١٢

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الريادي والفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

الفترة الأولى

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
مركز المناهج

moehe.gov.ps | mohe.pna.ps | mohe.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
+970-2-2983280 هاتف | +970-2-2983250 فاكس

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

المحتويات

الفترة ١

يتوقـع مـن الطلبـة بعـد الإنتهـاء مـن دراسـة هـذه الوحـدة المتمازجـة والتفاعـل مـع أنشـطتها أن يكونـوا قادريـن علـى توظيـف المصفوفـات وقواعـد الاشـتقاق فـي الحيـاة العمليّـة مـن خـلال الآتـي:

- التعرف على مفهوم المصفوفة.
- تنظيم بيانات معطاة على شكل مصفوفة وتحديد رتبة هذه المصفوفة.
- إيجاد ناتج جمع وطرح المصفوفات.
- إيجاد ناتج ضرب المصفوفات.
- إيجاد محدد المصفوفات المربعة من الرتبة ٢×٢ ، ٣×٣.
- إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة ٢×٢.
- حل نظام من المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات.
- توظيف المصفوفات في مسائل عملية وحل تمارين عامة.
- التعرف إلى مفهوم متوسط التغير للاقتران ق(س) وإيجاده.
- التعرف إلى مفهوم المشتقة الأولى للاقتران، وإيجادها باستخدام التعريف.
- التعرف على قواعد الاشتقاق، واستخدامها لإيجاد مشتقات بعض الاقترانات.

البنود الملونة باللون الأحمر يستثنى منها الفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

المصفـوفة (Matrix)

تعريف:

المصفوفة: ترتيب من الأعداد الحقيقية على شكل مستطيل، مكونة من عدد من الصفوف وعدد من الأعمدة ومحصورة بالحاصرتين [ ]، ويرمز للمصفوفة بأحد الرموز: أ، ب، جـ، ....

أتعلم

(١) إذا كانت أ مصفوفة تتكون من م صف، ن عمود (م ، ن ∈ $ص^+$) فإن م × ن تسمى رتبة المصفوفة أ، وتقرأ م في ن، ويرمز لها بالرمز ($أ_{م \times ن}$) .

(٢) الأعداد الحقيقية المكونة للمصفوفة تسمى عناصر (مدخلات)،

$أ_{ي هـ}$ تعني مدخلة الصف ي والعمود هـ في المصفوفة أ.

(٣) ناتج الضرب م×ن يمثل عدد مدخلات(عناصر) المصفوفة أ.

(٤) تكتب المصفوفات حسب مدخلاتها، فمثلاً : $أ_{٣\times٢} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{bmatrix}$ ، $أ_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$

نشاط: إذا كانت: $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٠ \\ ٤- & ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ & ١- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣- & ٢- \\ \frac{١}{٢} & \sqrt{٥} \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٥- & ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

رتبة أ تساوي ٣×٣ ، رتبة ب .... ، رتبة جـ ......

$أ_{٢١}$ هي مدخلة الصف الأول والعمود الثاني وتساوي ٣ ، $ب_{٢٢}$ = ... ، $جـ_{٣١}$ = ...

العدد -٤ هو مدخلة الصف الثاني والعمود الأول في المصفوفة أ وتمثل بالرموز $أ_{١٢}$

مثال (١): المصفوفة أ من الرتبة ٢×٢، إذا عرفت مدخلات المصفوفة أ بحيث أن $أ_{ي هـ}$ = ي + هـ ، اكتب المصفوفة بذكر مدخلاتها؟

الحل: $أ_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ ، $أ_{١١}$ = ١ + ١ =٢ ، $أ_{٢١}$ = ١ + ٢ = ٣

$أ_{١٢}$ =٢ + ١ = ٣ ، $أ_{٢٢}$ = ٢ + ٢ = ٤

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

مصفوفات خاصة:

مصفوفة الصف: هي المصفوفة التي تتكون من صفّ واحد فقط.

مثال: أ = $\begin{bmatrix} ١- & \sqrt{٥} & \pi \end{bmatrix}$ ، أ رتبتها ١×٣ ، تسمى أ مصفوفة صف.

مصفوفة العمود: هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط.

مثال: جـ = $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} \\ ٣- \end{bmatrix}$ ، جـ رتبتها ٢×١ ، تسمى جـ مصفوفة عمود.

المصفوفة المربعة: المصفوفة التي فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

مثال (١): أ = $\begin{bmatrix} ١ & \sqrt{٢} \\ ٣ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة ٢×٢ ويمكن تسميتها مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية.

تسمى المدخلات $\sqrt{٢}$ ، ٣ القطر الرئيس للمصفوفة أ ، والمدخلات ١ ، $\frac{١}{٢}$ القطر الثانوي للمصفوفة أ.

مثال (٢): جـ = $\begin{bmatrix} ١٢ & ٤- & \frac{٢}{٣} \\ ٠ & ٠ & ١ \\ \frac{١}{٢} & ٠ & ١- \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة ويمكن كتابتها بالصورة $جـ_{٣}$ أو $جـ_{٣×٣}$.

المصفوفة الصفرية: المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار، ويرمز لها بالرمز (و).

تعريف:

تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية ($أ_{يهـ}$ = $ب_{يهـ}$ والعكس صحيح.

مثال (١): إذا كانت $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \text{ص} & -2 \\ 3 & 1 & 2\text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 6 & -2 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ ما قيمة س، ص؟

الحل: المصفوفتان متساويتان، فمدخلاتهما المتناظرة متساوية.

ص= ٦

٢س = -٦ ومنها س = -٣

تمارين ومسائل

س١: إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ \sqrt{5} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\text{جـ} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ \sqrt{16} & 4 \\ 2.3 & -5 \end{bmatrix}$

١) ما رتبة كل من المصفوفات أ ، ب ، جـ ؟

٢) ما قيمة أ_{22} ، ب_{12} ، جـ_{13} ، جـ_{23} ؟

٣) ما قيمة $\text{أ}_{21} + \text{جـ}_{23}$ ؟

س٢: أجد قيمة س، ص في المصفوفات الآتية:

١) $\begin{bmatrix} 6 & 3\text{ص} \\ 1-\text{س} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} \text{س}+4 \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3\text{س} \end{bmatrix}$

س٣: المصفوفة جـ من الرتبة ٣×٢، إذا عرفت مدخلاتها بحيث أن $\text{جـ}_{\text{ي هـ}} = 2\text{ي} - \text{هـ}$، أكتب المصفوفة بذكر مدخلاتها.

جمع المصفوفات وطرحها

(Summation and Subtraction of Matrices)

تعريف:

تجمع المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وتتم عملية جمع المصفوفتين بجمع مدخلاتهما المتناظرة. وتكون مصفوفة الناتج من نفس الرتبة.

تطرح المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وتتم عملية طرح المصفوفتين بطرح مدخلاتهما المتناظرة. وتكون مصفوفة الناتج من نفس الرتبة.

مثال (١): إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٣ & ٩ & ١ \\ ١ & ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٠ \\ ٠ & -٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، أجد أ + ب ، أ − ب ؟

الحل: أ + ب $= \begin{bmatrix} ٣ + ٦ & ٩ + ٣ & ١ + ٠ \\ ١ + ٠ & ٢ + -٤ & -٣ + ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ١٢ & ١ \\ ١ & -٢ & -٢ \end{bmatrix}$

أ − ب $= \begin{bmatrix} ٣ - ٦ & ٩ - ٣ & ١ - ٠ \\ ١ - ٠ & ٢ - -٤ & -٣ - ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٦ & ١ \\ ١ & ٦ & -٤ \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفة بعدد حقيقي:

إذا كان ك عدداً حقيقياً، $أ_{م×ن}$ مصفوفة، فإن $(كأ)_{م×ن}$ مصفوفة، تنتج مدخلاتها من ضرب كل مدخلة من مدخلات المصفوفة أ في ك.

مثال (٢): إذا كان أ $= \begin{bmatrix} -٣ & ٩ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ أجد: ١) ٢ أ ٢) $\frac{١}{٢}$ أ ٣) - أ

الحل: ١) ٢ أ $= \begin{bmatrix} ٢ \times -٣ & ٢ \times ٩ \\ ٢ \times ٠ & ٢ \times ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ١٨ \\ ٠ & ١٠ \end{bmatrix}$

٢) $\frac{١}{٢}$ أ $= \begin{bmatrix} -\frac{٣}{٢} & \frac{٩}{٢} \\ ٠ & \frac{٥}{٢} \end{bmatrix}$

٣) -أ $= \begin{bmatrix} ٣ & -٩ \\ ٠ & -٥ \end{bmatrix}$ وتسمى هذه المصفوفة بالمعكوس الجمعي للمصفوفة أ.

مثال (٣): إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١١ \\ ٩ & ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -١ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ & -٣ \end{bmatrix}$

أجد: ١) $-أ + ٢ب$ ٢) $٣ب - ٢أ$

الحل: ١) $-أ + ٢ب = \begin{bmatrix} -٢ & -٣ & -١١ \\ -٩ & -٦ & -٥ \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} -١ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ + -٢ & -٣ + ٦ & -١١ + ٢ \\ -٩ + ٤ & -٦ + ٠ & -٥ + -٦ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & -٩ \\ -٥ & -٦ & -١١ \end{bmatrix}$

٢) $٣ب - ٢أ = ٣\begin{bmatrix} -١ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ & -٣ \end{bmatrix} - ٢\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١١ \\ ٩ & ٦ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٩ & ٣ \\ ٦ & ٠ & -٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٢٢ \\ ١٨ & ١٢ & ١٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٧ & ٣ & -١٩ \\ -١٢ & -١٢ & -١٩ \end{bmatrix}$

مثـال (٤): أجد قيمة س، ص فيما يأتي: $٢\begin{bmatrix} س \\ ٣ \end{bmatrix} - ٣\begin{bmatrix} ٤ \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

الحل: $\begin{bmatrix} ٢س \\ ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٢ \\ ٣ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٢س - ١٢ \\ ٦ - ٣ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

$٢س - ١٢ = ٢$ ومنها $س = ٧$

$٦ - ٣ص = ٩$ ومنها $ص = -١$

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي:

اذا كانت أ، ب، جـ مصفوفات من نفس الرتبة، ك $\in$ ح:

أ) أ + ب = ب + أ .... (الخاصية التبديلية).

ب) (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) .... (الخاصية التجميعية).

جـ) أ + و = و + أ = أ .... (المصفوفة الصفرية).

د) أ + (-أ) = (-أ) + أ = و.............................. (المعكوس الجمعي).

هـ) ك (أ + ب) = ك أ + ك ب ....(ضرب عدد في مجموع مصفوفتين).

مثال (٥): أجد المصفوفة س في المعادلة الآتية: $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ + ٢س = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ،

الحل: ($\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -٥ & -٤ \end{bmatrix}$) + ٢س = ($\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -٥ & -٤ \end{bmatrix}$) (بإضافة المعكوس الجمعي)

$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ + ٢س = $\begin{bmatrix} -١ & -١ \\ -٣ & -٧ \end{bmatrix}$ ومنها س = $\begin{bmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{-١}{٢} \\ \frac{-٣}{٢} & \frac{-٧}{٢} \end{bmatrix}$

أتعلم

المعادلة $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ + ٢س = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ تسمى معادلة مصفوفية، حيث س مصفوفة،

وكذلك $\begin{bmatrix} س \\ ٢ \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} ١٢ \\ ٣ص \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$ **تسمى معادلة مصفوفية، حيث س ، ص أعداد حقيقية.**

تمارين ومسائل

س٢: أجد ناتج ما يأتي:

١) $\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ٣ & -٢ \\ -٥ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix}$

س٣: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & -٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٠ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

أجد: ١) (أ + ب) − ٢ جـ ٢) (أ + ب) + جـ ٣) أ + (ب + جـ)

٤) ٢ (أ + جـ) ٥) (ب + جـ) ٦) (جـ + ب)

س٤: أحل المعادلات المصفوفية الآتية:

١) $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ س - ٣ص & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & س + ص \\ ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} س \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix} + ٣ \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ص \\ -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ \\ ١٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

س٥: أحل المعادلات المصفوفية الآتية:

١) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١٠ & -٣ \end{bmatrix} - ٢س = ٣ \begin{bmatrix} ٠ & -٥ \\ ٤ & ٩ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} -٣ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٥ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٠ & -٢ \\ ٠ & ١ & ٣ \end{bmatrix} + \frac{١}{٢} ص$

ضرب المصفوفات
(Matrix Multiplication)

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين، وكان عدد الأعمدة في أ يساوي عدد الصفوف في ب، فإن المصفوفة أ . ب معرفة، والناتج مصفوفة جـ من الرتبة (عدد صفوف أ في عدد أعمدة ب)، أي أن $أ_{م×ن} . ب_{ن×هـ} = جـ_{م×هـ}$

نشاط (١): أكمل الجدول الآتي:

رتبة المصفوفة أ	رتبة المصفوفة ب	أ . ب معرفة	أ . ب غير معرفة	رتبة المصفوفة الناتجة
٣×٢	٢×٣	✓	____	٢×٢
٢×٣	٢×٣	....	....	____
١×٣	....	✓	____	٣×٣

مثال (١): إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٤ \\ ٠ & ١ & ٢- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١- & ٢ & ٥- \\ ٠ & ١ & ٢- \\ ١- & ٢- & ١- \end{bmatrix}$

أجـد: أ.ب ، ب.أ إن أمكن؟

الحل: $أ_{٣×٢} . ب_{٣×٣} = جـ_{٣×٢} = \begin{bmatrix} جـ_{١١} & جـ_{٢١} & جـ_{٣١} \\ جـ_{١٢} & جـ_{٢٢} & جـ_{٣٢} \end{bmatrix}$

$جـ = \begin{bmatrix} \boxed{٢ \quad ١- \quad ٤} \\ ٠ \quad ١ \quad ٢- \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١- & ٢ & ٥- \\ ٠ & ١ & ٢- \\ ١- & ٢- & ١- \end{bmatrix}$

$جـ_{١١} = ٢ × ١- + ١- × ٠ + ٤ × ١- = ٦-$ وهي ناتج جمع (ضرب مدخلات الصف الأول من المصفوفة أ في مدخلات العمود الأول من المصفوفة ب). وهكذا بقية مدخلات المصفوفة جـ.

$$ جـ = \begin{bmatrix} ١- \times ٤ + ٢- \times ١- + ٥- \times ٢ & ٢- \times ٤ + ١ \times ١- + ٢ \times ٢ & ١- \times ٤ + ٠ \times ١- + ١- \times ٢ \\ ١- \times ٢- + ٢- \times ١ + ٥- \times ٠ & ٢- \times ٢- + ١ \times ١ + ٢ \times ٠ & ١- \times ٢- + ٠ \times ١ + ١- \times ٠ \end{bmatrix} $$

$$ جـ = أ \, . \, ب = \begin{bmatrix} ١٢- & ٥- & ٦- \\ ٠ & ٥ & ٢ \end{bmatrix} $$

ب . أ غير معرفة، لأن عدد أعمدة ب لا يساوي عدد صفوف أ.

أتعلم

المدخلة جـ $_{ي هـ}$ = مجموع حواصل ضرب المدخلات في الصف ي من المصفوفة أ في مدخلات العمود هـ من المصفوفة ب.

خصائص عملية الضرب على المصفوفات:

إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن عملية الضرب والجمع في العبارات الآتية معرفة، ك∋ح فإن:

١. (أ . ب) . جـ = أ . (ب . جـ)................. الخاصية التجميعية.

٢. أ . (ب + جـ) = (أ . ب) + (أ . جـ)... توزيع الضرب على الجمع من اليمين.

٣. (أ + ب) . جـ = (أ . جـ) + (ب . جـ).. توزيع الضرب على الجمع من اليسار.

٤. أ . م = م . أ = أ .... (م) المصفوفة المحايدة.

٥. ك (أ . ب) = (ك أ) . ب = أ . (ك ب)

تمارين ومسائل

س١: أجد ناتج ما يأتي (إن أمكن):

١) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٨ \\ ٩ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} ٢ \\ -٥ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & -٥ \\ ٢ & -١ & ٦ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & -٢ \\ ٠ & ١٠ & ٤ \\ ٠ & ١ & -٧ \end{bmatrix}$

س٢: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٧ & ٨ & ١٥ \\ ٣ & ٥ & -٦ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٩ \\ -١ & -٢ & ٤ \\ ٠ & ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

أجد (إن أمكن):

١) ب . جـ ٢) ٢أ . (-ب) ٣) جـ^{٢} ٤) أ^{٢}

س٣: أجد قيم س ، ص فيما يأتي:

$\begin{bmatrix} س & -٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -١٤ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$

س٤: إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} ٧ & ١ & ٢ \\ ٣ & -٥ & ١ \end{bmatrix}$ جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -٣ \\ -١ & -٢ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٤ \end{bmatrix}$ أجد:

١) (أ . ب) . جـ ٢) أ . (ب . جـ) ٣) ٢ (أ . ب)

٤) (٢أ) . ب ٥) أ . (٢ب)

المحددات (Determinants)

تعريف:

إذا كانت $\text{أ}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{bmatrix}$ ، فإن المقدار $(\text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢}) - (\text{أ}_{٢١} \times \text{أ}_{١٢})$ يسمى محدد المصفوفة أ

ويرمز له بالرمز $|\text{أ}|$.

مثال (١): إذا كان $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣- \\ ١ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$.

أجد: ١) $|\text{أ}|$ ٢) $|\text{ب}|$ ٣) $|\text{أ} . \text{ب}|$

الحل: ١) $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٦ & ٣- \\ ١ & \frac{١}{٢} \end{vmatrix} = (٦ \times \frac{١}{٢}) - (٣- \times ١) = ٣ + ٣ = ٦$

٢) $|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = (٢ \times ٣) - (١ \times ١) = ٦ - ١ = ٥$

٣) $\text{أ} . \text{ب} = \begin{bmatrix} ٩ & ٣- \\ ٢,٥ & ٢,٥ \end{bmatrix}$ ، $|\text{أ} . \text{ب}| = (٩ \times ٢,٥) - (٣- \times ٢,٥) = ٣٠$

مثال (٢): إذا كان $\begin{vmatrix} ٣ & \text{س} \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٧$، أجد قيمة س.

الحل: $(٣ \times ٥) - (\text{س} \times ٢) = ٧$ ومنها $\text{س} = ٤$

تعريف:

تعريف: إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{bmatrix}$ ، فإن محدد المصفوفة أ هو:

$$|\text{أ}| = \text{أ}_{١١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} - \text{أ}_{٢١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{أ}_{٣١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix}$$

مثال (٣): أجد محدد المصفوفة $\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ ؟

الحل: $|\text{أ}| = 2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + -1 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 2((-3\times5) - (2\times-2)) - 3((1\times5) - (2\times0)) + (-1)((1\times-2) - (-3\times0))$$

$$= 2(-11) - 3(5) - 1(-2) = -22 - 15 + 2 = -35$$

تمارين ومسائل

س١: أجد: ١) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ ، ٢) $\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ ، ٣) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

س٢: إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، أجد $|\text{أ} \,.\, \text{ب}|$ ، $|\text{أ} + \text{ب}|$ ، $|\text{أ} - 2\text{ب}|$

س٣: أجد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} \text{س} & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$

س٤: أجد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} \text{س} & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 11$

النظير الضربي للمصفوفة المربعة
(Inverse Matrix)

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين ثنائيتين، وكان أ.ب = ب.أ = $\text{م}_{٢}$ ($\text{م}_{٢}$ المصفوفة المحايدة أو مصفوفة الوحدة).
فإن ب تسمى النظير الضربي لِـ أ، وبالرموز ب = $\text{أ}^{-١}$ ، ($\text{أ}^{-١}$ النظير الضربي للمصفوفة أ).

مثال (١): إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ أبين أن ب = $\text{أ}^{-١}$ ؟

الحل: أ . ب =

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١\times٢ + -٢\times١ & -٢\times٢ + ٥\times١ \\ ١\times٥ + -٢\times٢ & -٢\times٥ + ٥\times٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

ب . أ =

$$\begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥\times-٢ + ٢\times٥ & ٢\times-٢ + ١\times٥ \\ ٥\times١ + ٢\times-٢ & ٢\times١ + ١\times-٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

أ . ب = ب . أ = م ومنها ب = $\text{أ}^{-١}$ وكذلك أ = $\text{ب}^{-١}$.

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة الثنائية:

تعريف:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \end{bmatrix}$ فإن $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \begin{bmatrix} -\text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{١١} & -\text{أ}_{١٢} \end{bmatrix}$ حيث | أ | ≠ ٠ .

إذا كان | أ | = ٠ ، فإن أ ليس لها نظير ضربي (تسمى أ مصفوفة منفردة).

مثال (٢): أي من المصفوفات الآتية منفردة؟

١) $\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ١٠ & -٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ٣) $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ٤) $\begin{bmatrix} \sqrt{٤} & \frac{٣}{٤} \\ \frac{٤}{٣} & ١ \end{bmatrix}$.

الحل: ١) $\begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = (١\times٤) - (-٣\times٢) = ١٠ \neq ٠$ ليست منفردة. ٢) $\begin{vmatrix} -٥ & ١٠ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = ٠$ منفردة.

٣) $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - ١٢ = ٠$ منفردة. ٤) $\begin{vmatrix} \frac{٣}{٤} & ٢ \\ ١ & \frac{٤}{٣} \end{vmatrix} = -١$ ليست منفردة.

مثال (٣): أجد أ $^{-١}$ (إن أمكن) حيث أ $= \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix}$.

الحل: $|$أ$| = ٧\times٥ - ٤\times٩ = ٣٥ - ٣٦ = -١$

أ $^{-١} = \frac{١}{-١}\begin{bmatrix} ٧ & -٤ \\ -٩ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٤ \\ ٩ & -٥ \end{bmatrix}$ أتحقق من أن النظير الضربي لِـ أ $^{-١}$ هو أ .

مثال (٤): أحل المعادلة المصفوفية الآتية: س . $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل: أضرب طرفي المعادلة بالنظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ من اليسار.

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ لماذا ؟

$$س . \left(\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} \right)$$

$$س . \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$$ لماذا؟

$$س . م = \begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$$ ومنهـا $$س = \begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$$

تمارين ومسائل

س١: أجد النظير الضربي للمصفوفات الآتية (إن أمكن):

١) $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ٣) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

س٢: أجد قيمة س التي تجعل المصفوفات الآتية منفردة حيث ١) $\begin{bmatrix} ٢ & س \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ٩ & س \\ س & ٤ \end{bmatrix}$

س٣: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، وكانت ب = ٤أ ، أجد $ب^{-١}$ ؟

س٤: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، أجد: $(أ \,.\, ب)^{-١}$ ، $ب^{-١} \,.\, أ^{-١}$ ؟ ماذا تلاحظ؟

س٥: أحل المعادلة المصفوفية ٢س . $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات
(Solving Linear System of Equations by Matrices)

١- طريقة النظير الضربي:

مثال (١): أحل النظام الآتي باستخدام النظير الضربي: ٢س + ص = ٤

٥س − ٢ص = ١

الحل: أكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية $\begin{bmatrix} \text{٢} & \text{١} \\ \text{٥} & \text{-٢} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٤} \\ \text{١} \end{bmatrix}$

أضرب طرفي المعادلة المصفوفية بالنظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} \text{٢} & \text{١} \\ \text{٥} & \text{-٢} \end{bmatrix}$ من اليمين.

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} \text{٢} & \text{١} \\ \text{٥} & \text{-٢} \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} \frac{\text{٢}}{\text{٩}} & \frac{\text{١}}{\text{٩}} \\ \frac{\text{٥}}{\text{٩}} & \frac{\text{-٢}}{\text{٩}} \end{bmatrix}$ لماذا ؟

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{\text{٢}}{\text{٩}} & \frac{\text{١}}{\text{٩}} \\ \frac{\text{٥}}{\text{٩}} & \frac{\text{-٢}}{\text{٩}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{٢} & \text{١} \\ \text{٥} & \text{-٢} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\text{٢}}{\text{٩}} & \frac{\text{١}}{\text{٩}} \\ \frac{\text{٥}}{\text{٩}} & \frac{\text{-٢}}{\text{٩}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{٤} \\ \text{١} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{١} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{١} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١} \\ \text{٢} \end{bmatrix} \quad \text{ومنها} \quad \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١} \\ \text{٢} \end{bmatrix}$$

ومنها س = ١ ، ص = ٢ (أتحقق من ذلك).

٢- طريقة المحددات (طريقة كريمر).

طريقة كريمر: في النظام $\text{أ}_{\text{١}}\,\text{س} + \text{ب}_{\text{١}}\,\text{ص} = \text{ك}$

$\text{أ}_{\text{٢}}\,\text{س} + \text{ب}_{\text{٢}}\,\text{ص} = \text{ل}$ ،

تكون $\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|}$ ، $\text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|}$ حيث $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{\text{١}} & \text{ب}_{\text{١}} \\ \text{أ}_{\text{٢}} & \text{ب}_{\text{٢}} \end{bmatrix}$ ، $|\text{أ}| \neq \text{٠}$ ، $\text{أ}_{\text{س}} = \begin{bmatrix} \text{ك} & \text{ب}_{\text{١}} \\ \text{ل} & \text{ب}_{\text{٢}} \end{bmatrix}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{\text{١}} & \text{ك} \\ \text{أ}_{\text{٢}} & \text{ل} \end{bmatrix}$.

مثال (٢): أحل النظام الآتي باستخدام طريقة كريمر: ٢س − ص = ٧ ، س + ٢ ص = ١

الحل: أكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ١ \end{bmatrix}$

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات، ومنها | أ | = (٢×٢) − (١×-١) = ٥

$أ_{س} = \begin{bmatrix} ٧ & ١- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ استبدال العمود الأول في المصفوفة أ بالثوابت، ومنها $|أ_{س}|$ = ١٥

$أ_{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ استبدال العمود الثاني في المصفوفة أ بالثوابت، ومنها $|أ_{ص}|$ = -٥

ومنها $س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{١٥}{٥} = ٣$ ، $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{٥-}{٥} = ١-$ (أتحقق).

مثال (٣): أحل المعادلة المصفوفية الآتية بطريقة كريمر $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١- & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ ١ \end{bmatrix}$

الحل: $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$ ، $أ_{س} = \begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $أ_{ص} = \begin{bmatrix} ٥ & ٩ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

| أ | = ٧ ، $|أ_{س}|$ = ٧ ، $|أ_{ص}|$ = ١٤

$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٧}{٧} = ١$ ، $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{١٤}{٧} = ٢$ (أتحقق).

تمارين ومسائل

س١: أحل الأنظمة الخطيّة الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي:

١) ٣س − ٤ص = ٤ ، -٢س + ٤ص = ٤

٢) س − ص = ٣ ، ٢س = ٦ − ص

س٢: أحل الأنظمة الخطيّة الآتية باستخدام طريقة كريمر:

١) س − ص = ٨ ، ٢س + ص = ١

٢) ٢ ص − س = ١ ، ٢س + ص − ٨ = ٠

س٣: في نظام من معادلتين خطيّتين كانت | أ | = ١١، $|أ_{س}|$ = ٣٣، $|أ_{ص}|$ = ١١، أجد قيم س ، ص ؟

س٤: في نظام من معادلتين خطيّتين على الصورة أس + ب ص + جـ = ٠ ، كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١١ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة المعاملات، ب = $\begin{bmatrix} -٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة الثوابت.

أ) أكتب المعادلتين الخطيّتين بدلالة س ، ص.

ب) أستخدم طريقة كريمر لحل النظام.

متوسط التغير
(Rate of Change)

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً، وتغيرت فيه س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن $\triangle$س = $س_٢ - س_١$ تمثل التغير في س وتقرأ دلتا س.

وبناءً على التغير في س تتغير ص، حيث $\triangle$ص = $ص_٢ - ص_١$ = ق($س_٢$) − ق($س_١$) تمثل التغير في ص وتقرأ دلتا ص.

مثال (١): إذا كان ص = ق (س) =٢س + ٣ أجد $\triangle$س ، $\triangle$ص ، عندما تتغير س من $س_١$ = ١ إلى $س_٢$ = ٤.

الحل: $\triangle$س = $س_٢ - س_١$ = ٤ − ١ = ٣

$\triangle$ص = $ص_٢ - ص_١$ = ق($س_٢$) − ق($س_١$) = ق(٤) − ق(١) =١١ − ٥ = ٦

تعريف:

يسمى المقدار $\dfrac{\triangle ص}{\triangle س} = \dfrac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \dfrac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$ متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$.

مثال (٢): إذا كان ص= ق(س)=٢$س^٢$+ ٤ ، س∈ح ، وتغيرت س من $س_١$= ٢ إلى $س_٢$= ٥، أجد متوسط التغير للاقتران ق(س).

الحل: متوسط التغير = $\dfrac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \dfrac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢} = \dfrac{٥٤ - ١٢}{٥ - ٢} = ١٤$

مثال (٣): إذا كان ص= ق(س) = ١ − ٣س ، س∈ح، وزادت س من $س_١$= ٣ بمقدار ٢، أجد متوسط التغير للاقتران ق(س).

الحل: متوسط التغير = $\dfrac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$\triangle$س = $س_٢ - س_١$

٢ = $س_٢$ − ٣ ومنها $س_٢$ = ٥

متوسط التغير = $\dfrac{ق(٥) - ق(٣)}{٥ - ٣} = \dfrac{{}^{-}١٤ - {}^{-}٨}{٥ - ٣} = {}^{-}٣$

أتذكر

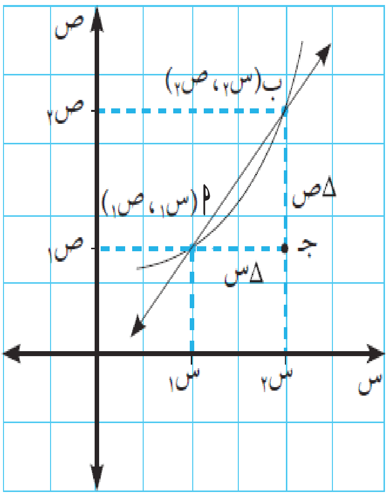
إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران

ص= ق(س)، والنقطتان أ($\text{س}_١$ ،$\text{ص}_١$) ، ب($\text{س}_٢$،$\text{ص}_٢$)

واقعتين عليه، فإن ميل المستقيم القاطع أب = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

ومتوسط التغير للاقتران ص= ق(س) يساوي $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ أي

أن متوسط التغير للاقتران يساوي ميل المستقيم القاطع.



مثال (٤): تقع النقطتان أ(-١، -٣)، ب(٣، ٩) على منحنى الاقتران ص= ق(س)، أجد ميل المستقيم القاطع أب.

الحل: ميل المستقيم القاطع أب = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

= $\frac{٩ - -٣}{٣ - -١}$ = ٣

تمارين ومسائل

س١: إذا كان ص = ق(س)= ٥س – ١ أجد Δس ، Δص عندما تتغير س:

أ) من $\text{س}_١$ = ٢ إلى $\text{س}_٢$ = ٣,٨

ب) من $\text{س}_١$ = ٤ إلى $\text{س}_٢$ = -٢

س٢: أجد متوسط التغير للاقتران ص = ق(س) في الحالات الآتية:

أ) ق(س) = $\sqrt{\text{س} - ٣}$ ، عندما تتغير س من $\text{س}_١$ = ٧ إلى $\text{س}_٢$ = ٤

ب) ق(س) = $\text{س}^٢$ – ١ ، عندما $\text{س}_١$ = ٢ ، Δس = ٤

س٣: ليكن ص = ق(س) اقتراناً، وكان متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من $\text{س}_١$ = ١ إلى $\text{س}_٢$ = ٤ هو ١٣، أجد:

أ) التغير في ص ب) ق(٤) علما بأن ق(١) = ٦

س٤: إذا كان ق(س) = س + ٧ ، أجد ميل القاطع المارّ بالنقطتين أ(-٢ ، ق(-٢)) ، ب(٣ ، ق(٣)).

مفهوم المشتقة الأولى

(First Derivative)

تعريف: المشتقة الأولى للاقتران ص= ق(س) عند النقطة (س$_1$ ،ق(س$_1$)) هي:

$$\lim_{\triangle س \to 0} \frac{ق(س_1 + \triangle س) - ق(س_1)}{\triangle س}$$ ويرمز لها بالرمز ق$'$(س$_1$) أو $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=س_1}$ أو ص$'\Big|_{س=س_1}$

وللتبسيط يمكن كتابة △س= هـ ، فتكون ق$'$(س$_1$) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س_1 + هـ) - ق(س_1)}{هـ}$

مثال (١): إذا كان ق(س) = ٥ ، أجد ق$'$(٢) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

الحل: ق$'$(٢) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{٥ - ٥}{هـ}$

= صفر

مثال (٢): إذا كان ق(س) = ٣س، أجد ق$'$(١) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

الحل: ق$'$(١) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{٣(١ + هـ) - ٣(١)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{٣ + ٣هـ - ٣}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{٣هـ}{هـ}$

= ٣

مثال (٣): إذا كان ق(س) = ٣س^٢ + ١، أجد ق$'$(٢) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

الحل: ق$'$(٢) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{٣(٢ + هـ)^٢ + ١ - (٣(٢)^٢ + ١)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{٣(٤ + ٤هـ + هـ^٢) + ١ - (٣×٤ + ١)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{١٣ + ١٢هـ + ٣هـ^٢ - ١٣}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{١٢هـ + ٣هـ^٢}{هـ} \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ(١٢ + ٣هـ)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0}$ ١٢ + ٣هـ = ١٢ + ٣×٠

= ١٢

مثال (٤): إذا كان ق(٢) = ٨ ، $\text{ق}^{/}(٢) = ٢$ أجد $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(٢ + \text{هـ})}{٥\text{هـ}}$

الحل: $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(٢ + \text{هـ})}{٥\text{هـ}} = \frac{-١}{٥} \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٢+\text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}}$

$\displaystyle = \frac{-١}{٥}\ \text{ق}^{/}(٢)$ لماذا؟

$\displaystyle = \frac{-١}{٥} \times ٢ = \frac{-٢}{٥}$

مثال (٥): إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س في الفترة [٣ ، ٣ + هـ].

يساوي $\dfrac{\text{هـ}^٢ - ٥\text{هـ}}{\text{هـ}}$ ، أجد $\text{ق}^{/}(٣)$.

الحل: متوسط التغير = $\dfrac{\text{ق}(٣+\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{\text{هـ}} = \dfrac{\text{هـ}^٢ - ٥\text{هـ}}{\text{هـ}}$

$\displaystyle \text{ق}^{/}(٣) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٣+\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}^٢ - ٥\text{هـ}}{\text{هـ}}$

$\displaystyle = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}(\text{هـ} - ٥)}{\text{هـ}} = -٥$

ألاحظ أن $\text{ق}^{/}(\text{س}_١)$ تساوي نهاية متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [$\text{س}_١$ ، $\text{س}_١$ + هـ] عندما تؤول هـ إلى الصفر.

مثال (٦): إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٣$، أجد $\text{ق}^{/}(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة، ثم أجد $\text{ق}^{/}(٢)$ ؟

الحل: $\displaystyle \text{ق}^{/}(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^٢ + ٣ - (\text{س}^٢+٣)}{\text{هـ}}$

$\displaystyle = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(\text{س}^٢ + ٢\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^٢) + ٣ - (\ \text{س}^٢ + ٣)}{\text{هـ}}$

$\displaystyle = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^٢ + ٣ - \text{س}^٢ - ٣}{\text{هـ}}$

$\displaystyle = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٢\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^٢}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}(٢\text{س} + \text{هـ})}{\text{هـ}}$

$\displaystyle = \lim_{\text{هـ} \to ٠} (٢\text{س} + \text{هـ}) = ٢\text{س}$

ومنها $\text{ق}^{/}(٢) = ٢ \times ٢ = ٤$

ملاحظة: سنقتصر إيجاد المشتقة بإستخدام التعريف على الإقترانات كثيرة الحدود التي درجتها أقل من ٣.

تمارين ومسائل

س١: باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، أجد ق$^{/}$(س) عند النقطة المعطاة في كل حالة:

أ) ق(س) = ٢س ـ ٧ ، س = -٣

ب) ق(س) = ٣ ـ س ، س = ٢

جـ) ق(س) = س^{٢} + س ، س = $-\frac{١}{٢}$

س٢: إذا كان ق$^{/}$(٣) = ٨ ، أجد:

أ) $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{ق(٣ + هـ) ـ ق(٣)}{هـ}$

ب) $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{ق(٣ + هـ) ـ ق(٣)}{٢هـ}$

جـ) $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{ق(٣) ـ ق(٣ + هـ)}{هـ}$

س٣: إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = ٣ إلى س$_{٢}$= ٣ + هـ

يساوي $\frac{٢}{(-١ + هـ)}$ ، أجد قيمة ق$^{/}$(٣).

س٤: إذا كانت $\triangle$ص = $\frac{٧هـ ـ هـ^{٢}}{٤}$ هي التغير في الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = ٥ إلى س$_{٢}$ = ٥ + هـ، أجد ق$^{/}$(٥).

س٥: إذا كان ص = ق(س) = س^{٢} + ١ ، أجد ق$^{/}$(س) باستخدام تعريف المشتقة.

قواعد الاشتقاق

(Differentiation Rules)

قاعدة (١): إذا كان ق(س) = جـ حيث جـ عدد حقيقي، فإن ق$^{/}$(س) = صفر. $\forall$ س $\in$ ح.

مثال (١): إذا كان ق(س) = ٣ ، أجد ق$^{/}$(س) ، ق$^{/}$(٥)

الحل: ق$^{/}$(س) = صفر لجميع قيم س $\in$ ح

ق$^{/}$(٥) = صفر

قاعدة (٢): إذا كان ق(س) = س^{ن} ، فإن ق$^{/}$(س) = ن س$^{ن-١}$ ، ن عدد حقيقي، س $\neq$ ٠

مثال (٢): أجد المشتقة الأولى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في كل من الحالات الآتية:

أ) ص = س٤

ب) ص = س$^{-٥}$ ، س $\neq$ ٠

جـ) ص = $\frac{١}{\text{س}^{٣}}$ ، س $\neq$ ٠

د) ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، س $\geq$ ٠

الحل: أ) ص = س^{٤}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ س$^{٤-١}$ = ٤س^{٣} ، $\forall$ س $\in$ ح

ب) ص = س$^{-٥}$ ، س $\neq$ ٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = -٥ س$^{-٥-١}$

= -٥س$^{-٦}$

جـ) ص = $\frac{١}{\text{س}^{٣}}$ = س$^{-٣}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = -٣ × س$^{-٣-١}$ = -٣ س$^{-٤}$ = $\frac{-٣}{\text{س}^{٤}}$

د) ص = $\sqrt{\text{س}}$ = س$^{\frac{١}{٢}}$ ، س $\geq$ ٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}-١}$ = $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٢\text{س}^{\frac{١}{٢}}}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ ، س > ٠

قاعدة (٣): إذا كان الاقترانان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س، وكانت أ ∈ ح، وكان هـ(س)= أ ق(س)، فإن هـ$'$(س) = أ ق$'$(س).

قاعدة (٤): إذا كان الاقترانان ك(س) ، ع(س) قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = ك(س) + ع(س) ، فإن ق$'$(س) = ك$'$(س) + ع$'$(س).

مثال (٣): إذا كان ك(س) = س^{٢} ، ع(س) = ٢س، ق(س) = ك(س) + ع(س)، أجد ق$'$(س) ، ق$'$(٠)؟

الحل: ق$'$(س) = ك$'$(س) + ع$'$(س)

= (٢ س) + (٢)

= ٢س + ٢

ق$'$(٠) = ٢×٠ + ٢ = ٢

قاعدة (٥): إذا كان الاقترانان ك(س) ، ع(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س ، وكان ق(س) = ك(س) – ع(س) ، فإن ق$'$(س) = ك$'$(س) – ع$'$(س).

مثال (٤): إذا كان ك(س) = ٥س ، ع(س) = ٢س^{٣} ، ق(س) = ك(س) – ع(س)، أجدق$'$(س)، ق$'$(-٢) ؟

الحل: ق$'$(س) = ك$'$(س) – ع$'$(س)

ق$'$(س) = ٥ – ٦س^{٢}

ق$'$(-٢) = ٥ – ٦ (-٢)^{٢}

= ٥ – ٢٤

= -١٩

ويمكن تعميم القاعدتين السابقتين لتشمل أكثر من اقترانين.

مثال (٥): إذا كان ك$'$(١) = ٣ ، ع$'$(١) = ٢ وكان ق(س) = ك(س) – ٢ع(س) ، أجد ق$'$(١) ؟

الحل: ق$'$(س) = ك$'$(س) – ٢ع$'$(س)

ق$'$(١) = ك$'$(١) – ٢ع$'$(١)

= ٣ – ٢ × ٢ = -١

قاعدة (٦): إذا كان الاقترانان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) فإن
ل$^{/}$(س) = ق(س) × هـ$^{/}$(س) + هـ(س) × ق$^{/}$(س)
وبالكلمات ل$^{/}$(س) = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول.

مثال (٦): إذا كان ص = (س^{٢}+٣س+٢) (٥س+١) أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س}=٢}$

الحل: ص = (س^{٢}+٣س+٢) (٥س+١)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (س^{٢}+٣س+٢)×٥ + (٥س+١)×(٢س + ٣)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س}=٢}$ = (٤ + ٦ + ٢)×٥ + (١٠ + ١) × (٤ + ٣)

= ٦٠ + ٧٧ = ١٣٧

مثال (٧): إذا كان ك(٢) = ٥ ، ك$^{/}$(٢) = ٣ ، ع(٢) = ٤ ، ع$^{/}$(٢) = ٦ وكان
ق(س) = ك(س) × ع(س) ، أجد ق$^{/}$(٢).

الحل: ق$^{/}$(س) = ك (س) × ع$^{/}$(س) + ع(س) × ك$^{/}$(س)
ق$^{/}$(٢) = ك (٢) × ع$^{/}$(٢) + ع(٢) × ك$^{/}$(٢)
= ٥ × ٦ + ٤ × ٣
= ٣٠ + ١٢ = ٤٢

قاعدة (٧): إذا كان الاقتران ل(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، هـ(س) ≠ ٠ فإن:

ل$^{/}$(س) = $\frac{\text{هـ(س)} \times \text{ق}^{/}\text{(س)} - \text{ق(س)} \times \text{هـ}^{/}\text{(س)}}{(\text{هـ(س)})^{٢}}$

وبالكلمات ل$^{/}$(س) = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

مثال (٨): إذا كان $\text{ق(س)} = \frac{\text{٣س} + ١}{\text{٢س} - ٥}$ ، $\text{س} \neq \frac{٥}{٢}$ ، أجد $\text{ق}^{/}\text{(س)}$.

الحل: $$\text{ق}^{/}\text{(س)} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{(المقام)}^{٢}}$$

$$= \frac{(\text{٢س} - ٥)\times ٣ - (\text{٣س} + ١)\times ٢}{(\text{٢س} - ٥)^{٢}}$$

$$= \frac{\text{٦س} - ١٥ - \text{٦س} - ٢}{(\text{٢س} - ٥)^{٢}} = \frac{-١٧}{(\text{٢س} - ٥)^{٢}}$$

مثال (٩): إذا كان $\text{ل(س)} = \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، $\text{هـ(س)} \neq$ صفر، وكان $\text{ق}^{/}(٢) = -١$ ، $\text{ق}(٢) = ١$ ، $\text{هـ}(٢) = ٢$، $\text{ل}^{/}(٢) = -٢$ أجد $\text{هـ}^{/}(٢)$.

الحل: $$\text{ل}^{/}\text{(س)} = \frac{\text{هـ(س)} \times \text{ق}^{/}\text{(س)} - \text{ق(س)} \times \text{هـ}^{/}\text{(س)}}{(\text{هـ(س)})^{٢}}$$

$$\text{ل}^{/}(٢) = \frac{\text{هـ}(٢) \times \text{ق}^{/}(٢) - \text{ق}(٢) \times \text{هـ}^{/}(٢)}{(\text{هـ}(٢))^{٢}}$$

$$-٢ = \frac{٢ \times -١ - ١ \times \text{هـ}^{/}(٢)}{(٢)^{٢}}$$

$$-٨ = -٢ - \text{هـ}^{/}(٢)$$

ومنها $\text{هـ}^{/}(٢) = ٦$ لماذا ؟

مثال (١٠): إذا كان $\text{ق(س)} = \frac{\text{هـ(س)}}{\text{س}+١}$ ، $\text{س} \neq -١$ أجد $\text{ق}^{/}(١)$، علماً بأن $\text{هـ}(١) = ٢$ ، $\text{هـ}^{/}(١) = ٣$

الحل: $$\text{ق}^{/}\text{(س)} = \frac{(\text{س}+١) \times \text{هـ}^{/}\text{(س)} - \text{هـ(س)} \times ١}{(\text{س}+١)^{٢}}$$

$$\text{ق}^{/}(١) = \frac{(١+١) \times \text{هـ}^{/}(١) - \text{هـ}(١)}{(٢)^{٢}}$$

$$= \frac{٢\text{هـ}^{/}(١) - \text{هـ}(١)}{٤}$$

$$= \frac{٢ \times ٣ - ٢}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$$

قاعدة (٨): إذا كان ص = ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكانت $ق^{/}(س)$ هي المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، فإن المشتقة الأولى للاقتران $ق^{/}(س)$ تسمى المشتقة الثانية للاقتران ق(س) ويرمز لها بالرمز $ق^{//}(س)$ أو $\frac{ى^{٢}ص}{ىس^{٢}}$ أو $ص^{//}$.

وكذلك يرمز للمشتقة الثالثة للاقتران ق(س) بالرمز $ق^{///}(س)$ أو $\frac{ى^{٣}ص}{ىس^{٣}}$ أو $ق^{(٣)}(س)$ أو $ص^{///}$، وهكذا.*

مثال (١١): إذا كان $ق(س) = س^{٣} - ٤س^{٢} + ٣س + ٢$ أجد $ق^{/}(س)$، $ق^{//}(س)$، $ق^{(٣)}(س)$.

الحل: $ق^{/}(س) = ٣س^{٢} - ٨س + ٣$

$ق^{//}(س) = ٦س - ٨$

$ق^{(٣)}(س) = ٦$

مثال (١٢): إذا كان $ص = ٣س^{٢} - ٥س + ٧$ ، أجد $\left.\frac{ىص}{ىس}\right|_{س=٢}$. $\left.\frac{ى^{٢}ص}{ىس^{٢}}\right|_{س=٢}$ ، $\left.\frac{ى^{٣}ص}{ىس^{٣}}\right|_{س=٢}$

الحل: $\frac{ىص}{ىس} = ٦س - ٥$ ومنها $\left.\frac{ىص}{ىس}\right|_{س=٢} = ٧$

$\frac{ى^{٢}ص}{ىس^{٢}} = ٦$ ومنها $\left.\frac{ى^{٢}ص}{ىس^{٢}}\right|_{س=٢} = ٦$

$\frac{ى^{٣}ص}{ىس^{٣}} =$ صفر ومنها $\left.\frac{ى^{٣}ص}{ىس^{٣}}\right|_{س=٢} =$ صفر.

مثال (١٣): إذا كان $ع(س) = ٣س^{٤} + ب\,س^{٢}$، وكانت $ع^{/}(١) = ٢٢$، أجد قيمة الثابت ب، ثم أجد $ع^{//}(٠)$.

الحل: $ع^{/}(س) = ١٢س^{٣} + ٢ب\,س$

$ع^{/}(١) = ١٢(١)^{٣} + ٢ب\,(١)$

$٢٢ = ١٢ + ٢ب$

$١٠ = ٢ب$ ومنها $ب = ٥$

$ع^{/}(س) = ١٢س^{٣} + ١٠س$

$ع^{//}(س) = ٣٦س^{٢} + ١٠$

$ع^{//}(٠) = ١٠$

* المشتقة النونية يرمز لها بالرمز $ق^{(ن)}$ ، $ن \geq ٣$

تمارين ومسائل

س١: أجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ) ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ب) ص = ٥س + ٣

ج) ص = $\frac{٣}{س^٢}$ + ٥س ، س ≠ ٠

د) ص = ٧س^٢ + $\sqrt[٣]{س^٢}$

هـ) ص = (٢س + ٥) (٣ − س^٣)

و) ص = $\frac{س}{س + ٣}$، س ≠ -٣ ، عندما س = ١

س٢: أجد ق$'$(٣)، علماً بأن ق(س) = س^٢ ـ س + ٥

س٣: إذا كان ق(س) = س^٢ + ٣س، وكان ل(س) = ق(س) + ٣هـ(س)، هـ(٢) = ٥، هـ$'$(٢) = ١ أجد ل$'$(٢).

س٤: إذا كان ق(س) = $\frac{٣س+٢}{٤س+١}$ ، س ≠ $\frac{-١}{٤}$ ، أحسب ق$'$(٢)؟

س٥: إذا كانت ق(س) = س^٣ ل(س) + هـ(س)، وكان ل(٢) = ٥، هـ$'$(٢) = ٧ ، ل$'$(٢) = −٣ فما قيمة ق$'$(٢) ؟

س٦: أجد المشتقة الثانية لكل من الاقترانات إزاء النقط المبينة بجانبها:

أ) ق(س) = س^٤ − ٢س^٣ + س + ١ ، س = ٢

ب) هـ(س) = $\frac{١}{\sqrt{س}}$، س > ٠ ، س = ١

س٧: أجد المشتقة الأولى والثانية والثالثة للاقتران ق(س) = ٢س^٤ + س^٣ ـ ٤س + ١، ثم أبين أن ق$^{(٥)}$(١) = صفر.

ورقة عمل

س(١): إذا كان $\begin{bmatrix} ٢ & \text{س} \\ \text{س} & \text{ص} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ \text{ص} & \text{ع} \end{bmatrix}$ أجد قيم كل من س، ص، ع ؟

س(٢): إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣- \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$، أجد المصفوفة ب$_{٢×٣}$ بحيث أ + ب = و

س(٣): إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢- & ٢ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$ وكانت جـ = أ . ب، أجد قيمة جـ$_{٢١}$.

س(٤): إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & ٢- & ٣- \\ ١- & ٢ & \text{س} \\ ٢- & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = -٢، أجد قيمة س.

س(٥): إذا كان ق(س) = ٥ − ٢س، أجد ق$'$(٤) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

س(٦): إذا كان ق(س) = ٢س^{٥} ، أجد ق$'$(س) ، ق$'$(-١).

نموذج إختبار

س١: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١. إذا كان $\begin{bmatrix} ٢س+٣ & ٥ \\ ٤ & ص-٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س ، ص على الترتيب ؟

أ) ٧،-١ ب) ٥،-٣ ج) ٢،١ د) ١،٢

٢. إذا كانت سـ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ فما قيمة | ٢سـ | ؟

أ) ٣ ب) ٦ ج) ١٢ د) -٢٨

٣. ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ٣ & ٣س \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة؟

أ) ١٢ ب) -٢ ج) ٢ د) صفر

٤. إذا كان $أ_س = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $أ_ص = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ أجد المصفوفة أ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

٥. ما ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) المارّ في النقطتين أ (١، ٣) ، ب (٣، ٩)؟

أ) -٣ ب) ٣ ج) ٢ د) ٦

٦. إذا كان ق(س) = $\sqrt{س}$، ما قيمة ق$'$(٤)؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) - $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{١}{٤}$ د) ٢

س٢: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ & ٢ \\ ٤ & -٥ & ٦ \end{bmatrix}$ جـ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ،

د= $\begin{bmatrix} -٢ & ٦ & ٢ \\ ٥ & ١ & -٤ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ل= $\begin{bmatrix} -٤ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ أجد الآتي (إن أمكن):

أ) جـ + ل   ب) ٣جـ − ٢ل   جـ) (أ.ب) . د   د) ل $^{-١}$ هـ) | جـ |

س٣: أستخدم طريقة كريمر لحل النظام الآتي:

٢ ص − ٤ س = ٢ ، ٥س + ص = ٨

س٤: إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_{١}$ = ٢ إلى $س_{٢}$ = ٥ هو ١٠، أجد ق(٥) علماً بأن ق(٢) = ٦ ؟

س٥: إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = $س^{٢}$ + ٣ عندما تتغير س من ٢ إلى أ يساوي ٦ فما قيمة الثابت أ ؟

س٦: إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ + ١، أجد $ق^{/}$(٣) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.