (س)  $\lim_{s \rightarrow 2^+} f(s) = \lim_{s \rightarrow 2^+} (1+s^2) = 5$

(٤) نهاية (س)  $\lim_{s \rightarrow 2^-} f(s) = \lim_{s \rightarrow 2^-} (1+s^2) = 5$

(٥) نهاية (س)  $\lim_{s \rightarrow 2} f(s) = 5$

مثال (٢):

إذا كان  $l$  (س) =  $\left. \begin{array}{l} \frac{s^2 + 5s - 4}{s - 4}, \quad s \neq 4 \\ 1, \quad s = 4 \end{array} \right\}$  فإن

(١) نهاية (س)  $\lim_{s \rightarrow 4^-} f(s) = \lim_{s \rightarrow 4^-} \frac{s^2 + 5s - 4}{s - 4} = \lim_{s \rightarrow 4^-} \frac{(s-4)(s+9)}{s-4} = \lim_{s \rightarrow 4^-} (s+9) = 13$

$\lim_{s \rightarrow 4^-} (s+9) = 13$

$13 =$

(ماذا تلاحظ؟)

(٢)  $\lim_{s \rightarrow 4} f(s) = 13$



س١: إذا كان  $Q$  (س) =  $\left. \begin{array}{l} \text{س} > ٠, \text{س} - ٢ \\ \text{س} \leq ٠, \text{س} - ٢ \end{array} \right\}$  ، أجد  $\text{نهاي}(\text{س})$  ،  $\text{نهاي}(\text{س})$  ،  $\text{نهاي}(\text{س})$  ، إن وُجدت.

س٢: إذا كان  $Q$  (س) =  $\left. \begin{array}{l} \text{س} \geq ١, \text{س} - ٩ \\ \text{س} < ١, \frac{\text{س} - ١}{١ - \text{س}} \end{array} \right\}$  ، أجد قيمة  $P$  إذا علمت أن  $\text{نهاي}(\text{س})$  موجودة.

س٣: إذا كان  $Q$  (س) =  $\left. \begin{array}{l} \text{س} \neq ٤, \frac{\text{س} - ١٦}{٤ + \text{س}} \\ \text{س} = ٤, \text{ب} \end{array} \right\}$  ، أجد قيمة  $b$  إذا علمت أن  $\text{نهاي}(\text{س}) = Q(٤^-)$ .

س٤: إذا علمت أن  $\text{نهاي}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - P}$  ،  $\text{نهاي}(\text{س} + ٥)$  ،  $\text{س} \neq P$  ، أجد قيمة/قيم  $P$ .

س٥: إذا كان  $Q$  (س) =  $\left. \begin{array}{l} \text{س} \geq ١, \text{س} + ٢ \\ \text{س} < ١, \text{س} - ١ \end{array} \right\}$  ، أجد  $\text{نهاي}(\text{س})$  ،  $\text{نهاي}(\text{س})$  ،  $\text{نهاي}(\text{س})$ .

## نهاية الاقتران عندما $s \leftarrow \infty$ Limit of afunction at Infinity $\infty$

### قاعدة (١):



إذا كان  $p$ ،  $q$  عددين حقيقيين،  $n$  عدداً صحيحاً موجباً، فإن:

(١) نهاية  $ج = ج$   $s \leftarrow \infty$

(٢) نهاية  $\frac{p}{s} = ٠$   $s \leftarrow \infty$

(٣) نهاية  $s^n = \infty$   $s \leftarrow \infty$

### قاعدة (٢):



الصور غير المعينة:  $\frac{\infty}{\infty}$ ،  $\infty - \infty$ ،  $\infty \times \infty$

$\infty \pm ج = \infty$ ،  $ج$  عدد حقيقي.

$\infty^\pm \pm ج = \infty^\pm$ ،  $ج$  عدد حقيقي.

$\infty \times ج = ج \times \infty = \infty$ ،  $ج$  عدد حقيقي موجب.

$\infty^- \times ج = ج \times \infty^- = \infty^-$ ،  $ج$  عدد حقيقي سالب.

**مثال (١):** أجد نهاية  $(١ + ٥س - ٣س^٢)$   $s \leftarrow \infty$

**الحل:**

نهاية  $(١ + ٥س - ٣س^٢)$   $s \leftarrow \infty$

$=$  نهاية  $(١ + \frac{٥}{س} - ٣س^٢)$   $s \leftarrow \infty$  (لماذا؟)

$=$  نهاية  $(\frac{١}{س} + \frac{٥}{س} - ٣س^٢)$   $s \leftarrow \infty$

$= \infty$

مثال (٢): أجد نهايا  $\left( \frac{٥س - ٢س^٢ + ١}{٢س^٢ + ٣} \right)_{س \rightarrow \infty}$

الحل:

$$\left( \frac{٥س - ٢س^٢ + ١}{٢س^٢ + ٣} \right)_{س \rightarrow \infty}$$

(لماذا؟)  $= \frac{\left( \frac{١}{س} + ٢ - \frac{٥}{س} \right)_{س \rightarrow \infty}}{\left( \frac{٢}{س} + ٣ \right)_{س \rightarrow \infty}}$

(لماذا؟)  $= \frac{٢^-}{٣}$

مثال (٣): أجد نهايا  $\left( \frac{١ + ٥س}{س^٢ + ٤} \right)_{س \rightarrow \infty}$

الحل:  $\left( \frac{١ + ٥س}{س^٢ + ٤} \right)_{س \rightarrow \infty}$

$$= \frac{\left( \frac{١}{س} + ٥ \right)_{س \rightarrow \infty}}{\left( \frac{٤}{س^٢} + ١ \right)_{س \rightarrow \infty}}$$

= صفر (لماذا؟)

ملاحظة:



إذا كان  $٧$ ،  $م \exists ط$ ،  $٧ \neq ٠$ ،  $بم \neq ٠$  فإن نهايا  $\frac{٧س^٧ + ٧س^٦ + \dots + ٧}{بم^٧ + ب١س^٦ + \dots + ب}$

١.  $\frac{٧}{بم}$  إذا كان  $٧ = م$

٢. صفر إذا كان  $٧ > م$

٣.  $\infty \pm$  إذا كان  $٧ < م$

تمارين ومسائل (٤-٢)



س١: أجد كلاً من النهايات الآتية:

أ)  $\lim_{s \rightarrow \infty} (s^5 - 2)$

ب)  $\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{8s^3 - 1 + s^2 + 4}{s^0 + 3 + s^4 + 1} \right)$

ج)  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s+3)(2+s)}{(3+s)(1+s)}$

س٢: إذا كان  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^5 + 1}{1 + 3s^2} = \frac{1}{3}$  جد قيمة  $h$ .

س٣: إذا علمت أن  $\lim_{s \rightarrow \infty} (s^3 + 3) = h$  ، وأن  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{4s^2 - 2s + 1}{s - 3} = k$  ، وكان  $\lim_{s \rightarrow \infty} (ks) = h$  ، جد قيمة  $h$ .

س٤: أجد كلاً من النهايات الآتية:

أ)  $\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{s^2}{1+s} - \frac{s^5}{1-s} \right)$

ب)  $\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{s^0 - 3s + 2}{s^2 + 6} \right)$



## الاتصال Continuity



**تعريف:** الاتصال عند نقطة

يكون الاقتران  $u$  (س) متصلاً عند  $s = p$  ، إذا تحققت الشروط الآتية:

١.  $u(p)$  موجودة ومعرفة كعدد حقيقي.

٢. نهاية  $u$  (س) موجودة.  
 $s \leftarrow p$

٣. نهاية  $u$  (س) =  $u(p)$ .  
 $s \leftarrow p$

نشاط (١):



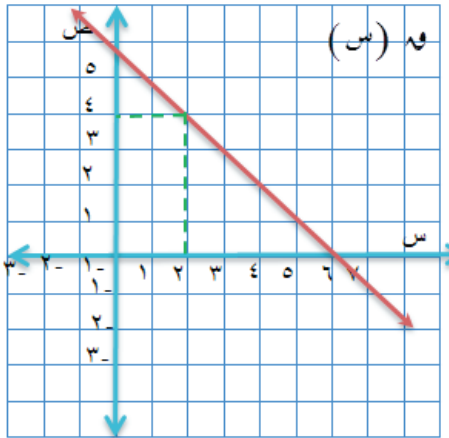
في الشكل المجاور:

$$u(2) = 4$$

$$\text{نهاية } u \text{ (س)} = 4.  
s \leftarrow 2$$

$$u(2) = \text{نهاية } u \text{ (س)} = 4.  
s \leftarrow 2$$

نلاحظ أن الشكل يمثل منحنى الاقتران كثير الحدود  $v = 6 - s$  وهو متصل دائماً.





الاقترانات كثيرة الحدود هي اقترانات متصلة في مجالها.

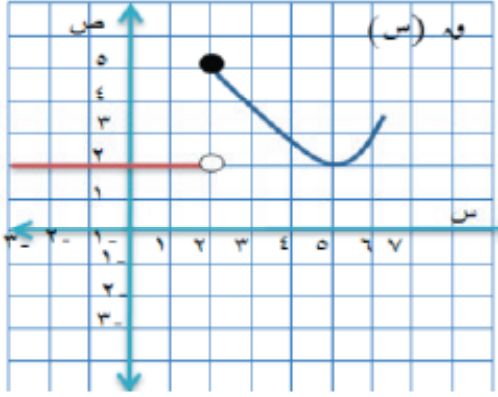
نشاط (٢):



في الشكل المجاور:

هل  $f(2) = \dots$ ،  $f(2) = \dots$  لأن  $\dots$

هل  $f(2)$  متصل عند  $s = 2$ ؟



نشاط (٣):



إذا كان  $f(3) = 1 + s$ ،  $f(s) = s^2$ .

يكون الاقتران  $f(س)$  متصلاً عند  $s = 2$  لأنه اقتران كثير حدود.

يكون الاقتران  $هـ(س)$  متصلاً عند  $s = 2$  لأن  $\dots$

$(س + هـ)$  متصل عند  $s = 2$  لأن مجموع اقترانين كثيري حدود يساوي اقتراناً كثير حدود.

$(س - هـ)$  متصل عند  $s = 2$  لأن  $\dots$

$(س \times هـ)$  متصل عند  $s = 2$  لأن  $\dots$

**ناقش:** هل  $\left(\frac{هـ}{س}\right)$  متصل عند  $s = 2$ ، حيث  $هـ(س) \neq 0$ .



إذا كان  $U$  (س)، هـ (س) اقترانين متصلين عند  $s = P$  فإن:

١.  $(U \pm H)$  (س) يكون متصلاً عند  $s = P$ .
٢.  $(U \times H)$  (س) يكون متصلاً عند  $s = P$ .
٣.  $(\frac{U}{H})$  (س) يكون متصلاً عند  $s = P$ ، حيث  $H(P) \neq 0$ .

مثال (٢): إذا كان  $U$  (س) =  $\left. \begin{array}{l} 2s^2 - 2, \text{ س} > 0 \\ 2 - s, \text{ س} \leq 0 \end{array} \right\}$  ، ابحث اتصال الاقتران  $U$  (س) عند  $s = 0$  .

الحل: أبحث شروط الاتصال عند  $s = 0$  لأن الاقتران  $U$  (س) يغير قاعدته عندها.

$$(1) \quad U(0) = 2 - 0 = 2 \neq 0$$

$$(2) \quad \text{نهاى (س)} = 2 \neq 0 \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\text{نهاى (س)} = 2 \neq 0 \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\text{نهاى (س)} = 2 \neq 0 \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\therefore \text{نهاى (س)} = 2 \neq 0$$

$$(3) \quad U(0) = 2 - 0 = 2 \neq 0$$

مثال (٣): إذا كان  $U$  (س) =  $\left. \begin{array}{l} \frac{1 - 2s}{1 - s}, \text{ س} \neq 1 \\ 4, \text{ س} = 1 \end{array} \right\}$  ، ابحث اتصال الاقتران  $U$  (س) عند  $s = 1$  .

ابحث اتصال الاقتران  $U$  (س) عند  $s = 1$  .

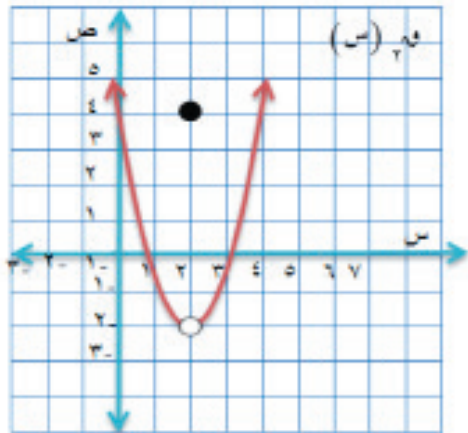
الحل:

$$(1) \quad U(1) = 4 \neq 0 \quad (2) \quad \text{نهاى (س)} = 2 \neq 0 \quad (\text{لماذا؟}) \quad (3) \quad \text{نهاى (س)} \neq 0 \quad (1) \neq 0$$

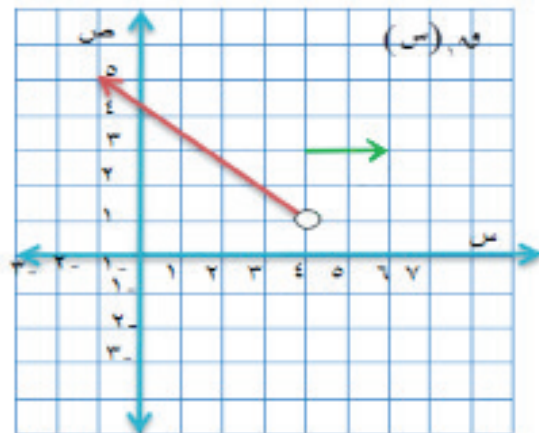
$\therefore U$  (س) غير متصل عند  $s = 1$  .



س١: أبين سبب عدم اتصال الاقترانات الآتية، عند النقطة المبينة إزاء كل منها.



عند  $s = 2$



عند  $s = 4$

س٢: ابحث اتصال الاقترانات الآتية، عند قيم س المشار إليها في كل حالة مما يأتي:

أ)  $f(s) = 3s - 6$  عند  $s = 1$ .

ب)  $f(s) = \begin{cases} s^2 - 2s, & s \neq 2 \\ 7, & s = 2 \end{cases}$  عند  $s = 2$

س٣: إذا كان  $f(s) = \begin{cases} s - 3, & s > 1 \\ s^2 + 1, & s \leq 1 \end{cases}$  ابحث اتصال الاقتران  $f(s)$ ، عند  $s = 1$ .

س٤: إذا كان  $f(s) = \begin{cases} s^2 - 4, & s \geq 2 \\ s^3 - 5, & s < 2 \end{cases}$  متصلاً عند  $s = 2$ ، أجد قيمة الثابت  $p$ .

## ورقة عمل

$$\left. \begin{array}{l} ١^- > س ، \quad ١ + س٧^- \\ ١^- \leq س ، \quad ٢ + س٣^٢ \end{array} \right\} = \text{س١: إذا كان } (س) =$$

متصلاً عند س = ١<sup>-</sup> ، أجد قيمة الثابت P.

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \neq س ، \quad \frac{٢س٢ - ٦س}{٣ - س} \\ ٣ = س ، \quad ٥ \end{array} \right\} = \text{س٢: إذا كان } (س) =$$

، ابحث في اتصال الاقتران (س) عند س = ٣.

$$\left. \begin{array}{l} ٠ > س ، \quad ١ + س٢ \\ ٠ < س ، \quad ٥ - س٣^٢ \\ ٠ = س ، \quad ٥ \end{array} \right\} = \text{س٣: إذا كان } (س) =$$

، أجد:

أ) نهاية (س)  $\leftarrow$  س<sup>-</sup>

ب) نهاية (س)  $\leftarrow$  س<sup>+</sup>

ج) نهاية (س)  $\leftarrow$  س<sup>.</sup>

د) هل و متصل عند س = ٠؟

## نموذج اختبار

س١: أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(١) ما قيمتا الوسط الحسابي ( $\mu$ ) والانحراف المعياري ( $\sigma$ ) لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري:

(أ)  $\mu = 1, \sigma = 1$  (ب)  $\mu = 0, \sigma = 0$  (ج)  $\mu = 0, \sigma = 1$  (د)  $\mu = 1, \sigma = 0$

(٢) ما نسبة المساحة تحت (ع = 2,85)؟

(أ) 0,9978 (ب) 0,0022 (ج) 0,3222 (د) 0,9788

(٣) ما نسبة المساحة بحيث (ع > 0,96) : (ع > 1,65)

(أ) 0,0991 (ب) 0,1190 (ج) 0,6900 (د) 0,8809

(٤) ما مجموع جميع العلامات المعيارية لتوزيع طبيعي؟

(أ) 1 (ب) 0 (ج) 1- (د) 0,5000

(٥) ما نسبة المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي المعياري والواقعة فوق (ع = 0,75)

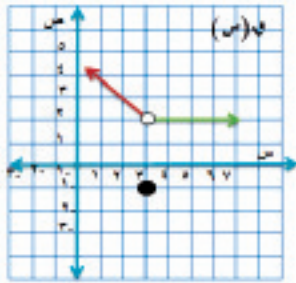
(أ) 0,2266 (ب) 0,2734 (ج) 0,7734 (د) 0,5721

(٦) ما قيمة  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$ ؟

(أ) 6- (ب) 10 (ج) 8 (د) 6

(٧) إذا كان  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0,2$ ، ما قيمة  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$ ؟

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 6 (د) 8



(٨) في الشكل المجاور ما قيمة  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$ ؟

(أ) 2 (ب) غير موجودة (ج) صفر (د) 3

(٩) إذا كان  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2$ ، ما قيمتا الثابت P؟

(أ) 1,2 (ب) 1,2- (ج) 1,2- (د) 1,2-

س٢: إذا كانت العلامتان المعياريّتان المناظرتان للعلامتين ٧١ ، ٥٣ هما ٢ ، ١- على الترتيب، أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات الخام لطلبة الصف.

س٣: نادي رياضي مكون من ٤٠٠ عضو تتبع أعمارهم التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٤٠ سنة وانحراف معياري ٥ ، أجد:

(أ) عدد الأعضاء الذين تزيد أعمارهم على ٥٠ سنة.

(ب) عدد الأعضاء الذين تتراوح أعمارهم بين ٣٥ سنة إلى ٤٥ سنة.

س٤: أجد النهايات الآتية:

$$(أ) \lim_{s \rightarrow 4^-} \left( \frac{s^2}{s^2 - 4} - \frac{s^2}{s^2 - 4} \right)$$

$$(ب) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 - 7}$$

$$(ج) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^3 - 27}{s^2 - 5s + 6}$$

$$(د) \lim_{s \rightarrow 4} \frac{\sqrt{s-2}}{s-4}$$

س٥: إذا كان  $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^3 + 2s^2 + 1}{s^2 + 4} = 1$  ، أجد قيمة الثابت ب .