١٢

بسم الله الرحمن الرحيم

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيـات

"التكنولوجي"

الفترة الثالثة

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركزالمناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
+970 2 2983250 فاكس | +970 2 2983280 هاتف

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 - رام الله - فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

يتوقع من الطلبة بعد دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التكامل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إلى مفهوم التكامل غير المحدود.

٢. إيجاد التكامل غير المحدود.

٣. التعرف إلى قواعد التكامل غير المحدود وتوظيفها في إيجاده.

٤. التعرف إلى التكامل المحدود، وحسابه.

٥. التعرف إلى خواص التكامل المحدود وتوظيفها في حسابه.

٦. استخدام طريقة التعويض في إيجاد بعض التكاملات.

٧. توظيف التكامل غير المحدود في تطبيقات هندسية.

التكامل غير المحدود Indefinite Integral

تعريف:

إذا كان الاقتران $ق'(س)$ هو المشتقة الأولى للاقتران $ق(س)$، فإن الاقتران $ق(س) + جـ$ يمثل مجموعة الاقترانات التي مشتقتها الأولى $ق'(س)$، ويسمى بالتكامل غير المحدود للاقتران $ق'(س)$، أو يسمى بالاقتران الأصلي الذي مشتقته $ق'(س)$.

وبالرموز يكتب: $\int ق'(س)\,ءس = ق(س) + جـ$ ، $جـ \in ح$، الرمز $\int$ هو إشارة التكامل، ءس تشير أن الاقتران بدلالة المتغير س ، جـ يسمى ثابت التكامل.

مثال (٢): أجد $\int ٢\,ءس$ ؟

الحل: $\int ٢\,ءس = ق(س)$ ، حيث $ق'(س) = ٢$

$ق(س) = ٢س + جـ$

$\int ٢\,ءس = ٢س + جـ$ (الاقتران الأصلي).

مثال (٣): أجد $\int ٣س^{٢}\,ءس$ ؟

الحل: $\int ٣س^{٢}\,ءس = ك(س)$، حيث $ك'(س) = ٣س^{٢}$

$ك(س) = س^{٣} + جـ$

$\therefore \int ٣س^{٢}\,ءس = س^{٣} + جـ$ (الاقتران الأصلي).

مثال (٤): أي من الاقترانين **ق**(س) = ٢س^{٣} + ٤س^{٢} + ٤س + جـ

هـ(س) = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ

يمكن اعتباره اقتراناً أصلياً للمشتقة (٦س^{٢} + ١٠س + ٤) ؟

الحل: **ق**$'$(س) = ٦س^{٢} + ٨س + ٤

هـ$'$(س) = ٦س^{٢} + ١٠س + ٤

هـ(س) = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ هو الاقتران الأصلي للمشتقة

وبالرموز $\int$(٦س^{٢} + ١٠س + ٤) ءس = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ

مثال(٥): إذا كان **ق**(س) = $\int$(س^{٢} + س)(س − ٢) ءس ، أجد **ق**$'$(س) ؟

الحل: **ق**$'$(س) = مشتقة $\int$(س^{٢} + س)(س − ٢) ءس، وبما أن الاشتقاق عملية عكسية للتكامل،

فإن **ق**$'$(س) = (س^{٢} + س)(س − ٢).

تمارين ومسائل (٤-١)

س١: أكمل الجدول الآتي:

	المشتقة $\text{ق}'(\text{س})$	الاقتران الأصلي $\text{ق}(\text{س}) + \text{جـ}$
١.	$٤\text{س}^{٣}$	
٢.		$\text{س}^{٤} + \text{س}^{٣} + ٢\text{س} + \text{جـ}$
٣.	$٢\text{س} + ١$	
٤.		$\int (٤\text{س}^{٣} + ٣)\, \text{ءس}$

س٢: أضع إشارة ✓ أمام العبارة الصائبة وإشارة ✗ أمام العبارة الخاطئة:

أ. $\int (٥\text{س} + ٤)\, \text{ءس} = \frac{٥\text{س}^{٢}}{٢} + ٤\text{س}$

ب. $\int (٦\text{س}^{٥} + ٣\text{س}^{٢})\, \text{ءس} = \text{س}^{٦} + \text{س}^{٣} + \text{جـ}$

جـ. $\int (٢\text{س}^{٣} + ٣\text{س})\, \text{ءس} = ٦\text{س} + ٣$

د. $\int \frac{-٥}{\text{س}^{٢}}\, \text{ءس} = \frac{٥}{\text{س}} + \text{جـ}$

هـ. $\int ٢\text{نو}\, \text{ءس} = \text{نو}^{٢} + \text{جـ}$

و. $\int ٢\text{نو}\, \text{ءنو} = \text{نو}^{٢} + \text{جـ}$

س٣. إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \int \frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س} + ١}\, \text{ءس}$، أجد $\text{ق}'(\text{س})$.

قواعد التكامل غير المحدود وتطبيقاتة
(Rules of Indefinite Integral and its Application)

مثال (١): أجد $\int$ ٣ءس ؟

الحل: المطلوب هو إيجاد الاقتران الأصلي ق(س) الذي مشتقته الأولى ق$'$(س) = ٣.

من معلوماتنا في التفاضل، ألاحظ أن الاقترانات ق$_{١}$(س) = ٣س

ق$_{٢}$(س) = ٣س + ٥

ق$_{٣}$(س) = ٣س − $\sqrt{٢}$

ق$_{٤}$(س) = ٣س + ثابت

هي اقترانات مشتقتها الأولى ق$'$(س) = ٣، وألاحظ أن الفرق بين هذه الاقترانات هو في الحد الثابت فقط، ولذلك فإن الاقتران الأصلي ق(س) الذي مشتقته ق$'$(س) = ٣ هو ق(س) = ٣س + جـ.

أي أن $\int$ ٣ءس = ٣س + جـ

قاعدة (١):

$\int$ أءس = أس + جـ ، أ ، جـ عددان حقيقيان.

مثال (٢): أجد التكاملات الآتية:

١) $\int$ ⁻٥ءس ٢) $\int \sqrt{٣}$ ءص ٣) $\int \frac{١}{٢}$ ءع.

الحل: ١) $\int$ ⁻٥ءس = ⁻٥س + جـ، الاقتران بدلالة المتغير س.

٢) $\int \sqrt{٣}$ ءص = $\sqrt{٣}$ ص + جـ، الاقتران بدلالة المتغير ص.

٣) $\int \frac{١}{٢}$ ءع = $\frac{١}{٢}$ ع + جـ، الاقتران بدلالة المتغير ع.

مثال (٣): أتأمل الجدول الآتي، وأجيب عن الأسئلة اللاحقة:

$\text{ق}(\text{س})$	$\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$	$\frac{\text{س}^{٤}}{٤} + ٧$	$\frac{\text{س}^{٥}}{٥}$	$\frac{\text{س}^{٦}}{٦} + ٢$
$\text{ق}'(\text{س})$	$\text{س}^{٢}$	$\text{س}^{٣}$	$\text{س}^{٤}$	$\text{س}^{٥}$

١. ما العلاقة بين درجة $\text{ق}'(\text{س})$ و درجة $\text{ق}(\text{س})$؟

٢. ما العلاقة بين معامل الحد الذي يحتوي على س في $\text{ق}(\text{س})$ ودرجة $\text{ق}(\text{س})$ ؟

الحل: ١. درجة الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ تزيد ١ عن درجة $\text{ق}'(\text{س})$.

معامل الحد الذي يحتوي على س يساوي مقلوب درجة الاقتران.

قاعدة (٢):

$\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن} + ١} + \text{جـ}$، جـ عدد حقيقي، ن $\neq$ -١.

مثال (٤): أجد كلاً من التكاملات الآتية:

أ. $\int \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$

ب. $\int \text{س}^{-٣}\,\text{ءس}$

ج. $\int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

د. $\int \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

الحل: أ. $\int \text{س}^{٢}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{٢+١}}{٢ + ١} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

ب. $\int \text{س}^{-٣}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{-٣+١}}{-٣ + ١} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{-٢}}{-٢} + \text{جـ} = \frac{-\text{س}^{-٢}}{-٢} + \text{جـ}$

ج. $\int \text{س}^{\frac{١}{٢}} \, \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \frac{٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \text{جـ}$

د. $\int \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} \, \text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{٢}{٣}} \, \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\frac{٢}{٣}+١}}{\frac{٢}{٣}+١} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}} + \text{جـ} = \frac{٣\text{س}^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + \text{جـ} = \frac{٣}{٥} \sqrt[٣]{\text{س}^{٥}} + \text{جـ}$

قاعدة (٣):

إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل، فإن $\int \text{أ ق(س)} \, \text{ءس} = \text{أ} \int \text{ق(س)} \, \text{ءس}$ ، أ $\in$ ح

مثال (٥): أجد التكاملات الآتية:

أ. $\int ٢\text{س}^{٣} \, \text{ءس}$

ب. $\int \frac{٣}{٥}\text{س}^{٤} \, \text{ءس}$

ج. $\int \sqrt{٢} \, \text{ل}^{٧} \, \text{ءل}$

الحل: أ. $\int ٢\text{س}^{٣} \, \text{ءس} = ٢ \int \text{س}^{٣} \, \text{ءس} = \frac{٢\text{س}^{٤}}{٤} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{٤}}{٢} + \text{جـ}$

ب. $\int \frac{٣}{٥}\text{س}^{٤} \, \text{ءس} = \frac{٣}{٥} \int \text{س}^{٤} \, \text{ءس} = \frac{٣}{٥} \times \frac{\text{س}^{٥}}{٥} + \text{جـ} = \frac{٣\text{س}^{٥}}{٢٥} + \text{جـ}$

ج. $\int \sqrt{٢} \, \text{ل}^{٧} \, \text{ءل} = \sqrt{٢} \int \text{ل}^{٧} \, \text{ءل} = \sqrt{٢} \, \frac{\text{ل}^{٨}}{٨} + \text{جـ}$

قاعدة (٤):

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل، فإن:

١. $\int (\text{ق} + \text{هـ})(\text{س}) \, \text{ءس} = \int \text{ق(س)} \, \text{ءس} + \int \text{هـ(س)} \, \text{ءس}$

٢. $\int (\text{ق} - \text{هـ})(\text{س}) \, \text{ءس} = \int \text{ق(س)} \, \text{ءس} - \int \text{هـ(س)} \, \text{ءس}$

مثال (٦): أجد $\int (٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س}) \, \text{ءس}$

الحل: $\int (٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س}) \, \text{ءس} = ٣\int \text{س}^{٢} \, \text{ءس} + ٤ \int \text{س} \, \text{ءس}$

$= \text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + \text{جـ}$ (لماذا؟)

مثال (٧): أجد $\int (\frac{١}{٢}س^{٣} - \frac{٥}{س^{٢}})\, ءس$

الحل: $\int (\frac{١}{٢}س^{٣} - \frac{٥}{س^{٢}})\, ءس = \int \frac{١}{٢}س^{٣}\, ءس - \int \frac{٥}{س^{٢}}\, ءس$

$= \frac{١}{٢}\int س^{٣} ءس - ٥\int س^{-٢}\, ءس$

$= \frac{س^{٤}}{٨} + \frac{٥}{س} + جـ$ (لماذا؟)

يمكن تعميم القاعدة (٤) لأكثر من اقترانين.

مثال (٨): أجد $\int (س + ٣)^{٢}\, ءس$

الحل: $(س + ٣)^{٢} = (س + ٣)(س + ٣) = س^{٢} + ٦س + ٩$

$\int (س + ٣)^{٢}\, ءس = \int (س^{٢} + ٦س + ٩)\, ءس = \int س^{٢}\, ءس + \int ٦س\, ءس + \int ٩\, ءس$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + ٦\frac{س^{٢}}{٢} + ٩س + جـ$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + ٣س^{٢} + ٩س + جـ$

مثال (٩): جد $\int \frac{ع^{٢} - ٩}{ع + ٣}\, ءع$ ، $ع \neq {}^{-}٣$

الحل: $\int \frac{ع^{٢} - ٩}{ع + ٣}\, ءع = \int \frac{(ع - ٣)\cancel{(ع + ٣)}}{\cancel{(ع + ٣)}}\, ءع = \int (ع - ٣)\, ءع = \frac{ع^{٢}}{٢} - ٣ع + جـ$

مثال (١٠): إذا كان $ص = \int (٥س^{٢} + ٣س)\, ءس$ ، أجد $\frac{ءص}{ءس}$ ؟

الحل: $ص = \int (٥س^{٢} + ٣س)\, ءس = \frac{٥س^{٣}}{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} + جـ$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٥ \times ٣س^{٢}}{٣} + \frac{٣ \times ٢س}{٢} + صفر$

$= ٥س^{٢} + ٣س$ (ماذا نلاحظ؟)

هل يمكن الحل بطريقة أخرى؟ (وضح ذلك.)

مثال١١:

إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالقاعدة ق/(س) = ٣س – ١، أجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٧).

الحل: ق(س) = ∫ ق/(س) ءس = ∫(٣س – ١) ءس = $\frac{٣س^{٢}}{٢}$ – س + جـ

منحنى الاقتران يمر بالنقطة (٠ ، ٧) ومنها ق(٠) = ٧

ومنها جـ = ٧

ومنها ق(س) = $\frac{٣س^{٢}}{٢}$ – س + ٧

مثال١٢:

إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة هـ/(س) = ٤س + ٣، أجد قاعدة الاقتران هـ(س) علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٢ ، ٧).

الحل: هـ(س) = ∫ هـ/(س) ءس

= ∫(٤س+٣) ءس

= ٢س^{٢} + ٣س + جـ

لكن منحنى الاقتران هـ(س) يمر بالنقطة (٢ ، ٧)

ومنها هـ(٢) = ٧

ومنها جـ = -٧

إذا هـ(س) = ٢س^{٢} + ٣س - ٧

تمارين ومسائل (٤-٢)

س١: أجد التكاملات الآتية:

أ. $\int \frac{٢}{٣} \, ءس$ ب. $\int \pi \, ءع$ ج. $\int \sqrt{٥} \, س \, ءس$

د. $\int (٢س^{٢} + ٣) \, ءس$ هـ. $\int (٧س^{٣} - \frac{٢}{س^{٢}} + ١) \, ءس$ و. $\int ك^{٢} \, ءس$ ، ك ثابت $\neq ٠$

س٢: أجد $\int (٢ص - ٥)(ص + ٣) \, ءص$

س٣: أجد $\int \frac{ل^{٢} - ٥ل + ٦}{ل - ٢} \, ءل$ ، $ل \neq ٢$

س٤: أجد $\int (٢س + ١)(س^{٣} + س^{٢} - ٣س + ٤) \, ءس$

س٥: إذا كان $ق(س) = \int (٣س^{٣} + ٥س^{٢} - ٢س + ٤) \, ءس$، أجد $ق^{/}(س)$.

س٦: إذا كان $ص = \int (٢س + ٢)(س^{٢} + ٢س)^{٥} \, ءس$، أجد $\frac{ءص}{ءس}$.

س٧: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $ق^{/}(س) = ٥$، أجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٢ ، ٣).

س٨: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ك(س) عند أي نقطة عليه تعطى بالعلاقة $ك^{/}(س) = (س+١)^{٣}$، أجد ك(٢) علماً بأن منحنى ك(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٢).

س٩: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ع(س) عند أي نقطة عليه هو (٢س − ٥)، أجد معادلة المماس لمنحنى ع(س) عندما س = ٢ ، علماً بأن منحنى ع(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٣) .

التكامل المحدود (Definite Integral):

نشاط (١):

إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) هو ق$^{/}$(س) = ٢س + ٣، كيف يمكن حساب التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$= ٢ إلى س$_{٢}$ = ٥؟

لحساب هذا التغير يلزمنا ق(س)، حيث:

ق(س) = $\int$ ق$^{/}$(س) ءس

= $\int$ (......) ءس

= س^{٢} + ٣س + جـ

التغير في الاقتران = ق(٥) − ق(٢) =

= (٢٥ + ١٥ + جـ) − (   )

= ٣٠

هل نحن بحاجة لمعرفة قيمة الثابت جـ لحساب هذا التغير؟

تعريف:

إذا كانت ق$^{/}$(س) هي المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، وكان ق$^{/}$(س) قابلاً للتكامل،

فإن $\int_{أ}^{ب}$ ق$^{/}$(س)ءس = ق(ب) − ق(أ)، أ،ب عددان حقيقيان. وهذا التكامل يسمى تكاملاً محدوداً،

حدّه العلوي = ب، وحدّه السفلي= أ، وقيمته = عدداً ثابتاً.

مثال (١): أحسب قيمة التكامل $\int_{١}^{٢} (\text{س} - ٣)\ \text{ءس}$ ؟

الحل: $\text{ق(س)} = \int (\text{س} - ٣)\ \text{ءس}$

$$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٣\text{س} + \text{جـ}$$

$$\int_{١}^{٢} (\text{س} - ٣)\ \text{ءس} = \text{ق}(٢) - \text{ق}(١)$$

$$= (٢ - ٦ + \text{جـ}) - \left(\frac{١}{٢} - ٣ + \text{جـ}\right)$$

$$= \frac{-٣}{٢} + \text{جـ} - \text{جـ} = \frac{-٣}{٢}$$

يمكن حل المثال بطريقة أخرى

$$\int_{١}^{٢} (\text{س} - ٣)\text{ءس} = \left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٣\text{س}\right)\Bigg|_{١}^{٢}$$

أعوض الحد العلوي، ثم أطرح منه ناتج تعويض الحد السفلي.

$$= (٢ - ٦) - \left(\frac{١}{٢} - ٣\right) = \frac{-٣}{٢}$$

مثال (٢): أجد $\int_{-١}^{٢} (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)\ \text{ءس}$

الحل: $\int_{-١}^{٢} (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)\ \text{ءس} = (\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + \text{س})\Big|_{-١}^{٢}$

$$= (٨ - ٤ + ٢) - (-١-١-١)$$

$$= ٩$$

مثال (٣): إذا كان $\int_{٢}^{٤} (\text{بس} - ٧)\ \text{ءس} = ٣٤$، أجد قيمة الثابت ب.

الحل: $\int_{٢}^{٤} (\text{بس} - ٧)\ \text{ءس} = \left(\frac{\text{بس}^{٢}}{٢} - ٧\text{س}\right)\Bigg|_{٢}^{٤} = ٣٤$

$$= (٨\text{ب} - ٢٨) - (٢\text{ب} - ١٤) = ٣٤$$

$$٦\text{ب} - ١٤ = ٣٤$$

$$٦\text{ب} = ٤٨$$

$$\text{ب} = ٨$$

مثال (٤): إذا كان $\int_{\text{٥}}^{\text{ب}} \text{٦س ءس} = {}^{-}\text{٦٣}$، أجد قيمة/قيم الثابت ب.

الحل: $\int_{\text{٥}}^{\text{ب}} \text{٦س ءس} = \text{٣س}^{\text{٢}} \Big|_{\text{٥}}^{\text{ب}} = {}^{-}\text{٦٣}$

$\text{٣ب}^{\text{٢}} - \text{٧٥} = {}^{-}\text{٦٣}$

$\text{ب}^{\text{٢}} = \text{٤}$ (لماذا؟)

$\text{ب} = \pm \text{٢}$

نشاط (٣):

جد ق/(س) في كل مما يأتي:

١. $\text{ق(س)} = \int_{\text{٢}}^{\text{٣}} (\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٢س})\ \text{ءس}$

٢. $\text{ق(س)} = \int_{{}^{-}\text{١}}^{\text{٧}} (\text{٧س}^{\text{٥}} - \text{٣س})^{\text{٩}}\ \text{ءس}$

أتعلم: مشتقة التكامل المحدود تساوي صفراً.

تمارين ومسائل (٤-٤)

س١: أحسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{-١}^{٢} ٦\pi \, \text{ءس}$

ب) $\int_{٠}^{٢} (٥ - ٣\text{س}^{٢}) \, \text{ءس}$

ج) $\int_{١}^{٣} \left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{\text{س}^{٣}}\right) \text{ءس}$

د) $\int_{١}^{٨} \sqrt[٣]{\text{س}} \, \text{ءس}$

س٢: إذا كان $\int_{٣}^{٥} \text{ب}^{٢} \text{ءس} = ٣٢$ فما قيمة/ قيم الثابت ب؟

س٣: إذا كان $\int_{-٢}^{\text{أ}} (٣ - ٢\text{س}) \, \text{ءس} = $ صفراً، فما قيمة/ قيم الثابت أ.

س٤: أحسب $\int_{٠}^{٢} (٢\text{س} - ١)^{٢} \, \text{ءس}$.

س٥: أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتي:

أ) $\text{ص} = \int (٤\text{س}^{٣} + ٢\text{س} - ٥) \, \text{ءس}$

ب) $\text{ص} = \int_{٢}^{٧} (٤\text{س}^{٣} + ٢\text{س} - ٥) \, \text{ءس}$

خصائص التكامل المحدود Definite Integral Properties

نشاط (١):

١. $\int_{٢}^{٢} ٧ ﺀس = ٧س \Big|_{٢}^{٢} = ٧ (٢ - ٢) = ٠$

٢. $\int_{٥}^{٥} (٢س + ٣) ﺀس = (.........) \Big|_{٥}^{٥} = ٠$ (لماذا؟)

خاصية (١): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل فإن $\int_{أ}^{أ}$ ق(س) ﺀس = ٠ لكل أ $\in$ ح

فمثلاً: أ) $\int_{١}^{١} (٢س^{٢} + ٣س + ٢) ﺀس = ٠$ حسب الخاصية (١)

ب) $\int_{٢}^{٢} (\sqrt{س} + ٥) ﺀس = ٠$ حسب الخاصية (١)

خاصية (٢): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، فإن: $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ﺀس = - $\int_{ب}^{أ}$ ق(س) ﺀس

مثال (١): إذا علمت أن $\int_{١}^{٢}$ ق(س) ﺀس = ٨، أحسب $\int_{٢}^{١}$ ق(س) ﺀس ؟

الحل: $\int_{٢}^{١}$ ق(س) ﺀس = - $\int_{١}^{٢}$ ق(س) ﺀس = ⁻٨ حسب الخاصية (٢)

مثال (٢): إذا كان $\int_{٢}^{٣}$ ق(س) ﺀس = ⁻٣ ، جد $\int_{٣}^{٢}$ ⁻٢ق(س) ﺀس ؟

الحل: $\int_{٣}^{٢}$ ⁻٢ق(س) ﺀس = ⁻٢ $\int_{٣}^{٢}$ ق(س) ﺀس = ٢ $\int_{٢}^{٣}$ ق(س) ﺀس = ٢ (⁻٣) = ⁻٦

خاصية (٣): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، على [أ ، جـ] ، ب ∋ [أ ، جـ] فإن

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\ ءس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\ ءس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\ ءس$$ (خاصية الإضافة)

مثال (٣): إذا علمت أن $\int_{١}^{٢} ق(س)\ ءس = ٣$، $\int_{٢}^{٤} ق(س)\ ءس = {}^-٩$ أجد $\int_{١}^{٤} ق(س)\ ءس$ ؟

الحل: $\int_{١}^{٤} ق(س)\ ءس = \int_{١}^{٢} ق(س)\ ءس + \int_{٢}^{٤} ق(س)\ ءس$ حسب الخاصية (٣)

$= (٣) + ({}^-٩) = {}^-٦$

مثال (٤): إذا علمت أن $\int_{١}^{٣} ق(س)\ ءس = ٢$ ، $\int_{٤}^{٣} ٥ق(س)ءس = ١٥$ ، أجد $\int_{١}^{٤} {}^-٢ق(س)\ ءس$ ؟

الحل: $\int_{١}^{٤} {}^-٢ق(س)\ ءس = {}^-٢ \int_{١}^{٤} ق(س)\ ءس$

$\int_{١}^{٤} ق(س)\ ءس = \int_{١}^{٣} ق(س)\ ءس + \int_{٣}^{٤} ق(س)\ ءس$

لكن $\int_{٣}^{٤} ق(س)\ ءس = -\int_{٤}^{٣} ق(س)\ ءس = {}^-٣$ لماذا؟

$\int_{١}^{٤} ق(س)\ ءس = ٢ + ({}^-٣) = {}^-١$ لماذا؟

$\therefore \int_{١}^{٤} {}^-٢ق(س)\ ءس = {}^-٢({}^-١) = ٢$

خاصية (٤): إذا كان الاقترانان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] فإن

$$\int_{أ}^{ب} ق(س) \pm هـ(س)\ ءس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\ ءس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\ ءس$$

مثال (٥): إذا كان $\int_{-١}^{٢} ق(س)\ ءس = -٥$ ، أجد $\int_{-١}^{٢} (٣ق(س) + س + ٢)\ ءس$ ؟

الحل: $\int_{-١}^{٢} (٣ق(س) + س + ٢)\ ءس = \int_{-١}^{٢} ٣ق(س)\ ءس + \int_{-١}^{٢} (س + ٢)\ ءس$

$$= ٣\int_{-١}^{٢} ق(س)\ ءس + \left(\frac{س^{٢}}{٢} + ٢س\right)\Big|_{-١}^{٢}$$

$$= ٣(-٥) + \left[\left(\frac{٤}{٢} + ٤\right) - \left(\frac{١}{٢} + ٢(-١)\right)\right]$$

$$= -١٥ + \left(٦ + \frac{٣}{٢}\right) = \frac{-١٥}{٢}$$

تمارين ومسائل (٤-٥)

س١: أحسب $\int_{٢}^{٢} (\text{س}^{٢} - ٦\text{س})\ \text{ءس}$

س٢: أحسب التكاملات الآتية:

أ. $\int_{٢}^{٣} (\text{س} - ٦)\ \text{ءس}$ ب. $\int_{٢}^{٥} (\text{س} - ٦)\ \text{ءس}$ ج. $\int_{٣}^{٥} (\text{س} - ٦)\ \text{ءس}$

س٣: إذا كان $\int_{-١}^{٢} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = -٣$ ، $\int_{٠}^{٢} ٢\text{ق(س)}\ \text{ءس} = ٤$، أجد قيمة الآتي:

أ. $\int_{٠}^{٢} -٣\text{ق(س)}\ \text{ءس}$ ب. $\int_{-١}^{٠} \text{ق(س)}\ \text{ءس}$ ج. $\int_{-١}^{٢} (٣\text{ق(س)} + \text{س})\ \text{ءس}$

س٤: إذا كان $\int_{٢}^{٣} ٣\text{ق(س)}\ \text{ءس} = ١٢$ ، $\int_{٢}^{٣} -٢\text{هـ(س)}\ \text{ءس} = ٦$ ، أجد قيمة:

$\int_{٢}^{٣} (٥\text{هـ(س)} - ٣\text{ق(س)})\ \text{ءس}$

Integration by Substitution: التكامل بالتعويض

نشاط (١):

أجد $\int (س - ٣)^٢ \, ءس$

الحل: $\int (س - ٣)^٢ \, ءس = \int (\qquad\qquad) \, ءس$ (لماذا؟)

$= \frac{س^٣}{٣} - ٣س^٢ + ٩س + جـ$

وبالطريقة نفسها جد $\int (٤س - ٩)^٣ \, ءس$

لكن هل يمكن أن أجد $\int (٤س - ٩)^{١٠} \, ءس$ بسهولة بالطريقة نفسها ؟

يمكن إيجاد $\int (س - ٣)^٢ \, ءس$ بطريقة أخرى، تسمى طريقة التكامل بالتعويض.

الحل: أفرض أن ص = (س – ٣) ومنها $\frac{ءص}{ءس} = ١$ ومنها ءس = ءص بالتعويض في التكامل

$\int (س - ٣)^٢ \, ءس = \int ص^٢ \, ءص = \frac{ص^٣}{٣} + جـ = \frac{(س - ٣)^٣}{٣} + جـ$

مثال (١): أجد $\int (٣س + ١)^٩ \, ءس$

الحل: أفرض أن ص = ٣س + ١ ومنها $\frac{ءص}{ءس} = ٣$ ومنها ءس $= \frac{ءص}{٣}$

أعوض في التكامل $\int (٣س + ١)^٩ \, ءس = \int ص^٩ \frac{ءص}{٣} = \frac{١}{٣} \int ص^٩ \, ءص$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{ص^{١٠}}{١٠} + جـ = \frac{ص^{١٠}}{٣٠} + جـ$

$= \frac{(٣س + ١)^{١٠}}{٣٠} + جـ$

مثال (٢): أجد $\int_{0}^{1}$ س(٣س^{٢} − ١)^{٣} ءس

الحل: أفرض أن ص = (٣س^{٢} − ١) ومنها $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س ومنها ءس = $\frac{\text{ءص}}{\text{٦س}}$

أعوض في التكامل

$\int$ س(٣س^{٢} ـ ١)^{٣} ءس = $\int$ س ص^{٣} $\frac{\text{ءص}}{\text{٦س}}$ = $\frac{١}{٦}$ $\int$ ص^{٣} ءص

= $\frac{١}{٦}$ × $\frac{\text{ص}^{٤}}{٤}$ + جـ = $\frac{(\text{٣س}^{٢}-١)^{٤}}{٢٤}$ + جـ

$\int_{0}^{1}$ س(٣س^{٢} ـ ١)^{٣} ءس = $\left. \frac{(\text{٣س}^{٢}-١)^{٤}}{٢٤} \right|_{0}^{1}$

$\frac{(٣\times١ـ١)^{٤}}{٢٤}$ − $\frac{(٣\times٠ـ١)^{٤}}{٢٤}$ = $\frac{١٥}{٢٤}$

مثال (٣): أجد $\int$ (٢س + ١)(س^{٢} + س − ٥)^{٣} ءس

الحل: أفرض أن ص = (س^{٢} + س − ٥) ومنها $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (٢س + ١) ومنها ءس = $\frac{\text{ءص}}{(\text{٢س}+١)}$

أعوض في التكامل

$\int$ (٢س + ١)(س^{٢} + س − ٥)^{٣} ءس = $\int$ (٢س + ١)(ص)^{٣} $\frac{\text{ءص}}{(\text{٢س}+١)}$

= $\int$ ص^{٣} ءص = $\frac{\text{ص}^{٤}}{٤}$ + جـ

= $\frac{(\text{س}^{٢} + \text{س} - ٥)^{٤}}{٤}$ + جـ

تمارين ومسائل (٤-٦)

أجد التكاملات الآتية:

س١: $\int (\text{٢} - \text{٣س})^{\text{٣}} \, \text{ءس}$

س٢: $\int \frac{\text{٣}}{(\text{س} - \text{١})^{\text{٥}}} \, \text{ءس}$

س٣: $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{٤}} \, \text{ءس}$ ، أ ، ب ثوابت

س٤: $\int \text{س}^{\text{٢}} (\text{س}^{\text{٣}} + \text{١})^{\text{٤}} \, \text{ءس}$

س٥: $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} (\text{٢س} - \text{١})^{\text{٢}} \, \text{ءس}$

س٦: $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\text{٢س} - \text{٥})(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٧})^{-\text{٢}} \, \text{ءس}$

س٧: $\int \sqrt{\text{٣س} - \text{١}} \, \text{ءس}$

س٨: $\int (\text{س} + \text{٢}) \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤س} + \text{٥}} \, \text{ءس}$

ورقة عمل

١) إذا كان $\int$ ق$^{/}$(س) ءس = ٣س − ٤س^{٢} + ٢، ما قيمة ق$^{/}$(١) ؟

٢) جد $\int$ س $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ ءس؟

٣) إذا كان $\int_{١}^{ب}$ بءس = ٢، ما قيمة/ قيم الثابت ب ؟

٤) إذا علمت أن ق$^{/}$(س) = ٤س^{٣} + س^{٢} − ٢س، ق(٠) = ٣ أجد ق(١).

٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة ق$^{/}$(س) = ٣ − ٢س، ما قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحنى ق(س) يمر بالنقطة (١، ٦).

نموذج اختبار

س١: أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) ما الاقتران الذي يمثل اقتراناً أصلياً للمشتقة ق/(س) = ٤س^{٢} + ٦س + ٢ ؟

أ) ق(س) = $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢س + ١

ب) ق(س) = $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + ٦س^{٢} + ٢س + ١

جـ) ق(س) = ٨س + ٦

د) ق(س) = $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢

٢) إذا كان $\int$ ق/(س) ءس = ٣س − ٤س^{٢} + ٢، ما قيمة ق/(١) ؟

أ) -٨ ب) -٥ جـ) ١ د) صفر

٣) إذا كان $\int_{٢}^{٥}$ ق/(س) ءس = ١٢، وكان ق(٥) = ٢ق(٢)، ما قيمة ق(٢) ؟

أ) ١٢ ب) ٥ جـ) ٤ د) ٢

٤) إذا كان هـ(س) = $\int_{٠}^{٣}$ (٢س + ٣س^{٢} + ١) ءس، ما قيمة هـ/(٢)؟

أ) صفر ب) ٣ جـ) ٨ د) ١٥

٥) إذا كان $\int_{١}^{ب}$ بءس = ٢، ما قيمة/ قيم الثابت ب ؟

أ) ١ ، ٢ ب) ١ ، -٢ جـ) -١، ٢ د) -١ ، -٢

٦) إذا كان $\int_{٢}^{٧}$ ٣ق(س)ءس = ٩، $\int_{٧}^{٥}$ ق(س)ءس = -٢، ما قيمة $\int_{٢}^{٥}$ ق(س)ءس ؟

أ) ٧ ب) ١١ جـ) ٥ د) ١

س٢: جد $\int_{١}^{١}$ (س^{٢} + ٢س + ١)^{٥} ءس

س٣: جد $\int$ (٢س + ٣)^{٧} ءس

س٤: إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ءس = ٧ ، $\int_{١}^{٣}$ هـ(س) ءس = $^{-}$٤،

ما قيمة $\int_{١}^{٣}$ (٢ق(س) − ٥هـ(س) + ٢) ءس؟

س٥: أجد $\int$ (٢س + ١) $\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} + \text{س} + ٤)^{٢}}$ ءس.