١٢

بسم الله الرحمن الرحيم

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الأدبي والشرعي

الفترة الثانية

الطبعة الثانية
٢٠٢٠ م / ١٤٤١ هـ

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
فاكس +970-2-2983250 | هاتف +970-2-2983280

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

الوحـــــدة المتمازجة للفترة الثانية
المصفوفات Matrix

يتوقع من الطلبة بعد دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المصفوفات والعمليات عليها في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التّعرف إلى المصفوفة وعناصرها.
٢. إيجاد ناتج جمع مصفوفتيْن وطرحهما.
٣. إيجاد ناتج ضرب مصفوفتيْن.
٤. حل معادلات مصفوفية.
٥. إيجاد النظير الضربيّ للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.
٦. حلّ نظام من المعادلات الخطيّة باستخدام قاعدة كريمر.

المحتويات

المصفوفات

المصفــوفــة

تعريف

المصفوفة: هي تنظيم مستطيل الشكل لأَعداد حقيقية على هيئة صفوف عددها (م) وأَعمدة عددها(ن)، محصورة بين قوسين من النوع [ ]، ويرمز لها بأَحد الحروف الهجائية، وتكون المصفوفة من **الرتبة** م × ن.

نشاط (٢)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٤ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٧ & -٤ \\ ١٠ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ٥ \end{bmatrix}$

أ) رتبة المصفوفة أ تساوي ٣×٢. (لماذا؟)

ب) رتبة المصفوفة ب تساوي..........

جـ) رتبة المصفوفة جـ تساوي..........

د) يقع العدد٦ في تقاطع الصف الثالث والعمود الثاني في المصفوفة أ، ولذلك يسمى **المدخلة** $أ_{٢٣}$

هـ) المدخلة التي قيمتها -٨ في المصفوفة أ تسمى $أ_{١٣}$.

أتعلــم

يسمّى كل عدد في المصفوفة أ مدخلة، ويرمز له بالرمز $أ_{ي هـ}$، حيث: (ي) (هـ) الصف والعمود الذين تقع المدخلة في تقاطعهما .

مثـال (١)

إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ ٣ & ٩ \\ -٨ & ٧ \end{bmatrix}$ ، فإن: رتبة المصفوفة أ تساوي ٣ × ٢

المدخلة $أ_{٢١}$ = ٦، المدخلة $أ_{١٢}$ = ٩، المدخلة $أ_{٢٣}$ = -٨

تعريف

- **مصفوفة الصف**: هي المصفوفة التي تتكوَّن من صف واحد فقط، و(ن) من الأعمدة، وتكون رتبتها ١×ن.
- **مصفوفة العمود**: هي المصفوفة التي تتكوَّن من عمود واحد فقط، و(م) من الصفوف، وتكون رتبتها م×١.
- **المصفوفة المربعة**: هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأَعمدة ويساوي (ن)، وتسمى المصفوفة مربعة من الرتبة النونية.
- **المصفوفة الصفرية**: هي المصفوفة التي تكون كل مدخلة فيها تساوي صفراً، ويرمز لها بالرمز**(و)**.

مثال (٢)

ما رتبة كل من المصفوفات الآتية؟ ومانوعها.

$$س = \begin{bmatrix} ٠,٥ & -٩ & ٢ \end{bmatrix} ، ص = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \\ ٩ \end{bmatrix} ، ع = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٥ \\ ٩ & -١ & ٦ \end{bmatrix} ، و = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} .$$

الحل:

١) رتبة س = ١×٣، وهي مصفوفة صف.

٢) رتبة ص= ٣×١، ص مصفوفة عمود.

٣) ع مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة.

٤) رتبة و= ٢×٣، وهي مصفوفة صفرية.

تعريف

تتساوى المصفوفتان أ، ب إذا كان لهما الرتبة نفسها، وكانت جميع مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

مثال (٤)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س+٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٩ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س التي تجعل أ = ب؟

الحلّ: بما أن $\begin{bmatrix} س+٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩ & ٤ \end{bmatrix}$

إذن س+٢ = -٩ وبحلّ المعادلة ينتج أن س= -١١.

تمارين ومسائل (٢ - ١)

١ أَجدُ قيم الثابتين ب، جـ فيما يأتي:

أ) $$\begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٧} \\ \text{جـ} + \text{١} & \text{٧} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٤-ب} \\ \text{ب} & \text{٧} \end{bmatrix}$$

ب) $$\begin{bmatrix} \text{٥} \\ \text{٨} \\ \text{٧} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٥} \\ \text{٢- ٣ب} \\ \text{جـ + ب} \end{bmatrix}$$

جـ) $$\begin{bmatrix} \text{جـ}^{٢} & \text{٦} & \text{١} \\ \text{ب} & \text{٥} & \text{٨} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٩} & \text{٦} & \text{١} \\ \text{ب}^{٢} & \text{٥} & \text{٨} \end{bmatrix}$$

٢ أَجدُ قيمة س، ص حيث:

$$\begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٤} \\ \text{س - ٢ص} & \text{٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٥} & \text{س+ص} \\ \text{١} & \text{٤} \end{bmatrix}$$

٣ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{٥} & \text{-٩} & \text{٢} \\ \text{-٧} & \text{١} & \text{٤} \end{bmatrix}$ فما قيمة $\text{٣أ}_{\text{١١}} - \text{٢أ}^{\text{٢}}_{\text{٣٢}} + \text{٥}$؟

٤ إذا كانت أ ، ب مصفوفتان بحيث أ = $\begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٥} & \text{٢} \\ \text{٣} & \text{٧} & \text{-١١} \end{bmatrix}$ وكانت ٢أ = ٣ب، جد المصفوفة ب.

العمليات على المصفوفات

أولاً: جمع المصفوفات وطرحها:

تعريف

إذا كانت أ، ب مصفوفتين كل منهما من الرتبة نفسها م ×ن فإن المصفوفة جـ حيث: أ ± ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م ×ن، وتكون كل مدخلة في المصفوفة جـ مساوية لمجموع المدخلتين المناظرتين لها في المصفوفتين أ، ب ،أي أن: $جـ_{ي هـ} = أ_{ي هـ} \pm ب_{ي هـ}$

مثال (١)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٨ & ٥ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ١٠ & -٣ \end{bmatrix}$

، أجد أ + ب ، جـ - ب.

الحلّ: بما أن رتبة المصفوفة أ = رتبة المصفوفة ب، فإنه يمكن إجراء عملية الجمع كالآتي.

$$أ + ب = \begin{bmatrix} ٨ & ٥ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ + -١ & ٥ + ١ \\ ٤ + ٣ & ١ + ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٦ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$جـ - ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ١٠ & -٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ - -١ & ٣-١ \\ ١٠-٣ & -٣-٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٧ & -٦ \end{bmatrix}$$

خصائص عملية جمع المصفوفات

١) عملية جمع المصفوفات هي عملية تبديلية.

٢) عملية جمع المصفوفات هي عملية تجميعية.

٣) المصفوفة الصفرية (و) هي المصفوفة المحايدة لعملية جمع المصفوفات.

٤) إذا كانت ﻫ، ب مصفوفتين حيث: ﻫ + ب = ب + ﻫ = و، فإن ب هي **النظير الجمعيّ** للمصفوفة ﻫ،
وتكون ب = -ﻫ

مثال (٢)

إذا كانت ﻫ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٧ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$، و = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$، ب= $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ & ٩ \\ ٥ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$،

أجد: ١) (ﻫ+و) + ب ٢) ﻫ+(و+ب)

الحل: باستخدم الخصائث فإن ﻫ+و = ﻫ ومنها فإن (ﻫ+و)+ب= ﻫ+(و+ب) = $\begin{bmatrix} ٣ & ٨ & ١٢ \\ ١٢ & ٧ & ٣ \end{bmatrix}$

ﻫ + و = $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٧ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٧ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$

و+ ﻫ = ________________. ماذا تُلاحظ؟

ثانياً: ضرب المصفوفات بعدد ثابت:

تعريف

إذا كانت ﻫ مصفوفة من الرتبة م×ن، وكان جـ عدداً حقيقياً فإن جـ .ﻫ مصفوفة من الرتبة م×ن، حيث تكون كل مدخلة فيها مساوية للمدخلة المناظرة لها في المصفوفة ﻫ مضروبة بالثابت جـ. أي أن: **جـ(ﻫ$_{\text{ي هـ}}$) = (جـ ﻫ$_{\text{ي هـ}}$)**

مثـال (٢)

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٦ & ٥ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٤ & ٧ & ١ \end{bmatrix}$، فإن= ٧س = $\begin{bmatrix} ٤٢ & ٣٥ & ٢٨ & ٢١ \\ ٧ & ٢٨ & ٤٩ & ٧ \end{bmatrix}$

مثـال (٣)

أَحلّ المعادلة المصفوفيّة الآتية: ٣س - $\begin{bmatrix} ١٢ & ٩ \\ ٠ & ١١ \end{bmatrix}$ = س + $\begin{bmatrix} ٨ & -٧ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

الحلّ:

٣س - س = $\begin{bmatrix} ٨ & -٧ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ١٢ & ٩ \\ ٠ & ١١ \end{bmatrix}$ إذن ٢س = $\begin{bmatrix} ٢٠ & ٢ \\ ٢ & ١٢ \end{bmatrix}$ ، ومنها س = $\begin{bmatrix} ١٠ & ١ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

تمارين ومسائل (٢ - ٢)

١ إذا كانت المصفوفة جـ = ٢أ + ب، وكانت المدخلة $أ_{٢٥}$ = ٩، والمدخلة $ب_{٢٥}$ = -٨، فما قيمة المدخلة $جـ_{٢٥}$؟

٢ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ & ٣ & ٨ \\ ٣ & ١ & ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٥ & ٧ \\ ٨ & ٦ & ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ ١ & ٤ & ٧ \end{bmatrix}$

أَجدُ ما يأتي (إن أَمكن):

أ) س + ص **ب)** ٣س - ٤ص **جـ)** ٥ص - س **د)** س - ٢ع **هـ)** ٢ص - ٣$و_{٢×٤}$

٣ أَجدُ ناتج ما يأتي ٣ $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٥ & ٦ & ١ \end{bmatrix}$ − ٤ $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ & -٣ \end{bmatrix}$

٤ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٧ & ٢ \\ ١ & ٤ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٨ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix}$ ، أَجدُ المصفوفة س حيث: ٢س = أ - ٣ب

٥ أَحلّ كلاً من المعادلات المصفوفيّة الآتية:

أ) س + ٣ $\begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}$

ب) ٢ (س + $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$) = س − ٢ $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix}$ -٢س = $\begin{bmatrix} -٦ & ٠ \\ ٠ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م× ن، ب مصفوفة من الرتبة ن ×هـ، فإن:

$\text{أ}_{\text{م}\times\text{ن}} \,.\, \text{ب}_{\text{ن}\times\text{هـ}} = \text{جـ}_{\text{م}\times\text{هـ}}$ ، حيث: $\text{جـ}_{\text{ي هـ}} = \text{أ}_{\text{ي}١}.\text{ب}_{١\text{هـ}} + \text{أ}_{\text{ي}٢}.\text{ب}_{٢\text{هـ}} + \,.....\, + \text{أ}_{\text{ي ن}}.\text{ب}_{\text{ن هـ}}$

عملية ضرب المصفوفات ليست تبديليّة.

مثال (١)

أَجدُ ناتج ضرب المصفوفتين أ ، ب في كل من الحالات الآتية:

١) $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٠ \\ ٠ & -٤ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & -٣ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

٢) $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

الحلّ: ألاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب

$$\text{أ} \,.\, \text{ب} = \begin{bmatrix} (٣ \times ٥) + (١ \times ١) + (٠ \times ٦) & (٣ \times ٢) + (١ \times -٣) + (٠ \times ٠) \\ (٠ \times ٥) + (-٤ \times ١) + (٣ \times ٦) & (٠ \times ٢) + (-٤ \times -٣) + (٣ \times ٠) \\ (١ \times ٥) + (٢ \times ١) + (٥ \times ٦) & (١ \times ٢) + (٢ \times -٣) + (٥ \times ٠) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٦ & ٣ \\ ١٤ & ١٢ \\ ٣٧ & -٤ \end{bmatrix}$$

مثال (٢)

إذا كانت أ، ب مصفوفتان حيث: $\text{أ}_{٣\times٤} \,.\, \text{ب}_{٤\times٥} = \text{جـ}$، فإن رتبة المصفوفة **جـ** تساوي ٣ × ٥.

مثال (٣)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -١ & ٧ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ أجد ناتج كل من ١) أ . ب

الحلّ:

أ . ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٧ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$ × $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -١ & ٧ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$

أتعلـــم

المصفوفة $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية، ويرمز لها بالرمز م$_{٢}$، ويطلق عليها أيضاً اسم **مصفوفة الوحدة**.

تمارين ومسائل (٢ - ٣)

١ أَجد ناتج ضرب المصفوفات فيما يأتي (إن أَمكن):

أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٧ \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ١ \\ -٢ & ٤ & -٥ \\ ١ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ ٢ & -٤ & ٥ \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٥ \\ ٧ & ٢ \end{bmatrix}$

٢ إذا كانت $\begin{bmatrix} ١ & \text{أ} \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٤ \\ \text{ب} \end{bmatrix}$ ما قيمة كل من الثابتيين أ، ب؟

٣ إذا كانت أ ، ب ، س ثلاث مصفوفات بحيث أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٩ & ٤ \\ ٢ & ٧ & -٣ \\ -٣ & ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ،

ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ & ٤ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكانت ٢أ + س = ٣ب، أجد المصفوفة س.

النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

أولاً: المحددات: (Determinants)

تعريف (١)

إذا كانت ﭐ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، فإن **محدد المصفوفة** ﭐ = $\begin{bmatrix} ﭐ_{٢١} & ﭐ_{١١} \\ ﭐ_{٢٢} & ﭐ_{١٢} \end{bmatrix}$ هو عدد حقيقيّ ويرمز له بالرمز |ﭐ| حيث |ﭐ| = (ﭐ$_{١١}$ × ﭐ$_{٢٢}$) − (ﭐ$_{١٢}$ × ﭐ$_{٢١}$).

مثال (١)

أجد محدد كل من المصفوفات الآتية: ١) ﭐ = $\begin{bmatrix} ٩ & ٣ \\ ٣- & ١ \end{bmatrix}$

الحلّ:

|ﭐ| = (ﭐ$_{١١}$ × ﭐ$_{٢٢}$) − (ﭐ$_{١٢}$ × ﭐ$_{٢١}$). ومنها |ﭐ| = (٣ × -٣) − (١ × ٩) = -٩ − ٩ = -١٨

أتعلم

إذا كانت ﭐ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، **ك** عدد حقيقي، **ك** ≠ صفر، فإن |**ك** ﭐ| = **ك**^{٢}|ﭐ|

نشاط (١)

إذا كانت ﭐ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكانت |٥ﭐ| = -٥٠ ، فإن:

|ﭐ| = ______________ . |٧ﭐ| = ______________ .

ثانياً: النظير الضربيّ للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

تعريف (٢)

تُسمى المصفوفة التي محددها يساوي صفر بالمصفوفة **المنفردة.**

مثال (٢)

إذا كانت $ٲ = \begin{bmatrix} س-١ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أَجدُ قيمة س التي تجعل ٲ مصفوفة منفردة.

الحلّ: بما أن ٲ مصفوفة منفردة فإن محدد $|ٲ| =$.

ومنها (س-١) × ٢ − ٢ × ٣ = صفر ومنها: ٢س-٢-٦ = صفر ٢س-٨=صفر إذن س=٤.

تعريف (٣)

إذا كانت ٲ مصفوفة غير منفردة من الرتبة الثانية، فإن المصفوفة ب من الرتبة الثانية تسمى نظيراً ضربياً للمصفوفة ٲ إذا كان ٲ . ب = ب . ٲ = $م_٢$، حيث $م_٢$ المصفوفة المحايدة.

ويرمز للنظير الضربيّ للمصفوفة ٲ بالرمز $ٲ^{-١}$، أي أن ٲ . $ٲ^{-١}$ = $ٲ^{-١}$. ٲ = $م_٢$

تعريف

إذا كانت $ٲ = \begin{bmatrix} ٲ_{١١} & ٲ_{٢١} \\ ٲ_{١٢} & ٲ_{٢٢} \end{bmatrix}$ ، حيث $|ٲ| \neq$ صفر، فإن: $ٲ^{-١} = \frac{١}{|ٲ|} \begin{bmatrix} ٲ_{٢٢} & -ٲ_{٢١} \\ -ٲ_{١٢} & ٲ_{١١} \end{bmatrix}$

وإكانت المصفوفة ٲ منفردة فإنه لا يوجد لها نظير ضربي

مثال (٢)

أجد النظير الضربيّ للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}$ (إن أمكن).

الحلّ:

$|أ| = (أ_{١١} \times أ_{٢٢}) - (أ_{١٢} \times أ_{٢١})$

$|أ| = (١ \times -٤) - (١ \times -٢) = -٢$ ، إذا يوجد للمصفوفة أ نظير ضربي

$$أ^{-١} = \frac{-١}{٢} \begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٠,٥ & -٠,٥ \end{bmatrix}$$

أتعلــم

$$(أ^{-١})^{-١} = أ$$

تمارين ومسائل (٢ - ٤)

١ أجد قيمة س التي تحقق $\begin{vmatrix} -١٢ & ٥ \\ ٣س & -٣ \end{vmatrix} = ٦$

٢ إذا كان |٤ب| = -٣٢، أجدُ: قيمة |ب| + |٣ب|، حيث ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية.

٣ أجد النظير الضربيّ لكل من المصفوفات الآتية (إن أمكن):

أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

٤ ما قيمة س التي تجعل المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢س+١ \\ ٩ & ٤ \end{bmatrix}$ منفردة؟

حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كريمر

قاعدة كريمر:

تستخدم قاعدة كريمر لحلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين، والذي يمكن كتابته بالصورة المصفوفية كالآتي: أ . ع = جـ، حيث:

أ :مصفوفة المعاملات، ع: مصفوفة المتغيرات، جـ: مصفوفة الثوابت، |أ| ≠ صفر فيكون:

$$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} \quad و \quad ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$$ حيث:

$أ_س$: المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات س فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

$أ_ص$:المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات ص فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

مثال (١)

استخدمُ قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي:

س − ص = ٤

٥س + ٢ص = ٦

الحلّ:

أَكتبُ نظام المعادلات الخطية على شكل معادلة مصفوفيّة:

$$\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

أفرض أ $= \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = (١\times٢) - (٥\times-١) = ٧$

المصفوفة $\text{أ}_{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

ومنها: $|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} ٤ & -١ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} = (٤\times٢) - (-١\times٦) = ١٤$

المصفوفة $\text{أ}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$

ومنها: $|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = (١\times٦) - (٤\times٥) = -١٤$

$\therefore \text{س} = \dfrac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \dfrac{١٤}{٧} = ٢$ ، $\text{ص} = \dfrac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \dfrac{-١٤}{٧} = -٢$

إذن الحل: (س،ص) = (٢، -٢)

مثال (٢)

عند استخدم قاعدة كريمر في حل نظام المعادلات الخطيةنتج أن $|\text{أ}_{\text{س}}| = ٣$ ، $|\text{أ}_{\text{ص}}| = ١٥$، ص = ٥، فما قيمة س؟

الحلّ: $\text{ص} = \dfrac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|}$

$٥ = \dfrac{١٥}{|\text{أ}|} \Leftarrow ٥|\text{أ}| = ١٥ \Leftarrow |\text{أ}| = \dfrac{١٥}{٥} = ٣$

$\therefore \text{س} = \dfrac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|}$

$= \dfrac{٣}{٣} = ١$

تمارين ومسائل (٢ - ٥)

١ إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية

وكان $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix}$ ، $|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٤ & ٩ \end{vmatrix}$ ، $|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٩ & ١ \end{vmatrix}$

أجد قيمة كل من س، ص.

٢ استخدم قاعدة كريمر في حل أنظمة المعادلات الآتية:

أ) ٣س-٤ص = ٨

س+ص = ١٢

ب) ٣س - ٢ص - ١٩ = ٠

ص + ٣س = ١٣

٣ عند استخدم قاعدة كريمر في حل نظام من المعادلات الخطية نتج أنّ ص = ٤، $|أ_{ص}|$ = ٢٠،

$|أ_{س}|$ = -١٥، جد قيمة س.

تمـــاريـــن عـــامـــة

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يلي:

١) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٩ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ فما قيمة $٢أ_{١٢} - ب_{٢١}$ ؟

أ) ٥ ب) ٢ ج) ١ د) -١

٢) إذا كانت $\begin{bmatrix} -١ & ٣ & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ص+س & ٢ \end{bmatrix}$ فما قيمة س، ص على الترتيب؟

أ) (١ ، ٢) ب) (٢ ، ١) ج) (٥ ، ٢) د) (-١ ، ١)

٣) إذا كانت $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$، فأي من المصفوفات الآتية تمثل $(ب^{-١})^{-١}$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & -٦ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٥ & -٦ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

٤) إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، وكان $|٢س| = ٨$ فما قيمة $|٣س|$؟

أ) ١٨ ب) ٦ ج) ٤ د) ٢

٥) أي من المصفوفات الآتية ليس لها نظير ضربيّ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٨ & -٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$

٦) إذا كانت $ص = \begin{bmatrix} جـ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ص^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ فما قيمة الثابت جـ؟

أ) ٢ ب) ١ ج) -١ د) -٢

٧)عند حل نظام من معادلتين خطيتين، وُجِدَ أن ص = ٢ ، $|أ_{س}| = -٣$، $|أ_{ص}| = -٦$ ماقيمة س؟

أ) ٣ ب) ١ ج) -١ د) -٣

٨) إذا كان $\begin{bmatrix} أ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$، فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٤ ب) ٢ ج) ١ د) صفر

٩) إذا كانت ${}^{\text{ا}}$،ب،جـ مصفوفات حيث ا . ب = جـ وكانت $ا_{٣\times١}$ ، $جـ_{٣\times٤}$ فما رتبة المصفوفة ب ؟

أ) ١×٤　　ب) ١×٣　　ج) ١×١　　د) ٤×٣

السؤال الثاني: أَستخدمُ قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي: ٢س+١ = ص ، س-٢ص = ٤

إختبار ذاتي

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل من الفقرات الآتية:

١ إذا كانت المصفوفة س = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ -١ & ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ فما رتبة المصفوفة س؟

أ. ٢×٣　　ب. ٣×٢　　ج. ٦　　د. ٢

٢ إذا كانت ب= $\begin{bmatrix} -١ & ٥ & ٣ \\ -٢ & ٨ & ٥ \\ ٤ & ١٠ & ٦ \end{bmatrix}$ فما قيمة المدخلة $ب_{٢٣}$؟

أ. -١　　ب. ٢٣　　ج. ١٠　　د. -٢

٣ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣ & س-٢ \\ س+ص & ٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ فما قيمة ص؟

أ. -٢　　ب. ٢　　ج. -٤　　د. ٤

٤ كانت المصفوفة أ هي النظير الضربي للمصفوفة ب فإن واحدة من العبارات الاتية صحيحة:

أ. أ×ب = و　　ب. أ٢ = ب٢　　ج. أ×م = ب　　د. أ×ب= م

٥ ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & س \\ س & ٩ \end{bmatrix}$ منفردة؟

أ. ± ٦　　ب. ٦　　ج. -٦　　د. ٦٣

٦ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ فما قيمة | ٢ أ | ؟

أ. ٨٢　　ب. -٧　　ج. -٨٢　　د. -٤١

٧ إذا كانت $س^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ فما $(\frac{١}{٢}س)^{-١}$؟

أ. $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$　　ب. $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$　　ج. $\begin{bmatrix} ٠ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$　　د. $\begin{bmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ \frac{٣}{٢} & ١ \end{bmatrix}$

٨ إذا كان $\frac{١}{٢}|\text{أ}^{\text{س}}| = |٣\text{أ}| = ١٨$ حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية فما قيمة س ؟

أ. ١٨   ب. ٣٦   ج. -١٨   د. ١

٩ إذا كان أ ب = س، حيث أ ، ب غير منفردتين فما المصفوفة ب؟

أ. $\text{أ}^{-١}\text{س}$ ب. $\text{س}.\text{أ}^{-١}$ ج. $\text{س}^{-١} - \text{ب}$ د. أس

١٠ ما ناتج $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$؟

أ. $\begin{bmatrix} -٦ & ٤ & ٨ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} ٦ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} -٦ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} -٢ \end{bmatrix}$

السؤال الثاني:

استخدم قاعدة كريمر في حل النظام الآتي من المعادلات:

$٣\text{س} + ٢\text{ص} - ٧ = ٤$ $٢\text{ص} + ٤\text{س} = ٦١$

السؤال الثالث: حل المعادلة المصفوفية الآتية:

$$٣\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & -٦ \end{bmatrix} - ٢\text{س} = \begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -٥ & ٦ \end{bmatrix}$$

السؤال الرابع: إذا كانت $\text{ص} = \begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & -١ \end{bmatrix}$، جد $\text{ص}^{-١}$.

السؤال الخامس: ما قيم س التي تحقق المعادلة: $\begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ٤ & ٣-\text{س} \end{vmatrix} = ٨$؟