١٢

بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفرع العلمي والصناعي

الفترة الثانية

الطبعة الثانية
٢٠٢٠ م/ ١٤٤١ هـ

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف 2983280-2-970+ | فاكس 2983250-2-970+

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف تطبيقات التفاضل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ إيجاد فترات التزايد والتناقص والنقاط الحرجة لاقتران معلوم.
٢ إيجاد القيم العظمى والصغرى لمنحنى اقتران معلوم.
٣ إيجاد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف لمنحنى اقتران معلوم.
٤ تحديد خصائص اقتران، إذا علم منحنى إحدى مشتقاته.
٥ توظيف القيم القصوى المطلقة في حل مسائل حياتية.
٦ التعرف إلى المصفوفة، وبعض المصفوفات الخاصة.
٧ إيجاد رتبة المصفوفة.
٨ التعرف إلى شروط تساوي مصفوفتين، وحل معادلات ناتجة من تساويهما.
٩ إجراء العمليات على المصفوفات.
١٠ التعرف إلى مفهوم المحددات.
١١ حساب محدد المصفوفات المربعة من الرتبة الأولى والثانية والثالثة، وتمييز المنفردة منها.
١٢ إيجاد النظير الضربي للمصفوفات المربعة غير المنفردة من الرتبة الثانية.
١٣ توظيف المصفوفات في حل أنظمة معادلات خطيّة.

المحتـــويات

البنود التي باللون الأحمر تستثنى من الفرع الصناعي

تعريف:

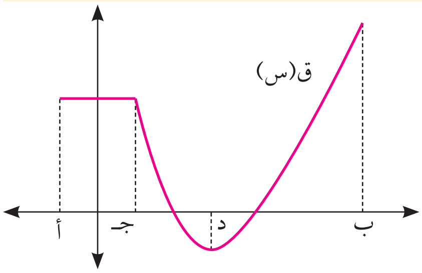
يكون منحنى الاقتران ق(س) المعرف في [أ، ب] ، س$_١$ ، س$_٢$ ∋ [أ ، ب]

١ متزايداً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_١$ < س$_٢$ فإن ق(س$_١$) < ق(س$_٢$)

٢ متناقصاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_١$ < س$_٢$ فإن ق(س$_١$) > ق(س$_٢$)

٣ ثابتاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_١$ < س$_٢$ فإن ق(س$_١$) = ق(س$_٢$)

مثال ١ : في الشكل المجاور، حدد الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران ق(س) متزايداً، أو متناقصاً، أو ثابتاً.

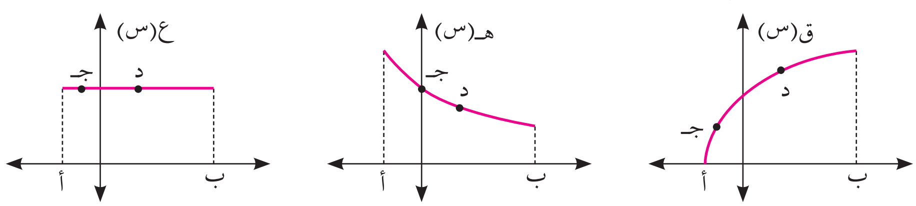


الحل : يكون منحنى الاقتران ق(س) ثابتاً في [أ، جـ] ويكون متناقصاً في [جـ ، د] لأنه كلما زادت قيمة س في الفترة [جـ ، د] تقل قيمة ق(س)، ويكون متزايداً في [د ، ب] (لماذا؟)

(ملاحظة : لا يطلب من الطالب التحقق من التزايد والتناقص جبرياً باستخدام التعريف)

التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الأولى

نشاط: الشكل أدناه يمثل منحنيات الاقترانات : ق(س)، هـ(س)،ع(س) المعرفة في الفترة [أ، ب] ، معتمداً عليها قم بما يأتي:



١ حدد أي الاقترانات السابقة يكون منحناه متزايداً، وأيها متناقصاً، وأيها ثابتاً في الفترة [أ، ب].

٢ ارسم لكل منحنى مماساً عند النقطة جـ ومماساً عند النقطة د.

٣ نوع زاوية الميل للمماسات المرسومة هي ....

٤ إشارة ظل زاوية ميل المماس لكل من المماسات التي رسمت هي .... (لماذا؟)

٥ ما إشارة كل من قَ(س)، هـَ(س)، عَ(س) في] أ، ب[؟

٦ ما العلاقة بين فترات التزايد والتناقص وإشارة المشتقة الأولى للاقتران؟

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق في] أ، ب[فإن منحنى :

١ الاقتران ق(س) يكون متزايداً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) > صفر، ∀ س ∈] أ، ب[

٢ الاقتران ق(س) يكون متناقصاً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) < صفر، ∀ س ∈] أ، ب[

٣ الاقتران ق(س) يكون ثابتاً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) = صفر، ∀ س ∈] أ، ب[

مثال ٢ : جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) علماً بأن:

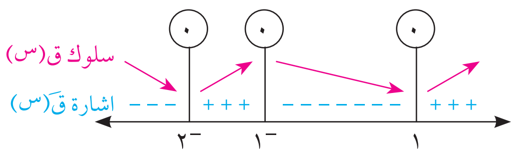
قَ(س) = (س^{٢} − ١)(س + ٢)، س ∈ ح

الحل : نضع قَ(س) = صفر، ومنها (س^{٢} − ١)(س + ٢) = ٠

ومنها (س − ١) (س + ١) (س + ٢) = ٠

فينتج أن س = ١ أو س = −١ أو س = −٢

من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون:



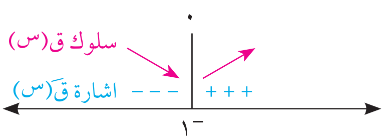
منحنى ق(س) متناقصاً في]−∞ ، −٢]، [−١ ، ١] ، ومتزايداً في [−٢ ، −١]، [١، ∞[.

مثال ٣ : عيّن فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س^{٤} + ٤س + ٥، س ∈ ح

الحل : ق(س) متصل في ح لأنه كثير حدود.

قَ(س) = ٤س^{٣} + ٤ نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س^{٣} + ١ = ٠ فتكون س = −١ (لماذا؟)

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور:



يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة [−١ ، ∞[

ومتناقصاً في الفترة]−∞ ، −١].

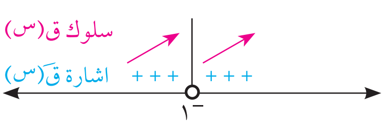
مثال ٤ : عيّن فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$، س ≠ −١

الحل : ق(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$، س ≠ −١ متصل في ح − {−١}

قَ(س) = $\frac{٢}{(\text{س} + ١)^{٢}}$

قَ(س) ≠ ٠ ∀ س ∈ ح − {−١}

والشكل المجاور يبيّن إشارة قَ(س)



ومنه يكون منحنى الاقتران ق(س) متزايداً في الفترتين]−∞ ، −١[،]−١، ∞[

فكّر وناقش

في المثال السابق هل يمكن القول أن ق(س) متزايد في ح − {−١}؟

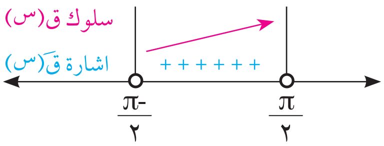
مثال ٥ : أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) = ٢س + ظاس متزايد في الفترة] $\frac{-\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ [

الحل : ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في الفترة] $\frac{-\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ [(لماذا؟)

قَ(س) = (٢ + قا^٢^س) ≠ ٠

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور

يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة] $\frac{-\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ [



مثال ٦ : عيّن فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) = |س^٢^ − ٤| ، س ∈ [−٣ ، ٢]

الحل : نكتب ق(س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة. ✻

$$ق(س) = |س^2 - 4| = \begin{cases} س^2 - 4 \quad , & -3 \le س < -2 \\ 4 - س^2 \quad , & -2 \le س \le 2 \end{cases}$$

ق(س) متصل في الفترة [−٣ ، ٢] لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران متصل

$$قَ(س) = \begin{cases} 2س \quad , & -3 < س < -2 \\ -2س \quad , & -2 < س < 2 \end{cases}$$

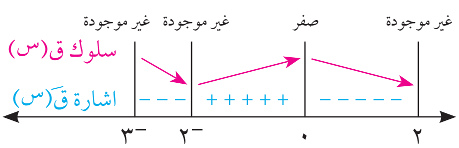
قَ(س) غير موجودة عندما س = −٣ ، −٢ ، ٢ (لماذا؟)

نجعل قَ(س) = ٠ ، ومنها س = ٠

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون

منحنى ق(س) متزايداً في [−٢ ، ٠]

ومتناقصاً في [−٣ ، −٢] ، [٠ ، ٢]



✻ سنقتصر دراستنا على الاقترانات متعددة القاعدة والمتصلة.

تمارين ٢ - ١

١ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ ق(س) = ٣س^{٢} – س^{٣} ، س ∈ [$^{-}$٢ ، ٥]

ب ق(س) = س + جا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، π]

٢ إذا كان ق(س) = ٢س – لـو$_{هـ}$ (س + ١) ، س > $^{-}$١ ، فأثبت أن منحنى ق(س) متزايد في ح$^{+}$.

٣ جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} & ، ٠ \leq \text{س} < ١ \\ ٢\text{س}^{٢} - ١ & ، ١ \leq \text{س} \leq ٢ \end{cases}$ ، في الفترة [٠ ، ٢]

٤ إذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق على ح، وكان ك(س) = ق^{٢}(س) + هـ^{٢}(س) + س^{٢}، فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س)، علماً بأن قَ(س) = هـ(س)، هـَ(س) = $^{-}$ق(س).

٢ - ٢ القيم القصوى (Extreme Values)

تعريف القيم الصغرى والعظمى المحلية:

ليكن ق(س) اقتراناً معرفاً على المجال ع، ولتكن جـ ∈ ع، عندها يكون للاقتران ق(س):

١) قيمة عظمى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ، بحيث أن ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ ع)

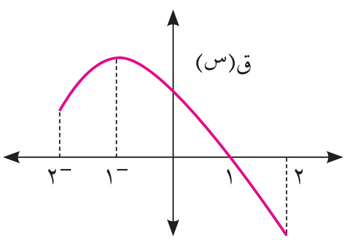
٢) قيمة صغرى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ، بحيث أن ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ ع)

٣) قيمة عظمى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ ع

٤) قيمة صغرى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ ع

ملاحظة: تسمى كل من القيم العظمى والقيم الصغرى قيماً قصوى، سواء أكانت محلية أم مطلقة.

مثال ١ : يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [$^-$٢ ، ٢]، اعتمد عليه في إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت). ثم جد قيمة المشتقة الأولى عند كل قيمة منها (إن وجدت).



الحل : يوجد للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عندما س = $^-$٢ هي ق($^-$٢)

لأنه يوجد فترة مفتوحة مثل ف =]$^-$٣ ، $^-$١[تحوي العدد $^-$٢

بحيث أن ق($^-$٢) ≥ ق(س) ∀ س ∈ ف ∩ [$^-$٢ ، ٢] = [$^-$٢ ، $^-$١[

قَ($^-$٢) غير موجودة (لماذا؟)

وأيضاً ق($^-$١) قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لأن ق($^-$١) ≤ ق(س) ∀ س ∈ [$^-$٢ ، ٢]

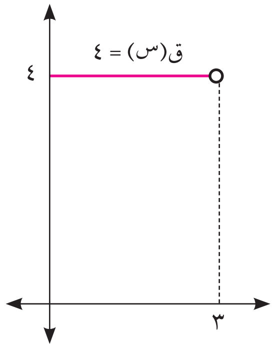
قَ($^-$١) = ٠ (لماذا؟)

ق(٢) قيمة صغرى محلية وهي مطلقة لأن ق(٢) ≥ ق(س) ∀ س ∈ [$^-$٢ ، ٢]

قَ(٢) غير موجودة (لماذا؟)

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٤ ، س ∈ [٠ ، ٣[

جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).



الحل : ق(س) متصل في [٠ ، ٣[

قَ(س) = ٠ ∀ س ∈]٠ ، ٣[

وحسب التعريف ∀ س ∈ [٠ ، ٣[يوجد قيمة صغرى محلية هي ٤

لأن ق(س) ≤ ٤ ∀ س في تلك الفترة

كما أنه حسب التعريف ∀ س ∈ [٠ ، ٣[يوجد قيمة عظمى محلية هي ٤

لأن ق(س) ≥ ٤ ∀ س في تلك الفترة

فكّر وناقش:

ما صحة القول أن القيمة العظمى المحلية للاقتران دائماً أكبر من القيمة الصغرى المحلية له؟

تعريف:

تسمى النقطة (أ ، ق(أ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) إذا كانت:

١ أ ∈ مجال ق(س)

٢ قَ(أ) = ٠ أو قَ(أ) غير موجودة.

مثال ٣ : عيّن جميع النقط الحرجة للاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ - ٣ & ، \quad ^-١ < \text{س} \le ٢ \\ ٣ - \text{س} & ، \quad ٢ < \text{س} \le ٣ \end{cases}$ ، في]$^-$١ ، ٣]

الحل : ق(س) متصل عند س = ٢ ، قَ(س) = $\begin{cases} ٢\text{س} & ، \quad ^-١ < \text{س} < ٢ \\ ^-١ & ، \quad ٢ < \text{س} < ٣ \end{cases}$

قَ(٢) غير موجودة ، قَ(٣) غير موجودة، ..... (لماذا؟)

نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س = ٠ ∈]$^-$١ ، ٢[

لا يوجد قيم لــ س ∈]٢ ، ٣[بحيث قَ(س) = ٠ (لماذا؟)

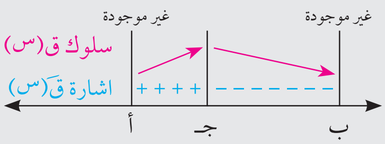
لا يوجد نقطة حرجة عند س = $^-$١ لأنها لا تنتمي إلى مجال ق(س)

ومنها النقط الحرجة هي (٠ ، $^-$٣) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٠)

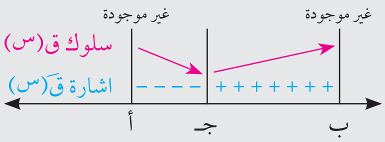
اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب] وكانت (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س)، جـ ∈]أ ، ب[فإنه:

١ إذا كان قَ(س) > ٠ عندما أ < س < جـ ،
وكان قَ(س) < ٠ عندما جـ < س < ب
فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)



٢ إذا كان قَ(س) < ٠ عندما أ < س < جـ ،
وكان قَ(س) > ٠ عندما جـ < س < ب
فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)



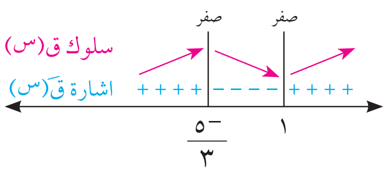
مثال ٤ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٥س − ٥

الحل : ق(س) اقتران متصل على ح لأنه كثير حدود

قَ(س) = ٣س^{٢} + ٢س − ٥ ، ∀ س ∈ ح ، نجعل قَ(س) = ٠

ومنها ٣س^{٢} + ٢س − ٥ = ٠ أي أن (٣س + ٥)(س − ١) = ٠ ، إذن س = $\frac{-٥}{٣}$ أو س = ١

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور تكون



ق($\frac{-٥}{٣}$) = $\frac{٤٠}{٢٧}$ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

ق(١) = −٨ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

فكّر وناقش:

هل يأخذ الاقتران ق(س) في المثال السابق قيماً قصوى مطلقة؟ حددها (إن وجدت).

مثال ٥ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = (٨ − س) $\sqrt[٣]{س}$

الحل : ق(س) متصل في ح

قَ(س) = $\sqrt[٣]{س}$ (−١) + (٨ − س) × $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{-٢}{٣}}$

قَ(س) = − $\sqrt[٣]{س}$ + $\frac{(٨ - س)}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$ ، س ∈ ح − {٠} (لماذا؟)

إذن قَ(س) = $\frac{(٨ - ٤س)}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

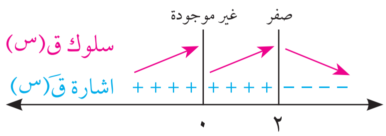
نجعل قَ(س) = ٠ ومنها ٨ − ٤س = ٠ ومنها س = ٢

قَ(س) غير موجودة عند س = ٠ (لماذا؟)

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور،

يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س) عند س = ٢

قيمتها ق(٢) = $\sqrt[3]{٦}$ ٢



فكّر وناقش:

هل يوجد قيم قصوى للاقتران عندما س = ٠ في المثال السابق (لماذا؟)

مثال ٦ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = $\frac{س^{٢} + ٣}{س - ١}$ ، س ≠ ١

الحل :

ق(س) متصل في ح - {١}

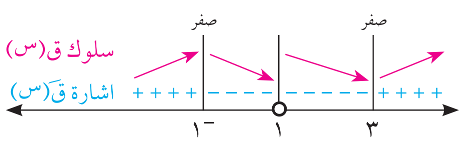
قَ(س) = $\frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{(س - ١)^{٢}}$ ، س ≠ ١

وبوضع قَ(س) = ٠ ينتج أن س = ٣ أو س = ⁻١

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور تكون

ق(⁻١) = ⁻٢ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

ق(٣) = ٦ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)



اختبار أطراف الفترة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق في]أ، ب[فإن:

١ ق(أ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت قَ(س) > ٠ عندما س > أ (بداية تزايد)

٢ ق(أ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت قَ(س) < ٠ عندما س > أ (بداية تناقص)

٣ ق(ب) قيمة عظمى محلية، إذا كانت قَ(س) > ٠ عندما س < ب (نهاية تزايد)

٤ ق(ب) قيمة صغرى محلية، إذا كانت قَ(س) < ٠ عندما س < ب (نهاية تناقص)

مثال ٧ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، ⁻١ \le س \le ٢ \\ ٤ & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$

١ جد مجموعة قيم س للنقط الحرجة للاقتران ق(س).

٢ حدّد الاحداثيات السينية للقيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).

الحل :

١ ق(س) اقتران متصل في [⁻١ ، ٣[

ق َ(س) = { ٢س ، ⁻١ < س < ٢
           ٠ ، ٢ < س < ٣

أولاً: عندما س ∈]⁻١ ، ٢[نجعل ق َ(س) = ٠

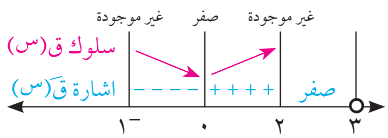
فيكون ٢س = ٠ ومنها عند س = ٠ يوجد نقطة حرجة

ثانياً: عندما ٢ < س < ٣ تكون ق َ(س) = ٠

وهذا يعني أنه عند كل س ∈]٢ ، ٣[يوجد نقطة حرجة

ق َ(٢) غير موجودة، ق َ(⁻١) غير موجودة

فتكون مجموعة قيم س للنقط الحرجة { ٠ ، ⁻١، [٢ ، ٣[}



٢ من إشارة ق َ(س) في الشكل المجاور يكون

عند س = ⁻١ يوجد قيمة عظمى محلية لأنها بداية تناقص

عند س = ٠ يوجد قيمة صغرى محلية

عند س = ٢ يوجد قيمة عظمى محلية

عند كل س ∈]٢ ، ٣[يوجد قيمة عظمى محلية وصغرى محلية في آن واحد.

نظرية القيم القصوى المطلقة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب]

فإن ق(س) يتخذ قيمه القصوى المطلقة في الفترة [أ، ب].

مثال٨: جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران ق(س) = س$\sqrt{٤ - س^{٢}}$

الحل : بحل المتباينة ٤ − س^{٢} ≥ ٠ ، نستنتج أن مجال ق(س) هو [$^{-}$٢ ، ٢]

ق(س) متصل على [$^{-}$٢ ، ٢] ، ق$'$(س) = $\frac{٤ - ٢س^{٢}}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ ، س ∈]$^{-}$٢ ، ٢[

وعندما ق$'$(س) = ٠ يكون س = $\sqrt{٢}$ ∈]$^{-}$٢ ، ٢[

س = $^{-}\sqrt{٢}$ ∈]$^{-}$٢ ، ٢[

ويكون ق($^{-}$٢) = ٠ ، ق($^{-}\sqrt{٢}$) = $^{-}$٢

ق($\sqrt{٢}$) = ٢ ، ق(٢) = ٠

أصغر قيمة للاقتران هي ق($^{-}\sqrt{٢}$) = $^{-}$٢

وأكبر قيمة للاقتران هي ق($\sqrt{٢}$) = ٢

أي أن القيمة العظمى المطلقة هي ق($\sqrt{٢}$) = ٢

والصغرى المطلقة هي ق($^{-}\sqrt{٢}$) = $^{-}$٢

أتعلم:

إذا كان ق(س) متصلاً على فترة في مجاله، وكان له نقطة قيمة قصوى وحيدة فهي مطلقة في تلك الفترة.

تمارين ٢ - ٢

١ جد النقط الحرجة للاقترانات الآتية:

أ ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢} + $\frac{١}{٣}$ ، س ∈ [−٢ ، ٣]

ب ق(س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$ ، س ∈ [−٨ ، ٨]

٢ في التمارين من (أ − د) جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) (إن وجدت)

أ ق(س) = س^{٣} − ٩س^{٢} + ٢٤س ، س ∈ ح

ب ق(س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

جـ ق(س) = (س^{٢} − ٣)هـ^{س} ، س ∈ ح

د ق(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١

٣ جد أكبر وأصغر قيمة (إن وجدت) لكل من الاقترانات الآتية:

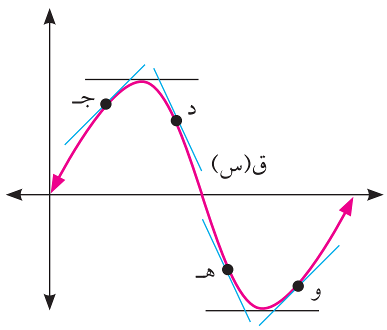
أ ق(س) = $\begin{cases} س^{٣} & ، ٠ \le س \le ٢ \\ س^{٢} + ٤ & ، ٢ < س \le ٣ \end{cases}$ ، س ∈ [٠ ، ٣]

ب ق(س) = هـ^{س} − هـ س ، س ∈ [٠ ، ٣]

جـ ق(س) = جتاس − $\frac{١}{٣}$ جتا^{٣}س ، س ∈ $\left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$

٢ - ٣ التقعّر و نقط الانعطاف (Concavity and Points of Inflection)

نشاط: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س)



١ ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند كل من جـ ، د؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران ق(س) عند جـ ، د يقعان فوق منحناه)

٢ ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند هـ ، و؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران عند هـ ، و يقعان تحت منحناه).

تعريف:

يقال لمنحنى الاقتران ق(س) أنه مقعّر للأعلى في الفترة]أ، ب[إذا كان واقعاً فوق جميع مماساته في الفترة] أ، ب[وأنه مقعّر للأسفل في الفترة]أ، ب[إذا كان واقعاً تحت جميع مماساته في الفترة] أ، ب[.

اختبار التقعّر باستخدام المشتقة الثانية*:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب]، وكان قً (س) معرفاً في الفترة]أ ،ب[فإن منحنى ق(س) يكون:

١ مقعّراً للأعلى في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قً(س) > ٠ لجميع قيم س ∈] أ،ب[.

٢ مقعّراً للأسفل في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قً(س) < ٠ لجميع قيم س ∈] أ،ب[.

٣ غير مقعّر للأعلى أو للأسفل في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قً(س) = ٠ لجميع قيم س ∈] أ، ب[.

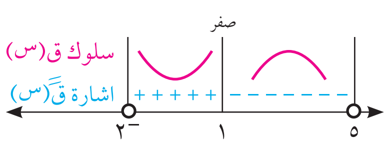
مثال ١ : جد مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣س^٢ – س^٣ ، س ∈ [–٢ ، ٥]

الحل : ق(س) متصل في [–٢ ، ٥] لأنه كثير حدود

قَ(س) = ٦ س – ٣س^٢ ، قً(س) = ٦ – ٦س

بوضع قً(س) = ٠ تكون ٦ – ٦س = ٠ ، أي س = ١

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور



يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأعلى

في الفترة]–٢، ١[، ومقعّراً للأسفل في الفترة]١ ، ٥[

* سيتم التعامل مع الفترات المفنوحة.

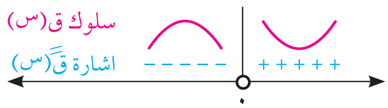
مثال ٢ : جد مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

الحل : ق(س) متصل على مجاله

ق(س) = س + $\frac{١}{\text{س}}$ ومنها قَ(س) = ١ − $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$

قً(س) = $\frac{٢}{\text{س}^{٣}}$ ≠ ٠ ،

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور يكون:



منحنى ق(س) مقعّراً للأسفل في الفترة]−∞ ، ٠[،

ومقعّراً للأعلى في الفترة]٠ ، ∞[..... (لماذا؟)

تعريف:

تسمى النقطة (جـ ،ق(جـ)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س) إذا كان:

- ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = جـ
- يغيِّرَ الاقتران اتجاه تقعّر منحناه عند س = جـ من الأعلى إلى الأسفل، أو العكس.

مثال ٣ : جد نقاط الانعطاف (إن وجدت) للاقتران ق(س) = ٣جاس جتاس ، س ∈]٠ ، π[

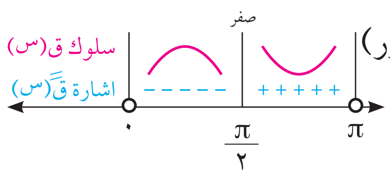
الحل : قَ(س) = −٣جا^{٢}س + ٣جتا^{٢}س = ٣جتا٢س ، س ∈]٠ ، π[

قً(س) = −٦جا٢س

نجعل قً(س) = ٠ فيكون −٦جا٢س = ٠ ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$

وبما أن ق(س) متصل عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ، ويغيّر من

اتجاه تقعّره عندها (كما تشير إشارة قً(س) في الشكل المجاور)



فإن النقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، ق($\frac{\pi}{٢}$)) = ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠) نقطة انعطاف

مثال ٤ : بيّن أنه لا يوجد للاقتران ق(س) = $\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}$ نقطة انعطاف في الفترة]−٣ ، ٣[

الحل : ق(س) = $\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}$ متصل في الفترة]−٣ ، ٣[

قَ(س) = $\frac{-\text{س}}{\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}}$ ، س ∈]−٣ ، ٣[(لماذا؟)

قً(س) = $\frac{-٩}{\sqrt{(٩ - \text{س}^{٢})^{٣}}}$ ≠ ٠ ، ∀ س ∈]−٣ ، ٣[ولكن قً(س) < صفر دائماً (لماذا؟)

ومنها يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأسفل في]−٣ ، ٣[

وبما أن ق(س) لا يغير من اتجاه تقعره، فلا يوجد نقاط انعطاف للاقتران ق(س) في]−٣ ، ٣[

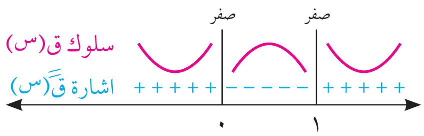
مثال ٥ : إذا كان ق(س) = $س^{٤} - ٢س^{٣}$ ، س ∈ ح ، فجد فترات التقعّر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س)، ثم جد نقط الانعطاف (إن وجدت).

الحل : ق(س) متصل لأنه كثير حدود.

قَ(س) = $٤س^{٣} - ٦س^{٢}$ ، قً(س) = $١٢س^{٢} - ١٢$س

بوضع قً(س) = ٠ ينتج أن س = ١ ، س = ٠

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور يكون:



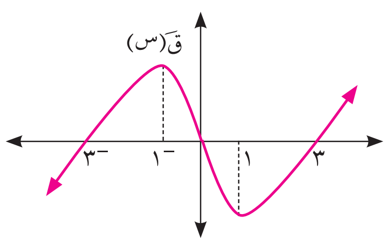
ق(س) مقعراً للأعلى في الفترة]$^{-}$∞ ، ٠] ،

وكذلك في الفترة [١ ، ∞[

ويكون مقعراً للأسفل في الفترة [٠ ، ١]

النقطتان (٠ ، ٠) ، (١ ، $^{-}$١) هما نقطتا انعطاف ..... (لماذا؟)

مثال ٦ : الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران قَ(س)



معتمداً عليه، جد كلاً مما يأتي:

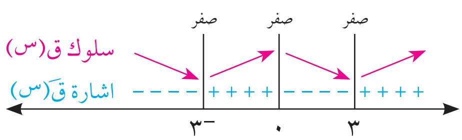
١ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢ القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

٣ مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

٤ قيم س التي يكون عندها نقاط الانعطاف (إن وجدت) .

الحل : نمثل إشارة قَ(س) كما في الشكل المجاور:



١ يكون منحنى ق(س)

متزايداً في [$^{-}$٣ ، ٠] وفي [٣ ، ∞[

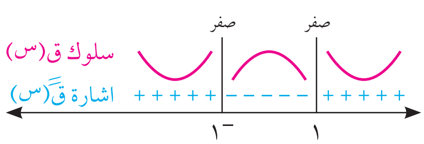
ومتناقصاً في]$^{-}$∞ ، −٣] وفي [٠ ، ٣]

٢ ق($^{-}$٣) قيمة صغرى محلية

ق(٠) قيمة عظمى محلية

ق(٣) قيمة صغرى محلية.

ونمثل إشارة قً(س) كما في الشكل المجاور:



٣ يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأعلى

في]$^{-}$∞ ، $^{-}$١[وكذلك في]١ ، ∞[

ومقعّراً للأسفل في]$^{-}$١ ، ١[

٤ نقاط الانعطاف تكون عند س = $^{-}$١ ، س = ١ ..... (لماذا؟)

ملاحظة:

إذا كان ق(س) كثير حدود وكانت (س$_{١}$ ، ق(س$_{١}$)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س)، فإن قً(س$_{١}$) = صفر.

اختبار المشتقة الثانية في تعيين القيم القصوى Second Derivative Test

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق في فترة مفتوحة تحوي جـ وكان قَ(جـ) = ٠ فإن:

١ ق(جـ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت قً(جـ) < ٠

٢ ق(جـ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت قً(جـ) > ٠

٣ يفشل تطبيق الاختبار إذا كانت قً(جـ) = ٠ ، أو قً(جـ) غير موجودة.

مثال ٧ : جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) = ٣س^{٤} – ٨س^{٣} + ٦س^{٢}، باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن).

الحل : ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في ح لأنه كثير حدود

قَ(س) = ١٢س^{٣} – ٢٤س^{٢} + ١٢س

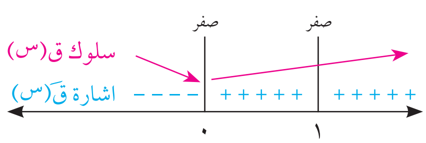
قَ(س) = ٠ ومنها ١٢س^{٣} – ٢٤س^{٢} + ١٢س = ٠

١٢س(س^{٢} – ٢س + ١) = ١٢س(س – ١)^{٢} = ٠ ، ومنها إمّا س = ٠ أو س = ١

قً(س) = ٣٦س^{٢} – ٤٨س + ١٢

قً(٠) = ١٢ > ٠ إذن ق(٠) = ٠ قيمة صغرى محلية.

بما أن قً(١) = ٠ فلا نستطيع تحديد نوع القيمة القصوى ق(١) باستخدام اختبار المشتقة الثانية لذا نلجأ إلى اختبار المشتقة الأولى.



من الشكل المجاور لا يوجد قيمة قصوى محلية عند س = ١ ..... (لماذا؟)

تمارين ٢ - ٣

١ عيّن فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ ق̋(س) = (س^{٢} – ٣س – ٤)(س + ٢) ، س ∈ ح

ب قَ(س) = جاس – س ، س ∈ $]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[$

جـ ق(س) = ٤س^{٣} – س^{٤} + س ، س ∈]٠ ، ٤[

د ق(س) = (س – ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ ، س > ٣

هـ ق(س) = جا $\frac{س}{٢}$ ، س ∈]٠ ، π[

٢ حدد نقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية (إن وجدت):

أ ق(س) = س^{٣} + س

ب ق(س) = جتاس ، س ∈]٠ ، ٢π[

جـ ق(س) = $\sqrt[٣]{٥ - س}$

٣ جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^{٣} + ٦س^{٢}، وحدد نوعها باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن تطبيقها)، وفي حالة عدم إمكانية تطبيقها استخدم اختبار المشتقة الأولى:

٤ إذا كان للاقتران ق(س) = أ س^{٢} + س^{٣} نقطة انعطاف عند س = $^{-}$١ ، فجد قيمة/ قيم الثابت أ.

٥ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [$^{-}$٣ ، ٢] ويحقق الشروط الآتية:

ق(٠) = ٠ ، قَ(١) = ٠ ، قَ($^{-}$٢) = ٠ ، ق̋(س) > ٠ عندما س > ٠ ، ق̋(س) < ٠ عندما س < ٠

اعتمد على هذه المعلومات للإجابة عن الأسئلة الآتية:

أ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س).

ب ما قيمة/ قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيم قصوى؟ وما نوع كل منها؟

جـ ما قيمة/ قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها نقط انعطاف؟

٢ - ٤ تطبيقات عملية على القيم القصوى (Applications of Extrema) للعلمي فقط

مثال ١ : عددان موجبان مجموعهما ٦٠، جد العددين إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل : نفرض أن العددين هما س ، ص وأن حاصل ضربهما هو م فيكون

م = س × ص

لكن س + ص = ٦٠ ومنه ص = ٦٠ − س

م = س × ص = س × (٦٠ − س) = ٦٠س − س^{٢}

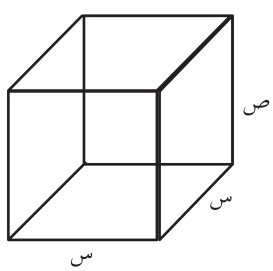
مَ = ٦٠ − ٢س

نجعل مَ = ٠ ومنها ٦٠ − ٢س = ٠ أي س = ٣٠

للتحقق مً = −٢ ومنها $\left.\text{مً}\right|_{\text{س} = ٣٠}$ = −٢ < ٠

(عند س = ٣٠ يكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن).

فيكون العددان هما ٣٠ ، ٣٠



مثال ٢ : يراد صنع صندوق هدايا قاعدته مربعة الشكل من الكرتون المقوى حجمه ٨ دسم^{٣}، جد أبعاده بحيث تكون تكلفة تصنيعه أقل ما يمكن. (سعر المتر المربع ثابت)

الحل : نفرض طول ضلع قاعدة الصندوق (س دسم) وارتفاعه(ص دسم)

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

ح = س^{٢}ص ومنها س^{٢}ص = ٨

المساحة الكلية للصندوق = مساحة الجوانب الأربعة + مساحة القاعدتين

ت = ٤س × ص + ٢س^{٢} ، لكن ص = $\frac{٨}{\text{س}^{٢}}$

ومنها ت = ٤س × $\frac{٨}{\text{س}^{٢}}$ + ٢س^{٢} = $\frac{٣٢}{\text{س}}$ + ٢س^{٢}

وبالاشتقاق ينتج أن: تَ = $\frac{-٣٢}{\text{س}^{٢}}$ + ٤س وبوضع تَ = ٠

$\frac{٣٢}{\text{س}^{٢}}$ = ٤س ، أي أن س^{٣} = ٨ ، ومنها س = ٢دسم

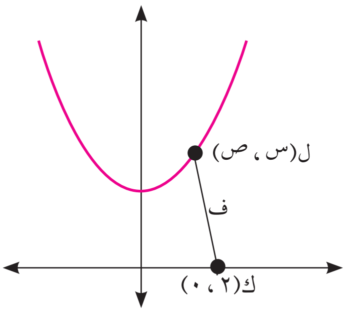
تً = $\frac{٦٤}{\text{س}^{٣}}$ + ٤

ومنها $\left.\text{تً}\right|_{\text{س} = ٢} = \frac{٦٤}{٨} + ٤ = ١٢ > ٠$ (صغرى محلية وحيدة فهي صغرى مطلقة)

التكلفة تكون أقل ما يمكن عندما تكون قاعدة الصندوق مربعةً طول ضلعها ٢دسم، وارتفاع الصندوق ٢ دسم.

مثال ٣ : جد أقصر مسافة بين النقطة ك (٢ ، ٠) ومنحنى العلاقة $\text{ص}^٢ - \text{س}^٢ = ٨$

الحل : نفرض النقطة ل(س ، ص) على منحنى العلاقة



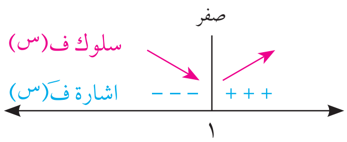
ونفرض ف = المسافة بين ك ، ل

حسب قانون المسافة بين نقطتين ف = $\sqrt{(\text{س} - ٢)^٢ + \text{ص}^٢}$

لكن $\text{ص}^٢ = \text{س}^٢ + ٨$ ، فتكون ف = $\sqrt{٢\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١٢}$

$\text{فَ} = \frac{٤\text{س} - ٤}{٢\sqrt{٢\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١٢}}$

بوضع فَ = ٠ ينتج أن س = ١ ..... (لماذا؟)



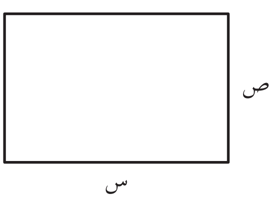
ومن إشارة فَ في الشكل المجاور

تكون المسافة أقصر ما يمكن عندما س = ١ ، ص = ±٣

ولأن للاقتران قيمة قصوى وحيدة فهي صغرى مطلقة

وتكون أقصر مسافة هي ف = $\sqrt{١٠}$ وحدة.

مثال ٤ : أوجد أقل محيط ممكن لمستطيل مساحته ١٦ سم^٢



الحل : نفرض طول المستطيل (س سم) وعرضه (ص سم)

مساحة المستطيل م = س ص = ١٦ ومنها ص = $\frac{١٦}{\text{س}}$

محيط المستطيل ح = ٢س + ٢ص ومنها يكون ح = ٢س + $\frac{٣٢}{\text{س}}$

$\text{حَ} = ٢ - \frac{٣٢}{\text{س}^٢}$ وعندما حَ = ٠ يكون $٢ - \frac{٣٢}{\text{س}^٢} = ٠$ ومنها س = ٤

$\text{حً} = \frac{٦٤}{\text{س}^٣}$ ومنها حً(٤) = ١ (موجب) ⟵ المحيط أقل ما يمكن

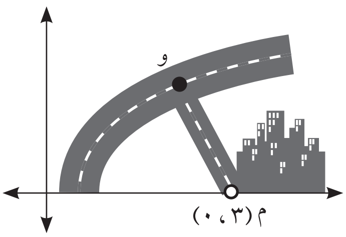
فيكون أقل محيط للمستطيل هو ١٦ سم

تمارين ٢ - ٤

١ يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل في أرضه، وذلك بإحاطتها بسياج، فإذا كان لديه ٨٠ متراً من الأسلاك، فما مساحة أكبر حديقة يمكن للرجل إحاطتها؟

٢ مقلمة على شكل أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ١٩٢ π سم^{٣} فإذا علمت أن سعر كل ١ سم^{٢} من البلاستيك المستخدم لصنع القاعدة، يعادل ثلاثة أمثال سعر ١ سم^{٢} من البلاستيك المستخدم في صنع الجوانب، جد أبعاد المقلمة ذات الأقل تكلفة.

٣ طريق منحنٍ معادلته في المستوى الديكارتي هي
ص = ق(س) = $\sqrt{٢س - ١}$ ، النقطة م(٣، ٠) تمثل موقع مستشفى،
يراد شق شارع فرعي مستقيم من النقطة (و) إلى موقع المستشفى(م)،
عيّن إحداثيات النقطة (و) ليكون طول الشارع (و م) أقل ما يمكن .
(انظر الشكل المجاور).



٤ جسم يسير في خط مستقيم بحيث إن بعده ف بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة
ف = أ جتا $\frac{\pi}{٤}$ ن + ب جا $\frac{\pi}{٤}$ ن فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٠ ، ٢]
هي ١٠م/ ث، وكانت سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ث. احسب الثابتين أ ، ب.

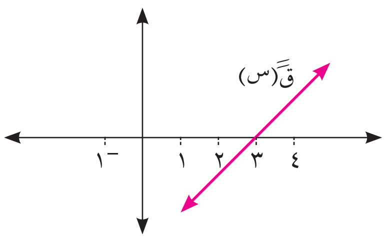
٥ جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢سم ، ونصف قطر قاعدته ٤سم.

ورقة عمل (١)

١ إذا كان ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود معرفين في الفترة [٠، ٤]، بحيث إن منحنى ق(س) متناقص في مجاله، ويقع في الربع الرابع، ومنحنى هـ(س) متزايد في مجاله، ويقع في الربع الأول، أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) × هـ(س) متناقص في الفترة [٠، ٤].

٢ إذا كان ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٩س + ١ ، أ ،ب ∈ ح اقتران له قيمة عظمى محلية عند س = ١، وقيمة صغرى محلية عند س = ٣ ما قيمة كل من الثابتين أ ، ب؟

٣ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران قً(س)



إذا علمت أن قَ(٠) = قَ(٦) = ٠ ، جد كلاً مما يأتي:

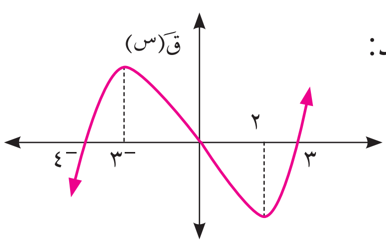
أ فترات التقعّر، ونقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س)

ب القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

جـ فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س)

٤ أ ب جـ د مستطيل عرضه أب = ٨ سم وطوله ب جـ = ١٠ سم، م نقطة على الضلع أ ب بحيث أ م = س سم ، ن نقطة على الضلع ب جـ بحيث ن جـ = $\frac{٣}{٢}$ س سم، جد قيمة س بحيث تكون مساحة المثلث م ن جـ أكبر ما يمكن.

٥ معتمداً على الشكل المجاور، الذي يمثل منحنى الاقتران قَ(س) جد:



أ فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

ب الإحداثيات السينية لنقط الانعطاف.

٦ سلك طوله ١٨ سم، صنع منه مثلثان كل منهما متساوي الأضلاع، ما طول ضلع كل من المثلثين ليكون مجموع مساحتيهما أصغر ما يمكن؟

تعريف:

المصفوفة هي تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد، على هيئة صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين [ ] ويرمز لها بأحد الأحرف أ ، ب ، .... وتسمى الأعداد داخل المصفوفة مدخلات.

تتحدد رتبة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة فيها، على النحو م × ن حيث م يمثل عدد صفوفها، ن يمثل عدد أعمدتها (وتقرأ م في ن).

عدد مدخلات المصفوفة = عدد صفوفها × عدد أعمدتها.

الصورة العامة للمصفوفةمن الرتبة م × ن تكون على النحو:

$$\text{أ}_{\text{م}\times\text{ن}} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & ..(\text{أ}_{\text{هـ}١}).. & \text{أ}_{\text{ن}١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & .... & \text{أ}_{\text{ن}٢} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\text{أ}_{\text{ي}١}) & (\text{أ}_{\text{ي}٢}) & ..(\text{أ}_{\text{ي هـ}}).. & \text{أ}_{\text{ي ن}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{أ}_{\text{م}١} & \text{أ}_{\text{م}٢} & .... & \text{أ}_{\text{م ن}} \end{bmatrix}$$

وتتحدد أي مدخلة فيها بحسب الصف والعمود الواقعة فيها، فالمدخلة التي تقع في تقاطع الصف ي مع العمود هـ هي المدخلة $\text{أ}_{\text{ي هـ}}$.

مثال ١ : إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & ١ \\ ٧ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ & ٦ \\ ١ & ٤ & ٨ \end{bmatrix}$

١ جد رتبة كل من المصفوفتين أ ، ب

٢ جد $\text{أ}_{٢١}$ ، $\text{ب}_{١٢}$

الحل :

١ المصفوفة أ تتكون من ٣ صفوف وعمودين فهي من الرتبة ٣ × ٢

والمصفوفة ب من الرتبة ٢ × ٣

٢ قيمة المدخلة $\text{أ}_{٢١} = -٢$ ، $\text{ب}_{١٢} = ١$

---

* أول من قدم المصفوفات بصورتها الحالية هو العالم الرياضي A .A. Cayley عام ١٨٥٧م.

أنواع خاصة من المصفوفات:

١ المصفوفة المربعة: هي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها = عدد أعمدتها = ن، وتسمى عندئذ مصفوفة مربعة من الرتبة ن.

٢ مصفوفة الوحدة: ويرمز لها بالرمز (م) وهي مصفوفة مربعة، وتكون مدخلاتها على النحو الآتي:

$$\text{م}_{\text{ي هـ}} = \begin{cases} ١ \text{ ، } & \text{ي} = \text{هـ} \\ ٠ \text{ ، } & \text{ي} \neq \text{هـ} \end{cases} \quad \text{فمثلاً } \text{م}_٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \text{، } \text{م}_٣ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \text{ وهكذا …}$$

٣ المصفوفة الصفرية (و): هي المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار، مثل $\text{و}_{٢ \times ٣} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٤ مصفوفة الصف: هي المصفوفة المكونة من صف واحد مثل $\text{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & ١^- & ٤ \end{bmatrix}$

٥ مصفوفة العمود: هي المصفوفة المكونة من عمود واحد مثل $\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

مثال ٢ : لديك المصفوفات $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣^- & ٨^- \\ ١ & ٥ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$

١ ما نوع المصفوفة جـ؟

٢ هل ب مصفوفة وحدة؟

٣ ما مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة أ ؟

الحل :

١ المصفوفة جـ هي مصفوفة عمود.

٢ المصفوفة ب ليست مصفوفة وحدة. (لماذا؟)

٣ مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة أ يساوي ٢

نشاط: كوّنت ياسمين المصفوفة ك من الرتبة ٣ × ٣ حسب الشروط الآتية

$$\text{ك}_{\text{ي هـ}} = \begin{cases} \text{ي} + \text{هـ} \text{ ، } & \text{ي} > \text{هـ} \\ \text{ي} - \text{هـ} \text{ ، } & \text{ي} < \text{هـ} \\ \dfrac{\text{ي}}{\text{ي} + \text{هـ}} \text{ ، } & \text{ي} = \text{هـ} \end{cases}$$

فكانت قيمة المدخلة $ك_{١٢}$ = ١، قيمة المدخلة $ك_{٢١}$ = ... ، $\sum_{ي=١}^{٣} ك_{ي٣}$ = ...

مدخلات القطر الرئيسي هي ....

تساوي مصفوفتين

تعريف:

تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

وبالرموز نقول أن أ = ب إذا وفقط إذا كان $أ_{ي هـ} = ب_{ي هـ}$ لجميع قيم ي ، هـ .

مثال ٣ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} س & ٣ \\ ص^٢ & \sqrt{ع} \end{bmatrix}$

١ هل أ = ب؟ ولماذا؟

٢ جد قيم س، ص، ع التي تجعل أ = جـ

الحل :

١ أ ≠ ب لأن $أ_{١١} \neq ب_{١١}$

٢ بما أن أ = جـ ، فتكون مدخلاتهما المتناظرة متساوية، ومنها س = ٢ ، $ص^٢ = ٤$

أي أن ص = ±٢ وكذلك $\sqrt{ع} = ٥$ ومنها ع = ٢٥.

تمارين ٢ - ٥

١ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -٤ \\ ٦ & ٢ & س \\ ١ & -س & ٧ \\ ٣ & ٢٠ & ٧ \end{bmatrix}$ فجد:

أ رتبة المصفوفة أ   ب قيمة $(أ_{٣١} + أ_{١٢})$ جـ قيمة س بحيث إن: $(أ_{٢٣})^٣ = ٢٧$

٢ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & س^٢ + ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٥ & س - ١ \end{bmatrix}$ ، فجد قيمة / قيم س.

٢ - ٦ العمليات على المصفوفات (Operations on Matrices)

أولاً: جمع المصفوفات:

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين من الرتبة م × ن، فإن جـ = أ + ب هي مصفوفة من الرتبة م × ن مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة في كل من أ ، ب أي أن: $جـ_{ي هـ} = أ_{ي هـ} + ب_{ي هـ}$

مثال ١ : إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٥ & -٧ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $ع = \begin{bmatrix} -٣ & ٧ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٦ \end{bmatrix}$

جد ناتج ما يأتي (إن أمكن) ١ س + ص ٢ ص + س ٣ ص + ع

الحل :

١ $س + ص = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٧ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ + ٥ & ٣ + -٧ \\ ٥ + ٣ & ٤ + -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & -٤ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix}$

٢ $ص + س = \begin{bmatrix} ٥ & -٧ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & -٤ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix}$ (ماذا تلاحظ؟)

٣ ص + ع غير معرفة؛ لأن رتبة ص ≠ رتبة ع.

ثانيًا: ضرب المصفوفة بعددٍ حقيقي

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفةً من الرتبة م × ن ، وكان ك عدداً حقيقياً، فإن ك أ = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ن، وتكون مدخلاتها على النحو: $جـ_{ي هـ} = ك أ_{ي هـ}$ لجميع قيم ي ، هـ.

مثال ٢ : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ & ١ \\ -٢ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فجد ١ ٢أ ٢ -أ ٣ أ + (-أ)

الحل :

١ $٢أ = \begin{bmatrix} ٢ \times -٣ & ٢ \times ٤ & ٢ \times ١ \\ ٢ \times -٢ & ٢ \times ٠ & ٢ \times ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٨ & ٢ \\ -٤ & ٠ & ١٠ \end{bmatrix}$

② $-أ = (-١)أ = -١ \begin{bmatrix} ١ & ٤ & -٣ \\ ٥ & ٠ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & -٤ & ٣ \\ -٥ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

③ $أ + (-أ) = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & -٣ \\ ٥ & ٠ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & -٤ & ٣ \\ -٥ & ٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ (فسّر الإجابة).

مثال ٣ : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ فجد ٣أ + ٢ب

الحل : $٣أ + ٢ب = ٣ \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} + ٢ \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ ٣ & ١٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & -٨ \\ ١٤ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ١٧ & ٢١ \end{bmatrix}$

ثالثاً: طرح المصفوفات

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين من نفس الرتبة م × ن ، فإن أ − ب = أ + (− ب)

مثال ٤ : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة ب − أ

الحل : $ب - أ = ب + (-أ) = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

أو : $ب - أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ - -٢ & ٤ - ٣ \\ ٥ - ٢ & ٠ - ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

لاحظ أن مدخلات ب − أ تنتج من طرح مدخلات المصفوفة أ من المدخلات المناظرة لها في المصفوفة ب

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعددٍ حقيقيٍّ:

إذا كانت (أ ، ب ، جـ ، و) مصفوفات من نفس الرتبة، ك ∈ ح فإن:

١ أ + ب = ب + أ .... (الخاصيّة التبديلية)

٢ (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) .... (الخاصيّة التجميعية)

٣ أ + و = و + أ = أ .... (المصفوفة الصّفرية المحايدة لعملية جمع المصفوفات)

٤ أ + (−أ) = (−أ) + أ = و .... (النظير الجمعي)

٥ ك (أ + ب) = ك أ + ك ب .... (توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات)

مثال ٥ : حل المعادلة المصفوفية $س + \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ٦ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$

الحل : بإضافة النظير الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ إلى طرفي المعادلة تصبح:

$$\left(س + \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ٦ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}$$

$$\text{ومنها } س + \left(\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ٣- & ٦ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}$$

$$\text{أي أن } س + و = \begin{bmatrix} ٦- & ٨ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \text{ ومنها } س = \begin{bmatrix} ٦- & ٨ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$$

تدريبات:

١ أ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣- & ٢ \\ ٢ & ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٦ & ١ & ٤- \\ ٨ & ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فجد ب + ٢أ ، ٣أ − ٢ب

ب إذا كانت $جـ = \begin{bmatrix} ١- & ٤ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $د = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$ فبيّن أن: جـ + د = ٩م$_٢$

٢ حل المعادلة المصفوفية: $٢ \begin{bmatrix} ٥- & ١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} - ٣س = س + م_٢$

٣ إذا كانت $جـ = \begin{bmatrix} ٥- & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة أ بحيث: ٢أ + جـ = و

رابعًا: ضرب المصفوفات (Matrix Multiplication)

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن، ب مصفوفة من الرتبة ن × ل، فإن حاصل الضرب أ . ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ل ، وتكون مدخلات المصفوفة جـ على النحو

$جـ_{ي هـ} = أ_{ي ١} × ب_{١ هـ} + أ_{ي ٢} × ب_{٢ هـ} + ... + أ_{ي ن} × ب_{ن هـ}$

مثال ٦ : لتكن أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١^{-} & ٣ \\ ٠ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٦ & ٣^{-} \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

فأي العمليات الآتية تكون معرفة: ١ أ . جـ ٢ أ . ب ٣ ب . جـ

الحل :

١ أ من الرتبة ٢ × ٣ ، جـ من الرتبة ٢ × ٢، فإن أ . جـ غير معرفة. (لماذا؟)

٢ أ . ب معرفة لأن عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب.

٣ ب . جـ معرفة أيضاً. (لماذا؟)

مثال ٧ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣^{-} \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٢^{-} & ٩ & ٥^{-} \end{bmatrix}$ فجد (إن أمكن):

١ أ . جـ ٢ جـ . أ

الحل :

١ بما أن رتبة أ هي ٢×٢ ، رتبة جـ هي ٢×٣

فإنه يمكن إيجاد ناتج الضرب على النحو أ . جـ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣^{-} \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٢^{-} & ٩ & ٥^{-} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٢^{-}×٥ + ٢×٣^{-} & ٩×٥ + ١×٣^{-} & ٥^{-}×٥ + ٤×٣^{-} \\ ٢^{-}×٦ + ٢×١ & ٩×٦ + ١×١ & ٥^{-}×٦ + ٤×١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٦^{-} & ٤٢ & ٣٧^{-} \\ ١٠^{-} & ٥٥ & ٢٦^{-} \end{bmatrix} = ل$$

لاحظ أن المدخلة $ل_{٢١}$ = ٤٢ ، ناتجة من ضرب مدخلات الصف الأول من أ مع ما يناظرها من مدخلات العمود الثاني من جـ.

٢ لا يمكن إيجاد حاصل الضرب جـ . أ (لماذا؟)

نشاط: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فجد(إن أمكن) كلاً من: أ . ب ، ب . أ

❶ أ . ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤١ & ٢٩ \\ -٦ & -٤ \end{bmatrix}$

❷ ب . أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ = ... ماذا تستنتج؟

مثال ٨ : لتكن أ مصفوفةً من الرتبة ٢ × ن، ب مصفوفةً من الرتبة ٥ × ك

فما قيم كل من ن، ك التي تجعل أ . ب ، ب . أ معرفتين؟

الحل : حتى يكون أ . ب معرفاً فإن قيمة ن = ٥، وليكون ب . أ معرفاً فإن قيمة ك = ٢(لماذا؟)

مثال٩: جد ناتج $\left(\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} \right) . \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

الحل : $\begin{bmatrix} ١١ & ١٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤٦ \end{bmatrix}$ ، ما رتبة المصفوفة الناتجة؟

خصائصُ عملية الضّرب على المصفوفات:

إذا كانت أ ، ب، جـ مصفوفات حيثُ أن عمليتي الضرب والجمع معرفتان، م المصفوفة المحايدة، ك ∈ ح فإنّ:

١ (أ . ب) . جـ = أ . (ب . جـ) .... الخاصيّة التجميعيّة.

٢ أ . (ب + جـ) = (أ . ب) + (أ . جـ) .... توزيع الضّرب على الجمع من اليمين .

٣ (أ + ب) . جـ = (أ . جـ) + (ب . جـ) .... توزيع الضّرب على الجمع من اليسار.

٤ أ . م = م . أ = أ ....(العنصر المحايد لعملية ضرب المصفوفات).

٥ ك (أ . ب) = (ك أ) . ب = أ . (ك ب)

تمارين ٢ - ٦

١ إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن أ . ب = جـ فما رتبة ب في كل مما يلي:

أ $أ_{٢\times٥}$ ، $جـ_{٢\times٤}$ ب $أ_{٣\times٣}$ ، $جـ_{٣\times٥}$

٢ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & -٢ \\ ٤ & ٠ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٣ & ٥ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ فجد ما يأتي:

أ أ . ب ب جـ . ب جـ $أ^{٢}$

٣ جد قيم س ، ص بحيث $\begin{bmatrix} ٣ & س & ٥ \\ -١ & ٤ & -٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٤ & ص \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ٦٤ \\ ٥ & -٣٤ \end{bmatrix}$

٤ إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٧ & ٨ \end{bmatrix}$ فبيّن أن: س = ٥ ص

٥ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، فهل يمكن إيجاد قيمة/ قيم س بحيث إن: $أ^{٢}$ = ب؟

٢ – ٧ المحدّدات (Determinants)

للمحددات كثير من التطبيقات والاستخدامات في مجالات عدة، في الجبر والهندسة ، فالمحدد يمثل اقتراناً يربط كل مصفوفةٍ مربعةٍ بعددٍ حقيقيٍ، ويفاد منه في حل أنظمة المعادلات، وفي إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة، وسوف تقتصر دراستنا في هذا الدرس على إيجاد محدد المصفوفات المربعة من الرتبة الأولى، والثانية، والثالثة فقط.

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً فإننا نرمز لمحددها بالرمز | أ | :

١ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} \end{bmatrix}$ فإن | أ | = $\text{أ}_{١١}$

٢ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{bmatrix}$ فإن | أ | = $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢} - \text{أ}_{٢١} \times \text{أ}_{١٢}$

٣ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{bmatrix}$

فإن | أ | = $\text{أ}_{١١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} - \text{أ}_{٢١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{أ}_{٣١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix}$

مثال ١ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$ ، فجد: ١ | أ | ، |ب| ٢ |أ + ب|

الحل :

١ | أ | = $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}$ = ٢ × ١ – ٥ × ٣ = ⁻١٣

| ب | = $\begin{vmatrix} ١- & ٢- \\ ٤- & ٣ \end{vmatrix}$ = ⁻١ × ٣ – (⁻٤) × (⁻٢) = ⁻١١

٢ أ + ب = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، |أ + ب| = $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٤ – ١ = ٣ (ماذا تلاحظ)؟

نظرية:

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً من الرتبة الثالثة، فإنه يمكن إيجاد | أ | بدلالة مدخلات أي صف، أو أي عمود وذلك بضربها بالمحدد الناتج من تصور شطب الصف ي والعمود هـ، وإعطاء إشارة لحاصل الضرب وَفْق القاعدة $(-١)^{ي+هـ}$

مثال ٢ : جد $\begin{vmatrix} ١ & ٣- & ٢ \\ ٢ & ٥- & ٤ \\ ٧ & ٦ & ١ \end{vmatrix}$ باستخدام التعريف

الحل : بالتعريف يكون

$$١٣ = \begin{vmatrix} ٥- & ٤ \\ ٦ & ١ \end{vmatrix} ١ + \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٧ & ١ \end{vmatrix} ٣- - \begin{vmatrix} ٢ & ٥- \\ ٧ & ٦ \end{vmatrix} ٢ = \begin{vmatrix} ١ & ٣- & ٢ \\ ٢ & ٥- & ٤ \\ ٧ & ٦ & ١ \end{vmatrix}$$

مثال ٣ : جد قيمة س بحيث $٢٠ = \begin{vmatrix} ٣- & ٢ & ١ \\ ١ & س & ٢ \\ ٥ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

الحل : نجد قيمة المحدد بدلالة مدخلات الصف الثالث، حيث يحوي أصفاراً.

أي أن $\begin{vmatrix} ٣- & ٢ & ١ \\ ١ & س & ٢ \\ ٥ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٥(-١)^{٣+٣} \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ س & ٢ \end{vmatrix} = ٢٠$ ومنها ٥(س − ٤) = ٢٠ أي س = ٨

فكّر وناقش:

ما قيمة محدد المصفوفة المربعة التي تحتوي على صفٍ، أو عمودٍ، كل مدخلاته أصفار؟

نشاط: إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ فإن:

١ قيمة | أ | = ...

٢ $|٢أ| = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٨ & ٦ \end{vmatrix} = ٢ \times ٨ - ٦ \times ٤ = -٨ = ٤ |أ| = (٢)^٢ |أ|$

٣ $|-٣أ| =$ ....

٤ $|ك أ| =$ ....

قاعدة (١):

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً من الرتبة ن ، فإن $|ك أ| = ك^{ن} |أ|$، حيث ك ∈ ح

مثال ٤ : إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً، وكان | أ | = ٥، |٢أ| = ٤٠، فما رتبة المصفوفة أ؟

الحل : نفرض أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن، وبما أن |٢أ| = ٤٠ فإن $٢^{ن}$ | أ | = ٤٠

ومنها $٢^{ن} \times ٥ = ٤٠$ أي أن $٢^{ن} = ٨$ ومنها ينتج أن: ن = ٣

أي أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة ٣

قاعدة (٢):

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة ن فإن $|\text{أ . ب}| = |\text{أ}| \times |\text{ب}|$

مثال ٥ : إذا كان $\text{أ} = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & -٥ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فجد $|\text{أ . ب}|$

الحل : $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & -٥ \end{vmatrix} = ١٠ - ١٢ = -٢$

وكذلك $|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ١ & -٤ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ - ١٢ = -١٠$

ومنه $|\text{أ . ب}| = |\text{أ}| \times |\text{ب}| = -٢ \times -١٠ = ٢٠$

هل يمكنك إيجادها بطريقة أخرى؟

تمارين ٢ – ٧

١ جد قيمة كل من المحددات الآتية :

أ $\begin{vmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ & ١ \\ -٤ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix}$ جـ $|٥\text{م}_٣|$

٢ حل المعادلة الآتية: $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & \text{س} & ٥ \\ ١ & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & -١ \\ ١ & \text{س} \end{vmatrix}$

٣ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية بحيث إن: $|٣\text{أ}| = ٥٤$ ، $|\text{أ . ب}| = -١٢$

فما قيمة $|٢\text{أ}| + |٥\text{ب}|$ ؟

٢ ـ ٨ النظير الضربي للمصفوفة المربعة (Inverse of a Square Matrix)

عرضنا في درس سابق المصفوفة المحايدة (م) في عملية ضرب المصفوفات، وتعرّفنا إلى خاصية مهمة من خصائص ضرب المصفوفات، وهي أ . م = م . أ = أ حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن.

تعريف:

تسمى المصفوفة المربعة أ مصفوفةً غير منفردةٍ إذا وجدت مصفوفة مربعة ب من نفس الرتبة بحيث أ . ب = ب . أ = م، وتسمى المصفوفة ب نظيراً ضربياً للمصفوفة أ، ونرمز لها بالرمز $أ^{-١}$ ونكتب ($ب = أ^{-١}$) ويكون $أ . أ^{-١} = أ^{-١} . أ = م$

مثال ١ : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ فبيّن فيما إذا كانت $ب = أ^{-١}$

الحل :

$$أ . ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = م_٢$$

$$ب . أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = م_٢$$

ومنها $ب = أ^{-١}$ (لماذا؟)

تعريف:

المصفوفة المنفردة هي المصفوفة المربعة التي لا يوجد لها نظير ضربي.

نظرية:

المصفوفة أ منفردة إذا وفقط إذا كان $|أ| = ٠$

مثال ٢ : أي المصفوفات الآتية منفردة وأيها غير منفردة؟ $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{bmatrix}$

الحل : $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix} = ٣٢ \neq$ صفر ، ومنها تكون المصفوفة أ غير منفردة.

$|ب| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = ٠$ أي أن المصفوفة ب منفردة.

مثال ٣ : جد قيمة س التي تجعل المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & (س+١) \end{bmatrix}$ منفردة.

الحل : $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{٢} & \text{٨} \\ \text{٣} & (\text{س}+\text{١}) \end{vmatrix} = \text{٢}(\text{س} + \text{١}) - \text{٢٤}$

وبما أن أ مصفوفة منفردة فيكون | أ | = ٠

٢(س + ١) − ٢٤ = ٠

٢س + ٢ − ٢٤ = ٠ ومنها س = ١١

خصائص النظير الضربي:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين، وغير منفردتين، ومن نفس الرتبة ، وكان ك عدداً حقيقياً ≠ ٠، فإن:

① $(\text{أ}^{-1})^{-1} = \text{أ}$ ② $(\text{ك أ})^{-1} = \frac{\text{١}}{\text{ك}} (\text{أ}^{-1})$ ③ $(\text{أ . ب})^{-1} = \text{ب}^{-1} . \text{أ}^{-1}$

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة:

سوف نتعرف على طرق إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة، وستقتصر دراستنا على النظير الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية فقط.

مثال ٤ : جد النظير الضربي للمصفوفة $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٣} \\ \text{٦} & \text{٤} \end{bmatrix}$ (إن وجد).

الحل : نفرض أن: $\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix}$

$\text{أ} . \text{أ}^{-1} = \text{م}_{\text{٢}}$ أي $\begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٣} \\ \text{٦} & \text{٤} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{١} \end{bmatrix}$

ومنها $\begin{bmatrix} \text{٥س}+\text{٣ع} & \text{٥ص}+\text{٣ل} \\ \text{٦س}+\text{٤ع} & \text{٦ص}+\text{٤ل} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{١} \end{bmatrix}$

كما أن $\text{أ}^{-1} . \text{أ} = \text{م}_{\text{٢}}$ أي $\begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٣} \\ \text{٦} & \text{٤} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \text{٥س}+\text{٦ص} & \text{٣س}+\text{٤ص} \\ \text{٥ع}+\text{٦ل} & \text{٣ع}+\text{٤ل} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{١} \end{bmatrix}$

وبحل المعادلات الناتجة من تساوي المصفوفتين في الحالتين السابقتين:

ينتج أن: س = ٢ ، ع = −٣ ، ص = $\frac{-\text{٣}}{\text{٢}}$ ، ل = $\frac{\text{٥}}{\text{٢}}$

أي أن: $\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{٢} & \frac{-\text{٣}}{\text{٢}} \\ -\text{٣} & \frac{\text{٥}}{\text{٢}} \end{bmatrix}$ (تحقق من ذلك)

تعميم:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{bmatrix}$ مصفوفةً غير منفردةٍ فإن $\text{أ}^{-١}$ = $\frac{١}{|\text{أ}|}\begin{bmatrix} \text{أ}_{٢٢} & -\text{أ}_{٢١} \\ -\text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١١} \end{bmatrix}$

أي أن: $\text{أ}^{-١}$ تنتج من ضرب المصفوفة أ بمقلوب محددها بعد تبديل أماكن مدخلات القطر الرئيسي وتغيير إشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة أ.

مثال ٥ : إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ، فجد $\text{س}^{-١}$ (إن أمكن).

الحل : $|\text{س}| = -٢ - ٦ = -٨ \neq ٠$

المصفوفة س لها نظير ضربي، وتكون $\text{س}^{-١} = \frac{١}{-٨}\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٨} & \frac{١}{٤} \\ \frac{٣}{٨} & \frac{-١}{٤} \end{bmatrix}$

تمارين ٢ – ٨

١ بيّن أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي.

أ = $\begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٦ & -٣ & ٩ \\ ٢ & ٨ & -١ \end{bmatrix}$

٢ ما قيم ك التي تجعل كلاً من المصفوفات الآتية منفردةً ؟ أ = $\begin{bmatrix} \text{ك} & \text{ك} \\ ٤ & ٢\text{ك} \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} \text{ك} & ٤ \\ ١ & \text{ك} \end{bmatrix}$

٣ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فجد: أ $\text{أ}^{-١}$ (إن أمكن) ب $(\text{أ}^{-١})^{-١}$

٤ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{س} & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، وكان $|\text{أ}^{-١}| = \frac{١}{٥}$ ، فما قيمة س؟

٥ إذا علمت أن أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، وكان أ . جـ = ب ، فجد $\text{جـ}^{-١}$

٢ - ٩ حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات (Solving Systems of Linear Equations)

تعرفنا في صفوف سابقة على حل أنظمة المعادلات الخطّيّة (عدد المعادلات = عدد المتغيرات، ولها حل وحيد) بطريقتي الحذف والتعويض، وفي هذا الدرس سنبرز أهمية المصفوفات والمحددات في حل هذه الأنظمة، وسنتناول طريقتين، هما:

١ طريقة النظير الضربي*

٢ طريقة كريمر*

أولاً: طريقة النظير الضربي

يمكننا تمثيل نظام من المعادلات الخطّيّة على شكل معادلة مصفوفية، باستخدام ثلاث مصفوفات، هي: مصفوفة المعاملات أ، ومصفوفة المتغيرات ك، ومصفوفة الثوابت جـ .

إذا كان لدينا نظام المعادلات الخطّيّة الآتي:

٢س + ٣ص = ١٠ ، −٣س +٥ص = ٤ ، فإن مصفوفة المعاملات هي: أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$

ومصفوفة المتغيرات هي: ك = $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$، ومصفوفة الثوابت هي: جـ = $\begin{bmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$

ويمثل النظام السابق من المعادلات الخطّيّة بمعادلةٍ مصفوفيةٍ كما يأتي:

$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$ وهي على الصورة أ . ك = جـ وبالتالي:

تكون ك = $أ^{-١}$. جـ بشرط أن أ مصفوفة غير منفردة (لماذا؟)

* يكتفى بحل نظام مكون من معادلتين خطيتين فقط عند الحل بطريقتي النظير الضربي وكريمر.

مثال ١ : حل النظام : ٢س $+$ ص $= -١$ ، ٤س $+$ ص $= ١$ ، باستخدام طريقة النظير الضربي.

الحل : نكتب المعادلة المصفوفية على النحو: $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ١ \end{bmatrix}$

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٢ - ٤ = -٢$ ومنها $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{-٢}\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -١ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \\ -٢ + -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٣ \end{bmatrix}$ أي أن: س $= ١$ ، ص $= -٣$

فكّر وناقش:

ماذا يحدث للإجابة إذا تم تغيير ترتيب المعادلتين هكذا:

٤س $+$ ص $= ١$ ، ٢س $+$ ص $= -١$

ثانياً: طريقة كريمر

سبق وأن مثلنا أي نظام من المعادلات الخطّيّة بمعادلةٍ مصفوفيةٍ على النحو أ . ك = جـ

حيث إن مصفوفة المعاملات أ غير منفردةٍ، ك مصفوفة المتغيرات، جـ مصفوفة الثوابت، فإذا كان النظام

يتضمن المتغيرين س ، ص ، فإننا نجدهما على النحو: س $= \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|}$ ، ص $= \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|}$

حيث إن: $\text{أ}_{\text{س}}$ المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات س بعمود الثوابت.

$\text{أ}_{\text{ص}}$ المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات ص بعمود الثوابت.

مثال ٢ : باستخدام طريقة كريمر حل النظام الآتي: ٣ س $+ ٥$ص $= ١$، ٢ س $+ ٣$ ص $= ٠$

الحل : نكون المصفوفات: $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$، $\text{أ}_{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$، $\text{أ}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ فيكون:

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ - ١٠ = -١$ ، $|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ - ٠ = ٣$ ، $|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix} = -٢$

$\therefore$ س $= \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{٣}{-١} = -٣$ ، ص $= \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-٢}{-١} = ٢$

نشاط: قامت حنين بحل نظام مكون من معادلتين خطّيتين بالمتغيرين س ، ص، فوجدت أن المصفوفة

أ$_{س}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، والمصفوفة أ$_{ص}$ = $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ فإن:

مصفوفة المعاملات للنظام الذي حلّته حنين هي: ....

س = ... ، ص = ...

تمارين ٢ - ٩

١ حل كلاً من الأنظمة الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي:

أ س − ص = ٣
٢س + ص = ٦

ب س + ص = ٢
١٠س + ص = ١١

٢ حل أنظمة المعادلات الآتية باستخدام طريقة كريمر:

أ س − ص = ٥
س + ٢ص = ٢

ب س + ص = −٣
٢ص + س = −٢

٣ عند حل نظام مكون من معادلتين خطّيتين بالمتغيرين س ، ص بطريقة كريمر، وجد أن:

أ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، أ$_{س}$ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$ ، فجد قيمة س ، ص

ورقة عمل (٢)

❶ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{س} & ٢ \\ ٢ & \text{س} \end{bmatrix}$ ، وكان $|\text{أ}^{٣}|$ = ١٢٥، فما قيمة/ قيم س؟

❷ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \sqrt{٣} & -١ \end{bmatrix}$

جد المصفوفة د بحيث أن: أ + د = ب . د

❸ جد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة: س $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix}$ + ص $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣ \end{bmatrix}$

❹ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٥ & ١ \\ ٦ & -٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فجد المصفوفة ب من الرتبة ٣×٢

بحيث إن $\text{أ}_{\text{ي هـ}}$ = $\text{ب}_{\text{هـ ي}}$ لجميع قيم ي ، هـ

❺ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{س} & -٣ \\ ١ & \text{ص} \end{bmatrix}$ ، وكان $|\text{أ}^{-١}|$ = | أ | فما قيمة/ قيم المقدار (س ص)؟

❻ حل المعادلات المصفوفية الآتية:

أ $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ (باستخدام النظير الضربي)

ب $\begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ & ١١ \end{bmatrix}$

❼ عند حل المعادلتين ن س – ص = ٥ ، ك س + ص = ٣ ، ن ، ك عددان حقيقيان لا يساويان صفراً.

باستخدام طريقة كريمر، إذا كانت $\begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ تمثل محدد $\text{أ}_{\text{ص}}$

جد قيمة: أ ن ، ك ب س ، ص

اختبار الوحدة

١ اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كان ق(س) = { س^٢ – س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ س – ١ ، ١ < س ≤ ٣ } ، فما مجموعة قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) نقطة حرجة في الفترة [٠ ، ٣]؟

أ) {٠ ، ١ ، ٣} ب) {٠ ، ٣} ج) {٠ ، ١/٢ ، ٣} د) {٠ ، ١/٢ ، ١ ، ٣}

٢ إذا كان قَ(س) = (س^٢ – ١)^٣ (س – ٢)^٤ فما الفترة التي يكون فيها ق(س) متناقصاً؟

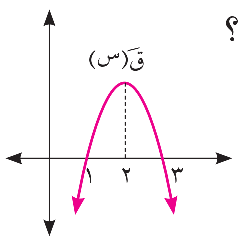
أ)]–∞ ، –١] ب) [–١ ، ١] ج) [١ ، ٢] د) [٢ ، ∞[

٣ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [١ ، ٣] وكان قً(س) < ٠ لجميع قيم س ∈]١ ، ٣[، ق(س) له ثلاث نقاط حرجة فقط في [١ ، ٣] وكان قَ(٢) = ٠، فما العبارة الصحيحة مما يأتي؟

أ) ق(٥/٢) < ٠ ب) ق(٥/٢) < ق(٢)

ج) ق(٥/٢) = ق(٢) د) ق(٥/٢) > ق(٢)

٤ الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س)، ما مجموعة حل المتباينة قً(س) < ٠ ؟



أ)]١ ، ٣[ب)]٢ ، ∞[

ج)]–∞ ، ٢[د)]–∞ ، ١[∪]٣ ، ∞[

٥ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة معرفاً على [أ ،ب] ، ما أكبر عدد ممكن من النقط الحرجة يمكن أن نحصل عليها للاقتران ق(س)؟

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

٦ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & -١ & ٥ \\ ٦ & -٣ & ٩ \\ ٢ & ٧ & -١ \end{bmatrix}$ فما قيمة $أ_{١٢} - أ_{٣١}$ ؟

أ) ٤ ب) –١ جـ) ١ د) –٣

٧ إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ٣ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & س^{٢} + س \end{bmatrix}$ فما مجموعة قيم س ؟

أ) $\{٣ ، ^{-}٢\}$ ب) $\{^{-}٣\}$ ج) $\{٢\}$ د) $\{^{-}٣ ، ٢\}$

٨ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ^{-}٥ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ^{-}٣ \\ ^{-}٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة المصفوفة ٢٢أ − ٥(أ + ٢ب) + ٢٧ب؟

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ^{-}٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ١٧ & ١٧ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ^{-}٣٤ & ٥١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٣٤ & ٥١ \end{bmatrix}$

٩ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فما المصفوفة التي تساوي $أ^{-١}$ + أ ، حيث $أ^{-١}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ؟

أ) و ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ١٠ & ٦ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١٠ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $٧\ م_{٢}$

١٠ إذا علمت أن أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ^{-}١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $أ^{٢}$ − أ ؟

أ) $١٠\ م_{٢}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ٩ \end{bmatrix}$ د) $٨\ م_{٢}$

١١ استخدم أحمد طريقة كريمر لحل نظام مكون من معادلتين خطّيتين في المتغيرين س ، ص فوجد أن: $|أ_{س}| = ٢\,|أ| = ^{-}\frac{١}{٢}\,|أ_{ص}|$ ، فما قيم س، ص على الترتيب؟

أ) ٢ ، −٤ ب) −٤ ، ٢ ج) ١ ، −٢ د) ٢ ، $\frac{^{-}١}{٢}$

أجب عن الأسئلة الآتية:

٢ إذا كان $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ص & ^{-}١ \\ س & ^{-}٤ \end{vmatrix} = ٧$ ، فما قيم س ، ص؟

٣ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ^{-}٣ \\ ٤ & ^{-}٢ \end{bmatrix}$ فجد : أ $|أ|\,أ^{-١}$ ب $|٣أ|$ ج $(^{-}٢أ)^{-١}$

٤ جد قيم س التي تجعل
$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{س} & \text{٢} \\ \text{س} & \text{٣} & \text{س} \\ \text{٤} & \text{س} & \text{٥} \end{vmatrix} = {}^{-}\text{٩}$$

٥ استخدم طريقة كريمر لحل نظام المعادلات: ٣س + ٢ ص = $^{-}$٤ ، ٥ ص + س = ٣

٦ إذا كان ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{\text{٤}}$] أثبت أن ق(س) متزايد على مجاله.

٧ إذا كان ق(س) = س$^{\text{٣}}$ – ٣س$^{\text{٢}}$ – ٩س + ٥ معرفاً في الفترة]$^{-}$٢ ، ٦[جد:

أ القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).

ب فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

جـ نقط الانعطاف، لمنحنى الاقتران ق(س).

٨ إذا كان الاقتران ق(س) كثير حدود معرفاً على [٢ ، ٦] ويقع منحناه في الربع الأول، ومتناقصاً على مجاله، وكان الاقتران هـ(س) = ٨ – س بيّن أن الاقتران ك(س) = (ق × هـ)(س) متناقص في [٢ ، ٦].

٩ ما أبعاد مخروط دائري قائم ذات أكبر حجم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها ١٠ سم؟

١٠ سلك طوله ١٨ سم، صنع منه مثلثان كل منهما متساوي الأضلاع، ما طول ضلع كل من المثلثين ليكون مجموع مساحتيهما أصغر ما يمكن؟