

١٢

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

"التكنولوجي"

الفترة الثانية

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف +970 2 2983280 | فاكس +970 2 2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

التفاضل Differentiation

٤	متوسط التغير Rate of Change
٨	مفهوم المشتقة الأولى First Derivative
١٣	قواعد الإشتقاق (١) Differentiation Rules
١٨	قواعد الإشتقاق (٢) Differentiation Rules
٢٢	قاعدة السلسلة (مشتقة الاقتران المركب) Chain Rule
٢٦	القيم القصوى Extreme Values

يتوقع من الطلبة بعد دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاشتقاق في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إلى مفهوم متوسط التغير للاقتران وإيجاده.
٢. التعرف إلى مفهوم المشتقة الأولى للاقتران، وإيجادها باستخدام التعريف.
٣. التعرف على قواعد الاشتقاق، واستخدامها لإيجاد مشتقات بعض الاقترانات.
٤. إيجاد معادلة المماس، ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة تقع عليه.
٥. إيجاد المشتقة الأولى باستخدام قاعدة السلسلة.
٦. إيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران.

متوسط التغير (Rate of Change):

تعريف:

إذا كان $v = u(s)$ اقتراناً، وتغيرت فيه s من s_1 إلى s_2 فإن $\Delta s = s_2 - s_1$ تمثل التغير في s وتقرأ دلتا s .
وبناءً على التغير في s تتغير v ، حيث $\Delta v = v_2 - v_1 = u(s_2) - u(s_1)$ تمثل التغير في v .

مثال (1): إذا كان $v = u(s) = 2s + 3$ جد Δs ، Δv ، عندما تتغير s من $s_1 = 1$ إلى $s_2 = 4$.

الحل: $\Delta s = s_2 - s_1 = 4 - 1 = 3$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = u(s_2) - u(s_1) = u(4) - u(1) = 11 - 5 = 6$$

يسمى المقدار $\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} = \frac{u(s_2) - u(s_1)}{s_2 - s_1}$ متوسط التغير للاقتران $v = u(s)$ عندما تتغير s من s_1 إلى s_2 .

مثال (٢): إذا كان $v = u(s) = 2s^2 + 4$ ، $s \in \mathbb{R}$ ، وتغيرت s من $s_1 = 2$ إلى $s_2 = 5$ ، أجد متوسط التغير للاقتزان $u(s)$.

$$\text{الحل: متوسط التغير} = \frac{u(s_2) - u(s_1)}{s_2 - s_1}$$

$$= \frac{u(5) - u(2)}{5 - 2}$$

$$= \frac{12 - 54}{2 - 5}$$

$$= 14$$

مثال (٣): إذا كان $v = u(s) = 3s - 1$ ، $s \in \mathbb{R}$ ، وزادت s من $s_1 = 3$ بمقدار ٢ ، أجد متوسط التغير للاقتزان $u(s)$.

$$\text{الحل: متوسط التغير} = \frac{u(s_2) - u(s_1)}{s_2 - s_1}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

$$2 = s_2 - 3 \quad \text{ومنها } s_2 = 5$$

$$\text{متوسط التغير} = \frac{u(5) - u(3)}{s_2 - s_1}$$

$$= \frac{8 - 14}{3 - 5}$$

$$= 3$$

مثال (٤): إذا كان متوسط تغير الاقتزان $v = u(s)$ عندما تتغير s من $s_1 = 2^-$ إلى $s_2 = 9$ يساوي ٦ ، أجد:

أ. التغير في v . ب. $u(9)$ علماً بأن $u(2^-) = 6$

$$\text{الحل: أ. التغير في } v = \Delta s$$

$$= s_2 - s_1$$

$$= 9 - 2^-$$

$$= 11$$

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\Delta \text{ص}}{11} = 6^- \text{، ومنها } \Delta \text{ص} = 11 \times 6^- = 66^-$$

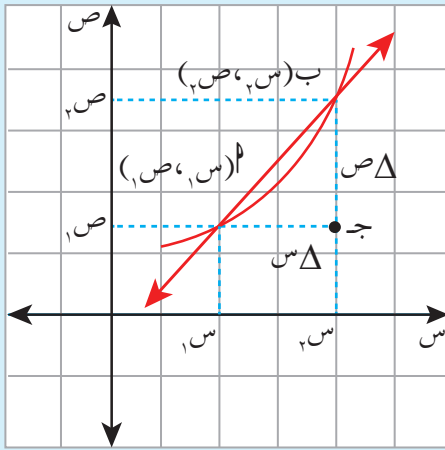
$$\text{ب. } \Delta \text{ص} = \text{ص}_2 - \text{ص}_1 =$$

$$= 9 - (2^-) =$$

$$66^- = 9 - \text{ص}_1 =$$

$$\text{ص}_1 = 9 - 66^- =$$

$$= 60^-$$



أذكر:



إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $\text{ص} = \text{ق}(س)$ ، والنقطتان $A(س_1, \text{ص}_1)$ ، $B(س_2, \text{ص}_2)$ واقعتين عليه، فإن ميل

$$\text{المستقيم القاطع } AB = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{س_2 - س_1}$$

$$\text{ومتوسط التغير للاقتران } \text{ص} = \text{ق}(س) \text{ يساوي } \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{س_2 - س_1}$$

أي أن متوسط التغير للاقتران يساوي ميل المستقيم القاطع AB .

مثال (٥): تقع النقطتان $A(1^-, 3^-)$ ، $B(3^-, 9^-)$ على منحنى الاقتران $\text{ص} = \text{ق}(س)$ ، أجد ميل المستقيم

القاطع AB .

$$\text{الحل: ميل المستقيم القاطع } AB = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$$

$$= \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{س_2 - س_1} =$$

$$= \frac{9^- - 3^-}{3^- - 1^-} =$$

$$= 3$$

تمارين ومسائل (١-٣)



س١: إذا كان $v = v(s)$ جد Δs ، Δv عندما تتغير s :

أ. من $s_1 = 2$ إلى $s_2 = 3.8$

ب. من $s_1 = 4$ إلى $s_2 = 2$

س٢: أجد متوسط التغير للاقتران $v = v(s)$ في الحالات الآتية:

أ. $v(s) = \sqrt{s-3}$ ، عندما تتغير s من $s_1 = 7$ إلى $s_2 = 4$

ب. $v(s) = s^2 - 1$ ، عندما $s_1 = 2$ ، $\Delta s = 4$

س٣: تقع النقطتان $A(2, 5)$ ، $B(3, 10)$ على منحنى الاقتران $v = v(s)$ ، أجد ميل المستقيم

القاطع AB .

س٤: ليكن $v = v(s)$ اقتراناً، وكان متوسط تغير الاقتران عندما تتغير s من $s_1 = 1$ إلى $s_2 = 4$

هو 13 ، أجد:

أ. التغير في v .

ب. $v(4)$ علماً بأن $v(1) = 6$

مفهوم المشتقة الأولى (First Derivative):

تعريف:



المشتقة الأولى للاقتران $u = u(s)$ عند النقطة $(s_1, u(s_1))$ هي:

$$\text{نها} \leftarrow \frac{u(s_1 + \Delta s) - u(s_1)}{\Delta s} \text{ ويرمز لها بالرمز } u'(s_1) \text{ أو } \frac{du}{ds} \text{ أو } \frac{du}{ds} \Big|_{s=s_1} \text{ ،}$$

$$\text{وللتبسيط يمكن كتابة } \Delta s = h \text{ ، فتكون } u'(s_1) = \text{نها} \leftarrow \frac{u(s_1 + h) - u(s_1)}{h}$$

مثال (١): إذا كان $u(s) = 5$ ، أجد $u'(2)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

$$\text{الحل: } u'(2) = \text{نها} \leftarrow \frac{u(2) - u(2 + h)}{h}$$

$$= \frac{5 - 5}{h} = \text{نها} \leftarrow \frac{0}{h} = \text{صفر.}$$

مثال (٢): إذا كان $u(s) = s^3$ ، أجد $u'(1)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

$$\text{الحل: } u'(1) = \text{نها} \leftarrow \frac{u(1) - u(1 + h)}{h}$$

$$= \frac{(1)^3 - (1 + h)^3}{h}$$

$$= \frac{1 - (1 + 3h + 3h^2 + h^3)}{h}$$

$$= \frac{1 - 1 - 3h - 3h^2 - h^3}{h}$$

$$= \frac{-3h - 3h^2 - h^3}{h}$$

$$= -3 - 3h - h^2$$

$$= -3$$

نشاط (١):



إذا كان $u(س) = ٥ - ٢س$ ، أجد $u'(٤)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

$$\text{الحل: } u'(٤) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(٤) - u(٤+h)}{h}$$

$$= \dots\dots\dots =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{٥ - ٢(٤+h) - (٥ - ٢ \cdot ٤)}{h}$$

$$= \dots\dots\dots =$$

$$= -٢$$

مثال (٣): إذا كان $u(س) = ٣س^٢ + ١$ ، أجد $u'(٢)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟



$$\text{الحل: } u'(٢) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(٢) - u(٢+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{٣(٢+h)^٢ + ١ - (٣ \cdot ٢^٢ + ١)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{٣(٤ + ٤هـ + هـ^٢) + ١ - ١٣}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{١٣ + ١٢هـ + ٣هـ^٢ - ١٣}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{١٢هـ + ٣هـ^٢}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{هـ(١٢ + ٣هـ)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (١٢ + ٣هـ)$$

$$= ١٢ + ٣ \cdot ٠ =$$

$$= ١٢$$

مثال (٤): إذا كان $u(2) = 8$ ، $u(2) = 2$ ، أجد u هنا $\frac{u(2) - (2)u}{5}$

الحل: هنا $\frac{u(2) - (2)u}{5}$

(لماذا؟) $\frac{u(2) - (2)u}{5} =$ هنا $\frac{u(2) - (2)u}{5}$

(لماذا؟) $\frac{u(2)}{5} =$

$2 \times \frac{1}{5} =$

$\frac{2}{5} =$

مثال (٥): إذا كان متوسط تغير الاقتران $v = u(s)$ عندما تتغير في الفترة $[3, 3 + h]$ يساوي $\frac{h^2 - 5h}{h}$ أجد $u(3)$.

الحل: متوسط التغير $= \frac{u(3) - (3)u}{h} = \frac{h^2 - 5h}{h}$

هنا $\frac{u(3) - (3)u}{h} = \frac{h^2 - 5h}{h}$

هنا $\frac{h^2 - 5h}{h} =$

هنا $\frac{h(3 - 5)}{h} = 0$

ألاحظ أن $u(3)$ تساوي نهاية متوسط التغير للاقتران $u(s)$ في الفترة $[3, 3 + h]$ عندما h تؤول إلى الصفر.



إذا كان $س = ٣ + ٢$ ، أجد $س$ باستخدام تعريف المشتقة، ثم أجد $س$.

$$\dots = \frac{(س + هـ) - ٣ + ٢(س + ٣)}{هـ} = \text{الحل: } س$$

$$= \frac{س٢ + ٢س هـ + هـ٢ - ٣ + ٢س + ٦}{هـ}$$

$$\dots = \frac{س٢ + ٢س هـ + هـ٢}{هـ}$$

$$= (س + هـ)$$

$$= س٢$$

$$\text{ومنها } ٢ \times ٢ = (٢)$$

$$= ٤$$

تمارين ومسائل (٢-٣)



س١: باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، أجد u/s عند النقطة المعطاة في كل حالة:

أ. $u/s = 2s - 7$ ، $s = 3$

ب. $u/s = 3 - s$ ، $s = 2$

ج. $u/s = s^2 + s$ ، $s = 0$

س٢: إذا كان $u/s = 3$ ، $h = 8$ ، أجد:

أ. $\frac{u(3) - u(3+h)}{h}$

ب. $\frac{u(3) - u(3+h)}{2h}$

ج. $\frac{u(3) - u(3+h)}{h}$

س٣: إذا كان متوسط تغير الاقتران $v = u/s$ في الفترة $[3, 3+h]$ يساوي $\frac{2}{(h+1)}$ أجد u/s .

س٤: إذا كانت $\Delta v = \frac{7h^2 - h^3}{4}$ هي التغير في الاقتران $v = u/s$ عندما تتغير s من $s_1 = 5$ إلى

$s_2 = 5 + h$ ، أجد u/s .

قواعد الاشتقاق (١): (Differentiation Rules)

نشاط (١):



حاول همّام إيجاد $u(2)$ حيث $u(s) = s^2 + s^3 - 2s^2$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، فبدأ بالحل بالطريقة التي تعلمها في الدرس السابق كما يأتي:

$$u(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(2+h) - u(2)}{h}$$

$$u(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + (2+h)^3 - 2(2+h)^2 - 2^2 + 2^2 - 2^3}{h}$$

فوجد صعوبة في إيجاد هذه النهاية، كيف سيجد همّام $u(2)$ ؟

قاعدة (١):



إذا كان $u(s) = c$ حيث c عدد حقيقي، فإن $u'(s) = 0$ صفر. $\forall s \in \mathbb{R}$.

مثال (١): إذا كان $u(s) = 3$ ، أجد $u'(s)$ ، $u'(5)$.

الحل: $u'(s) = 0$ صفر لجميع قيم $s \in \mathbb{R}$

$$u'(5) = 0 \text{ صفر}$$

قاعدة (٢):



إذا كان u (س) = s^u فإن u '(س) = $u s^{u-1}$ ، u عدد حقيقي.

مثال (٢): أجد المشتقة الأولى $\frac{d}{ds}$ في كل من الحالات الآتية:

- (أ) $v = s^4$
 (ب) $v = s^{-5}$ ، $s \neq 0$
 (ج) $v = \frac{1}{s^3}$ ، $s \neq 0$
 (د) $v = \sqrt{s}$ ، $s \geq 0$

الحل: (أ) $v = s^4$

$$\frac{d}{ds} s^4 = s^{4-1} = s^3 ، \forall s \in \mathbb{R}$$

(ب) $v = s^{-5}$ ، $s \neq 0$

$$\frac{d}{ds} s^{-5} = s^{-5-1} = s^{-6} = \frac{1}{s^6}$$

(ج) $v = \frac{1}{s^3} = s^{-3}$ ، $s \neq 0$

$$\frac{d}{ds} s^{-3} = s^{-3-1} = s^{-4} = \frac{1}{s^4}$$

(د) $v = \sqrt{s} = s^{\frac{1}{2}}$ ، $s \geq 0$

$$= s^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{ds} s^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} s^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{s}} ، s > 0$$

قاعدة (٣):



إذا كان الاقترانان u (س) ، v (س) قابلين للاشتقاق عند s ، وكانت $u \neq 0$ ، وكان $v = u$ (س) ،

فإن v '(س) = u '(س).

مثال (٣): إذا كان $٢س = (س)٠$ ، جد $١٠(س)$ ، $١٠(س)$.

الحل: $٢س = (س)٠$

$$١٠(س) = ١٠ \times ٢س = ١٠ \times ١٠$$

$$١٠(س) = ١٠ \times ١٠ = ١٠٠$$

$$١٠٠ = ١٠ \times ١٠ =$$

قاعدة (٤):



إذا كان الاقترانان $ك(س)$ ، $ع(س)$ قابلين للاشتقاق عند $س$ ، وكان $٢(س) = ك(س) + ع(س)$ ، فإن $٢'(س) = ك'(س) + ع'(س)$

مثال (٤): إذا كان $ك(س) = ٢س$ ، $ع(س) = ٢س$ ، $٢(س) = ك(س) + ع(س)$ ، جد $٢'(س)$ ، $٠(س)$ ؟

الحل: $٢'(س) = ك'(س) + ع'(س)$

$$٢'(س) = (٢)' + (٢)' =$$

$$٢ + ٢س =$$

$$٢ = ٢ + ٠ \times ٢ = ٢$$

قاعدة (٥):



إذا كان الاقترانان $ك(س)$ ، $ع(س)$ قابلين للاشتقاق عند $س$ ، وكان $٢(س) = ك(س) - ع(س)$ ، فإن $٢'(س) = ك'(س) - ع'(س)$

ويمكن تعميم القاعدتين السابقتين لتشمل أكثر من اقترانين.

مثال (٥): إذا كان $٢(س) = ٢س - ٥س + ٦$ ، جد $٢'(س)$ ، $٣(س)$

الحل: $٢(س) = ٢س - ٥س + ٦$

$$٢'(س) = ٢س - ٥س + ٦$$

$$٢'(س) = ٢ - ٥ + ٠ =$$

$$١ =$$

مثال (٦): إذا كان ك/ع = ٣ ، ع/١ = ٢ وكان و/س = ك/س - ٢ ع/س ، جد و/١ ؟

الحل: و/س = ك/س - ٢ ع/س

$$\frac{و}{١} = \frac{ك}{١} - ٢ \frac{ع}{١}$$

$$٢ \times ٢ - ٣ =$$

$$١^- =$$

مثال (٧): إذا كان و/س = $\frac{١}{س}$ ، س \neq صفر ، أجد $\frac{و(س + هـ) - و(س)}{هـ}$

الحل: $\frac{و(س + هـ) - و(س)}{هـ} = \frac{و}{س}$

$$\text{لكن } و/س = \frac{١}{س} = \frac{١^-}{س^١}$$

$$\frac{و}{س} = \frac{١^-}{س^٢}$$

$$\frac{١^-}{س^٢} =$$

ومنها $\frac{١^-}{س^٢} = \frac{و(س + هـ) - و(س)}{هـ}$

تمارين ومسائل (٣-٣)



س١: أجد $\frac{ق(٢) - ق(٢ + هـ)}{هـ}$ علماً بأن $ق(س) = س^٣ - س$.

س٢: أجد $\frac{ص}{س}$ الاقترانات الآتية:

$$أ) ص = \frac{١}{٢٦}$$

$$ب) ص = ٥س + ٣س^٢$$

$$ج) ص = \frac{٤}{س} ، س < صفر$$

س٣: أجد $ص' \Big|_{س=١}$ في كل حالة مما يأتي:

$$أ) ص = \frac{٣}{س} + ٥س ، س \neq ٠$$

$$ب) ص = ٧س^٢ + \sqrt{٢س}$$

س٤: إذا كان $ع(س) = ٣س^٤ + ب س^٢$ ، وكانت $ع(١) = ٢٢$ ، أجد قيمة الثابت ب.

قواعد الاشتقاق (٢): (Differentiation Rules)

سبق وأن قدمنا في البند السابق قواعد اشتقاق جمع اقترانات وطرحها، وكذلك مشتقة اقتران مضروب في عدد ثابت، وسنتناول في هذا البند مشتقة ضرب اقترانين، ومشتقة قسمة اقترانين.

قاعدة (١):



إذا كان u و v هـ (u, v) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان $l = u \times v$ فإن

$$l' = u' \times v + u \times v'$$

وبالكلمات

$$l' = u' \times v + u \times v'$$

مثال (١): إذا كان $v = (s^2 + 3s + 2)(s + 5)$ أجد $\frac{dv}{ds}$ عند $s = 2$.

الحل: $v = (s^2 + 3s + 2)(s + 5)$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{ds} = (s^2 + 3s + 2)' \times (s + 5) + (s^2 + 3s + 2) \times (s + 5)'$$

$$= (2s + 3) \times (s + 5) + (s^2 + 3s + 2) \times 1$$

$$= (2 \times 2 + 3) \times (2 + 5) + (2^2 + 3 \times 2 + 2) \times 1$$

$$= 7 \times 7 + 10 = 59$$

أفكر وأناقش: هل هناك طريقة أخرى للحل؟

مثال (٢): إذا كان $u = (2) \times (2) = 4$ ، $v = (2) \times (2) = 4$ وكان $w = u \times v$ أجد w' .

$$w' = u' \times v + u \times v'$$

$$= (2)' \times (2) + (2) \times (2)'$$

$$= 3 \times 4 + 6 \times 5 =$$

$$12 + 30 =$$

$$42 =$$

قاعدة (٢):



إذا كان الاقتران ل (س) = $\frac{و(س)}{هـ(س)}$ ، و (س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للاشتقاق هـ (س) $\neq 0$ فإن:

$$\frac{هـ(س) \times و'(س) - و(س) \times هـ'(س)}{هـ(س)^2} = ل'(س)$$

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2} = \text{وبالكلمات ل'(س)}$$

مثال (٣): إذا كان و (س) = $\frac{١ + س٣}{٥ - س٢}$ ، س $\neq \frac{٥}{٢}$ ، أجد و'(س).

$$\text{الحل: و'(س)} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

$$= \frac{٢ \times (١ + س٣) - ٣ \times (٥ - س٢)}{(٥ - س٢)^2}$$

$$= \frac{١٧ - (٢ + س٦) - (١٥ - س٦)}{(٥ - س٢)^2}$$

مثال (٤): إذا كان ل (س) = $\frac{و(س)}{هـ(س)}$ ، هـ (س) $\neq 0$ ، وكان و'(٢) = ١^- ، و (٢) = ١ ، هـ(٢) = ٢

$$\text{ل'(٢)} = ٢^- \text{ جد هـ'(٢).}$$

$$\text{الحل: ل'(س)} = \frac{هـ(س) \times و'(س) - و(س) \times هـ'(س)}{هـ(س)^2}$$

$$\text{ل'(٢)} = \frac{هـ(٢) \times و'(٢) - و(٢) \times هـ'(٢)}{هـ(٢)^2}$$

$$٢^- = \frac{٢ \times ١ - ١^- \times ٢}{٢^2}$$

$$٨^- = ٢^- - هـ'(٢) \text{ ومنها هـ'(٢) = } ٦$$

❖ **مثال (٥):** إذا كان $\frac{هـ(س)}{س+١} = س - ١$ ، أجد $هـ(١)$ علماً بأن $هـ(١) = ٢$ ، $هـ(١) = ٣$

$$\text{الحل: } هـ(س) = \frac{١ \times (س) - (س) \times (١ + س)}{(س + ١)^2}$$

$$هـ(١) = \frac{(١) - (١) \times (١ + ١)}{(٢)^2}$$

$$= \frac{١ - ٢}{٤}$$

٤

$$= \frac{٢ - ٣ \times ٢}{٤}$$

٤

$$= \frac{٤}{٤}$$

٤

$$= ١$$

تمارين ومسائل (٤-٣)



س١: أجد $\frac{ص}{س}$ لكل من الافتراضات الآتية:

أ. $ص = (س٢ + ٥) (س٣ - ٣)$

ب. $ص = \frac{س}{س٣ + ٣} = س٣ \neq ٣$ ، عندما $س = ١$

س٢: أجد $و/٣$ علماً بأن $و(س) = س٢ - س + ٥$.

س٣: إذا كان $و(س) = س٣ + ٢س$ ، وكان $ل(س) = و(س) + ٣ه(س)$ ، $ه(٢) = ٥$ ، $ه(٢) = ١$ ، أجد $ل(٢)$.

س٤: إذا كان $و(س) = \frac{س٣ + ٢}{١ + س٤}$ ، $س \neq \frac{١^-}{٤}$ ، جد $و(٢)$ ؟

س٥: إذا كان $و(س) = س٣ ل(س) + ه(س)$ ، وكان $ل(١^-) = ٥$ ، $ه(١^-) = ٧$ ، $ل(١^-) = ٣^-$ ، فما قيمة $و(١^-)$ ؟

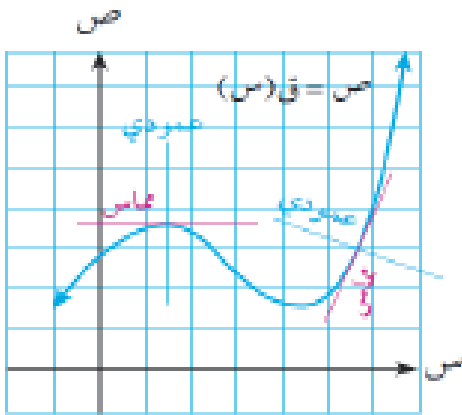
تطبيقات هندسية (المماس والعمودي): Tangent Line

تعريف:

- ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران $v = v(s)$ عند النقطة (s_1, v_1) الواقعة عليه يساوي $v'(s_1)$ ، ومعادلة المماس هي: $v - v_1 = m(s - s_1)$ ، حيث $m = v'(s_1)$ ، $v_1 = v(s_1)$.
- ميل العمودي على منحنى الاقتران $v = v(s)$ عند النقطة (s_1, v_1) الواقعة عليه يساوي $-\frac{1}{m}$ ، $m \neq 0$.
- ومعادلة العمودي على المنحنى هي: $v - v_1 = -\frac{1}{m}(s - s_1)$ ، حيث $m = v'(s_1)$ ، $v_1 = v(s_1)$.

ملاحظة:

عندما يكون المماس أفقياً فإن ميله يساوي صفرًا، ويكون موازياً لمحور السينات.



المشتقة الأولى للاقتران $v = v(s)$ عند $s = s_1$ تمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة التي إحداثياتها (s_1, v_1) ، وبمعرفة نقطة التماس (s_1, v_1) يمكننا إيجاد معادلة المماس لمنحنى الاقتران، ومعادلة العمودي عليه.

مثال (١): أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $و(س) = س^٣ - س^٢ + ١$ عندما $س = ٣$.

الحل: ميل المماس عند $(س = ٣)$ هو $و(٣)$

$$و(س) = س^٣ - س^٢ + ١$$

$$و(٣) = ٣^٣ - ٣^٢ + ١$$

$$= ٢١$$

ميل المماس = ٢١

مثال (٢): أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $و(س) = \frac{س^٢}{١ + س}$ عند النقطة $(١, \frac{١}{٢})$ الواقعة عليه.

الحل: معادلة المماس هي:

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

$$نقطة التماس هي $(س_١, ص_١) = (١, \frac{١}{٢})$$$

$$ميل المماس عند $(س_١, ص_١) = م = و(١)$$$

$$لكن و(س) = \frac{(س^٢) - (س^٣ \times (١ + س))}{(س^٢)(١ + س)}$$

$$و(١) = \frac{١ \times ٢ \times ١ - ١ \times ٣ \times (١ + ١)}{(١)(١ + ١)}$$

$$= \frac{٢ - ٣ \times ٢}{(٢)}$$

$$= \frac{٢ - ٦}{٤}$$

$$= \frac{٤}{٤} = ١$$

أي أن معادلة المماس هي:

$$ص - \frac{١}{٢} = ١(س - ١)$$

$$ص - ١ = \frac{١}{٢}(س - ١)$$

$$ص - ١ = \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}$$

❖ **مثال (٣):** أجد النقطة على المنحنى $v = u(س) = س^٢ - ٤س + ٥$ ، والتي يكون عندها المماس أفقياً.

الحل: نقطة التماس هي $(س_١ ، ص_١) = (س_١ ، u(س_١))$

بما أن المماس أفقي فإن ميل المماس = صفر

$$u'(س) = صفر$$

$$u'(س) = ٢س - ٤$$

$$u'(س) = ٢س - ٤ = صفر$$

$$٢ = س_١$$

نقطة التماس هي $(٢ ، u(٢)) = (٢ ، ١)$ (لماذا؟)

❖ **مثال (٤):** أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $v(س) = (س^٢ + ١)(س + ١)$ عند النقطة

$(١ ، ٤)$ الواقعة عليه.

الحل: معادلة العمودي على المماس لمنحنى عند النقطة $(١ ، ٤)$ هي:

$$ص - ص_١ = -\frac{١}{م} (س - س_١) \text{ حيث } (س_١ ، ص_١) = (١ ، ٤) ، م = u'(١)$$

$$u'(س) = (س^٢ + ١) \times ٢س + (س + ١) \times ٢س =$$

$$= ٢س^٢ + ٢س^٢ + ٢س + ٢س =$$

$$= ٤س^٢ + ٤س =$$

$$م = u'(١) = ٤(١) + ٤(١) = ٨$$

$$٨ =$$

$$\frac{١}{٨} = -\frac{١}{م} = -\frac{١}{٨} \text{ ومنها ميل العمودي}$$

$$\text{معادلة العمودي هي } ص - ٤ = -\frac{١}{٨} (س - ١)$$

$$٨ص - ٣٢ = -س + ١ \text{ (لماذا؟)}$$

تمارين ومسائل (٥-٣)



س١: أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $(س)$ = $\frac{س^٢ + ٢}{س + ٣}$ ، عندما $س = ٢^-$.

س٢: أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $(س)$ = $س^٣ + ٢س^٢ - س + ١$ عند النقطة $(١, ٠)$ الواقعة عليه.

س٣: أجد النقطة الواقعة على منحنى الاقتران $(س)$ = $س^٢ - ٣س + ٥$ التي يكون المماس عندها أفقياً.

س٤: أجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران $(س)$ عند النقطة $(٧, ٠)$ الواقعة عليه، ويعامد المستقيم الذي ميله = $-\frac{١}{٣}$.

س٥: إذا كان $(س)$ = $س^٢ + ٥س - ٢$ ، وكان ميل المماس لمنحنى $(س)$ عندما $(س = ١)$ يساوي ١١ ، أجد قيمة الثابت ٢ .

قاعدة السلسلة (مشتقة الاقتران المركب) :Chain Rule

قاعدة السلسلة:



إذا كان h (س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند s ، وكان u (س) قابلاً للاشتقاق عند $h(s)$ فإن الاقتران المركب $(h \circ u)$ (س) يكون قابلاً للاشتقاق عند s ، ويكون $(h \circ u)'(s) = u'(h(s)) \times h'(s)$.

مثال (١): إذا كان $u(s) = s^2 - 1$ ، $h(s) = s^2 + 1$ أجد $(h \circ u)'(4)$ ، $(h \circ u)'(4)$.

الحل: $(h \circ u)'(4) = u'(h(4)) \times h'(4)$

$$u'(s) = 2s \text{ ، } h'(s) = 2$$

$$h(4) = 17 \text{ ، } u'(17) = 34$$

$$(h \circ u)'(4) = 34 \times 2 = 68$$

$$2 \times 17 =$$

$$34 =$$

$$(h \circ u)'(4) = 68 = u'(17) \times h'(4) = 34 \times 2 \text{ (لماذا؟)}$$

$$68 = 34 \times 2 \text{ (لماذا؟)}$$

مثال (٢): إذا كان $u(s) = s^2 + s + 5$ ، $h(s) = s^2 + 1$ ، أجد $(h \circ u)'(1)$ ، ثم أجد $(h \circ u)'(1)$.

الحل: $(h \circ u)'(s) = u'(h(s)) \times h'(s)$.

$$u'(s) = 2s + 1 \text{ ، } h'(s) = 2s$$

$$\text{ومن ذلك } (h \circ u)'(s) = (2s + 1) \times 2s$$

$$(h \circ u)'(1) = (2 \times 1 + 1) \times 2 \times 1 = 6 \text{ (لماذا؟)}$$

$$(h \circ u)'(1) = 6 = 2 \times 1 \times 3 \text{ (لماذا؟)}$$

$$6 = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = (h \circ u)'(1)$$



نتيجة (١):

إذا كان $ص = و(ع)$ ، $ع = ه(س)$ ، اقترانين قابلين للاشتقاق، فإن $ص = و(ه(س))$ وبالتالي

$$\frac{ص}{س} = \frac{و(ع)}{ع} \times \frac{ع}{ه(س)}$$

$$\frac{ص}{س} \times \frac{ع}{ع} =$$

$$\frac{ص}{س} \times \frac{ع}{ع} = \frac{ص}{س} \text{ أي أن } \frac{ص}{س}$$

❖ **مثال (٣):** إذا كانت $ص = ع^٢ + ع$ ، $ع = ٣ - ٢س$ ، أجد $\frac{ص}{س}$.

الحل: $\frac{ص}{س} = \frac{ع}{س} \times \frac{ص}{ع}$ ، $٢ = \frac{ع}{س}$ ، $١ + ع٢ = \frac{ص}{ع}$

$$٢ \times (١ + ع٢) =$$

$$٢ \times (١ + (٣ - ٢س)٢) =$$

$$٢ \times (س٤ - ٧) =$$

$$١٤س + ٨ =$$

❖ **مثال (٤):** إذا كانت $ص = م^٢ + ٢م$ ، $م = س^٢ + س + ١$ ، أجد $\frac{ص}{س}$ عندما $س = ٠$.

الحل: $\frac{ص}{س} = \frac{م}{س} \times \frac{ص}{م}$

(لماذا؟)

$$(١ + س٢)(٢ + م) =$$

(لماذا؟)

عندما $س = ٠$ تكون $م = ١$

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} \times (٢ + ١ \times ٢) = (١ + ٠ \times ٢) \times (٢ + ١ \times ٢) = ٤$$

❖ **مثال (٥):** إذا كان $و(س)$ ، $ه(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن: $ه(١) = ٤$ ، $و(١) = ١$ ،

$$و(٦) = ٢، ه(١) = ٦، أجد و(٥٠ه) / (١).$$

$$\text{الحل: } و(٥٠ه) / (١) = و(١ه) \times و(١) / (١)$$

$$٤ \times و(٦) / (١) =$$

$$٨ = ٤ \times ٢ =$$

نتيجة (٢):

إذا كانت $ص = و(س)^٧$ ، ٧ عدد نسبي وكان $و(س)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:

$$\frac{ص}{س} = و(س)^٧ \cdot و(س) / (س)$$

❖ **مثال (٦):** إذا كانت $ص = (٤س + ٢)^٣$ أجد $\frac{ص}{س}$.

$$\text{الحل: } \frac{ص}{س} = ٤ \times (٢ + ٤س)^٢$$

$$= ١٢ (٢ + ٤س)^٢$$

تمارين ومسائل (٦-٣)



س١: إذا كان $و(س) = س^٢$ ، $ه(س) = س + ١$ أجد $و(ه(س))$.

س٢: إذا كانت $ص = (١ - س)^٢$ ، أجد $\frac{ص}{س}$.

س٣: إذا كان $ص = ع^٢ - ٥ع + ١$ ، $ع = ٢س + ٣$ ، أجد $\frac{ص}{س}$.

س٤: إذا كان $م(س) = (س^٢ - س)^٤$ ، أجد $م(٢)$.

س٥: إذا كان $و(س) = (٣س^٢ + ١)$ ، أجد $و(١)$ ، علماً بأن $ه(١) = ٥$ ، $ه(٤) = ٢$.

س٦: إذا كان $و(س)$ ، $ه(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن: $ه(٢) = ٣$ ، $و(٢) = ٥$ ،

$و(٤) = ٢ - ٤$ ، $ه(٢) = ٤$ ، $و(٢) = ٣$ ، $ه(٣) = ١$ ، أجد $و(ه(٢))$ ، $ه(و(٢))$.

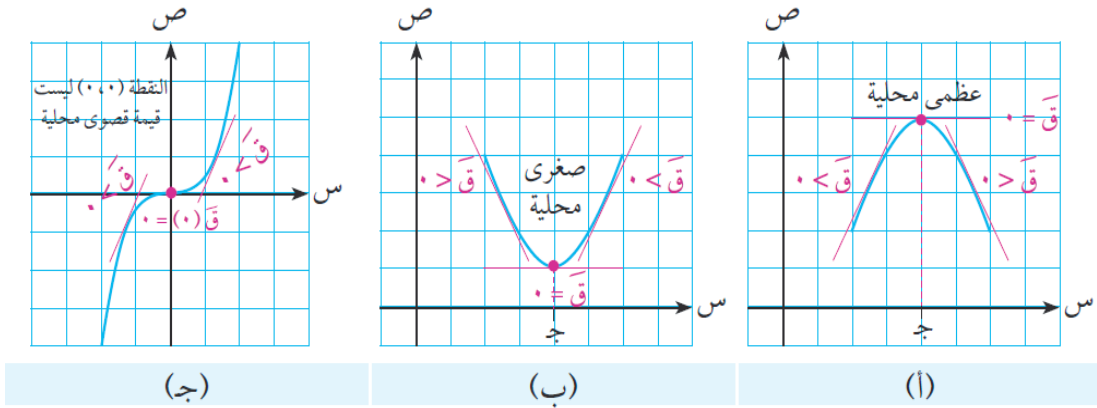
القيم القصوى (Extreme Values):

تعريف: *

- إذا كان $v = u(s)$ اقتراناً وكانت $s = j$ في مجال الاقتران، فإنه يقال أن $v(j)$:
- أ. قيمة عظمى محلية للاقتران، إذا كانت $v(j) \leq u(s)$ لجميع قيم s المجاورة لـ j .
- ب. قيمة صغرى محلية للاقتران، إذا كانت $v(j) \geq u(s)$ لجميع قيم s المجاورة لـ j .

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحلية:

إن التمثيل البياني لأي اقتران على مجاله يساعد في تحديد نقط القيم القصوى المحلية للاقتران، ولكن: كيف تساعدنا المشتقة الأولى لهذا الاقتران في تعيين القيم القصوى المحلية له؟
تأمل الأشكال الآتية، وألاحظ العلاقة بين إشارة $u'(s)$ والقيم القصوى للاقتران.



في الشكل (أ): $v(j)$ قيمة عظمى محلية للاقتران $v(s)$ ، $v(j)$ = صفر، إشارة $u'(s)$ تغيرت من موجبة لقيم $s > j$ إلى سالبة لقيم $s < j$.

في الشكل (ب): $v(j)$ قيمة صغرى محلية للاقتران $v(s)$ ، $v(j)$ = صفر، إشارة $u'(s)$ تغيرت من سالبة لقيم $s > j$ إلى موجبة لقيم $s < j$.

في الشكل (ج): $v(j)$ = صفر، إشارة $u'(s)$ موجبة لقيم $s > j$ وموجبة لقيم $s < j$. $v(j)$ ليست قيمة قصوى محلية للاقتران $v(s)$.

ماذا تستنتج؟

* سنتنصر في دراستنا للقيم القصوى على الاقترانات كثيرة الحدود المعرفة على ح



نتيجة:

إذا كان $u(s)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكانت $u'(j) = 0$ صفرًا، حيث $j \in \text{مجال } u(s)$ ، فإن:

أ. إذا تغيرت إشارة $u'(s)$ من موجبة لقيم $s > j$ إلى سالبة لقيم $s < j$ فإن $u'(j)$ قيمة عظمى محلية للاقتزان $u(s)$.

ب. إذا تغيرت إشارة $u'(s)$ من سالبة لقيم $s > j$ إلى موجبة لقيم $s < j$ فإن $u'(j)$ قيمة صغرى محلية للاقتزان $u(s)$.

يسمى هذا باختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى.

مثال (١): أعيّن جميع القيم القصوى للاقتزان $u(s) = \frac{1}{3} s^3 - 3s^2 + 8s + 2$.

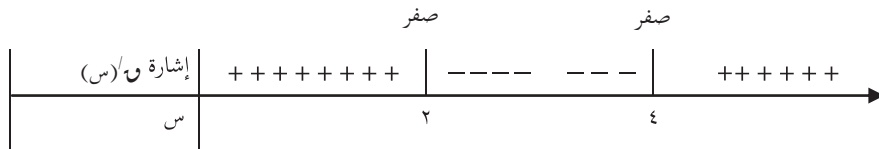
الحل: $u'(s) = 3s^2 - 6s + 8 = 0$

$$0 = 3s^2 - 6s + 8$$

$$0 = 3s^2 - 6s + 8$$

$$0 = (s - 2)(3s - 4)$$

$$s = 2, 4$$



إشارة $u'(s)$ تغيرت من موجبة حيث $s > 2$ إلى سالبة حيث $s < 2$ ← $u'(2)$ قيمة عظمى محلية للاقتزان $u(s)$.

إشارة $u'(s)$ تغيرت من سالبة حيث $s > 4$ إلى موجبة حيث $s < 4$ ← $u'(4)$ قيمة صغرى محلية للاقتزان $u(s)$.

$$\frac{26}{3}$$

$$\frac{26}{3} = u(2) = \text{القيمة العظمى المحلية}$$

$$\frac{26}{3} = u(4) = \text{القيمة الصغرى المحلية}$$

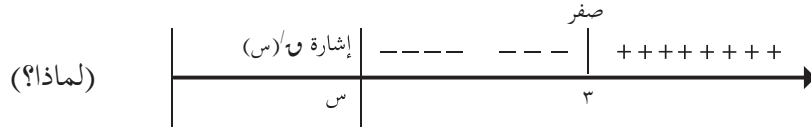
مثال (٢): أعيّن القيم القصوى للاقتران $س^٢ - ٦س + ٩$.

الحل: $س^٢ - ٦س = ٠$

$٠ = (س)^٢$

$٠ = ٦س - ٦س$

$س = ٣$



إشارة و(س) تغيرت من سالبة حيث $س > ٣$ إلى موجبة حيث $س < ٣$ ← و(٣) قيمة صغرى محلية للاقتران و(س).
القيمة الصغرى المحلية = و(٣) = $٩ + ١٨ - ٩ = ٠$

نشاط (١):

إذا كان $س^٣ - ١٢س - ٥ = ٠$ ، $س \in ح$ ، أجد قيم س التي عندها قيم قصوى للاقتران و(س).

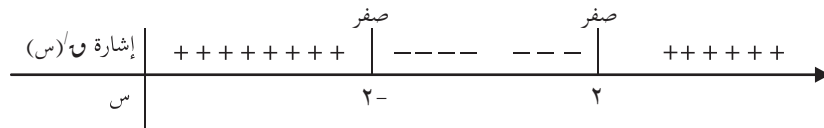
الحل: و(س) =

نجعل و(س) =

$٠ = ١٢س^٢ - ٣س$

$٠ = ٤س^٢ - ٢س$

$س =$



ألاحظ أن إشارة و(س) تغيرت من موجبة حيث $س > ٢^-$ إلى سالبة حيث $س < ٢^-$ ← عند $(س = ٢^-)$ يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران و(س).

إشارة و(س) تغيرت من سالبة حيث $س > ٢$ إلى موجبة حيث $س < ٢$ حول $(س = ٢)$ ← عند $(س = ٢)$ يوجد قيمة صغرى محلية للاقتران و(س).

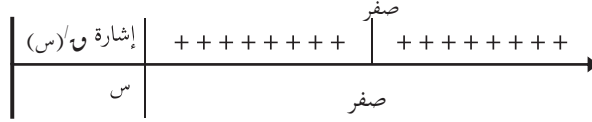
مثال (3): أعيّن القيمة/القيم القصوى المحلية إن وجدت للافتزان $W(s) = s^2$ ، $s \in \mathbb{C}$.

الحل: $W(s) = s^2$

$W'(s) = 2s$

$0 = 2s$

$s = 0$



لم تتغير إشارة $W(s)$ حول $(s = 0)$ ومنها لا توجد قيمة قصوى محلية للافتزان $W(s)$.



س١: أعيّن القيمة/القيم القصوى المحلية إن وجدت لكل من الاقترانات الآتية:

أ. $و(س) = ٤س - ٢س^٢$ ، $س \in ح$

ب. $و(س) = س(س - ١٢)$ ، $س \in ح$

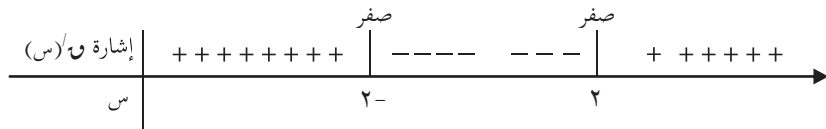
ج. $و(س) = ٢س^٣ - ٣س + ٢$ ، $س \in ح$

د. $و(س) = -٢س + ١٠س + ٥$ ، $س \in ح$

س٢: إذا كان للاقتران $و(س) = ٢س^٢ + ب س - ٣$ ، $س \in ح$ قيمة عظمى محلية عند $س = ٢^-$ فما قيمة ب؟

س٣: إذا كان $و(س) = ٥س^٢ - ٥$ ، $س \in ح$ ، أيّن أنه لا توجد للاقتران $و(س)$ أية قيم قصوى.

س٤: الشكل الآتي يبين إشارة $و(س)$ ، جد قيم $س$ التي عندها قيم قصوى للاقتران $و(س)$ وأبيّن نوعها، علماً بأن $و(س)$ كثير حدود، معرف على $ح$.



(١) ما ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران $(س)$ في النقطتين أ (١، ٣) ، ب (٣، ٩)؟

(٢) إذا كان متوسط التغير للاقتران $(س) = س^٢ + ٣$ عندما تتغير $س$ من ٢ إلى ٦ يساوي ٦ فما قيمة الثابت ٦ ؟

(٣) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى $(س) = س^٢ + ٥س - ٣$ عند النقطة التي إحداثياتها السيني = ١.

(٤) أجد القيم القصوى للاقتران $(س) = س^٣ + ٣س^٢ + ٧$.

نموذج اختبار

س١: أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

(١) إذا كان متوسط تغير الاقتران v (س) في الفترة $[-٤, ٢]$ يساوي ٣ ، و $v(-٤) = ٢$ ما قيمة $v(٢)$ ؟

- (أ) ٢٠ (ب) ٢٦ (ج) ١٦ (د) ١٨

(٢) إذا كان v (س) = \sqrt{s} ما قيمة $v(٤)$ ؟

- (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{2} -$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) ٢

(٣) ما ميل المماس لمنحنى الاقتران v (س) = $\frac{٥}{١ - s^2}$ عند $s = ٢$ ؟

- (أ) $\frac{4}{9}$ (ب) $\frac{20}{9} -$ (ج) ١٥ (د) $\frac{5}{3}$

(٤) إذا كانت $v = (١ - s)^\circ$ ما قيمة $\frac{dv}{ds}$ عندما $s = ١^-$ ؟

- (أ) ٥ (ب) ٢٥ (ج) صفر (د) ٨٠

(٥) إذا كان v (س) = $s^٢$ ، h (س) = $s - ٢$ ما قيمة $(v \circ h)(١)$ ؟

- (أ) ٢- (ب) ٢ (ج) صفر (د) ٤

(٦) إذا كانت $v = (١ - s^٢)$ ما قيمة $\frac{dv}{ds}$ عندما $s = ٣$ ؟

- (أ) ٢٠- (ب) ٢٠ (ج) ١٠- (د) ١٠

س٢: إذا كان متوسط تغير الاقتران v (س) عندما تتغير s من $s_١ = ٢$ إلى $s_٢ = ٥$ هو ١٠، أجد $v(٥)$

علماً بأن $v(٢) = ٦$ ؟

س٣: إذا كان v (س) = $s^٢ + ١$ ، أجد $v'(٣)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

س٤: إذا كان v (س) = $(s^٢ + ٢)(٣س + ٤)$ أجد $v'(٢)$

س٥: إذا كان m (س) = $s^٢ \times v$ (س) جد $m'(٣)$ علماً بأن $v(٣) = ٢^-$ ، $v'(٣) = ٥$.

س٦: أجد قيمة الثابت k التي تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = s^٢ + ٣س + ١$ مساوياً ٤

عندما $s = ١$.