١٢

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الريادي والفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

الفترة الثالثة

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
مركز المناهج

moehe.gov.ps | mohe.pna.ps | mohe.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
+970-2-2983280 هاتف | +970-2-2983250 فاكس

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف قواعد التكامل غير المحدود ومفاهيم الفائدة في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- التعرف إلى مفهوم التكامل غير المحدود.
- إيجاد التكامل غير المحدود.
- التعرف إلى قواعد التكامل غير المحدود وتوظيفها في إيجاده.
- التعرف إلى التكامل المحدود، وحسابه.
- التعرف إلى خواص التكامل المحدود وتوظيفها في حسابه.
- استخدام طريقة التعويض في إيجاد بعض التكاملات.
- توظيف التكامل المحدود في إيجاد بعض المساحات.
- التعرف إلى مفهوم الفائدة، وأنواعها.
- التعرف إلى عوامل الفائدة.
- إيجاد الفائدة البسيطة.
- إيجاد الفائدة المركبة.

البنود الملونة باللون الأحمر يستثنى منها الفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

التكامل غير المحدود (Indefinite Integral)

إذا كان ق(س) = س^{٣} فإن ق$'$(س) = ٣س^{٢}، إذا كان ق$'$(س) = ٢س، فإن ق(س) = ...؟

إن عملية إيجاد الاقتران ق(س) الذي عُلِمت مشتقته الأولى ق$'$(س) هي عملية عكسية لعملية الاشتقاق التي تعلمتها في الوحدة السابقة.

مثال (١): أكتب ثلاثة اقترانات مشتقتها الأولى هي ٤س^{٣}؟

الحل: ق(س)= س^{٤}، ك(س)= س^{٤} + ١٣، هـ(س) = س^{٤} ـ π، جميعها مشتقتها هي ٤س^{٣}.

ألاحظ أن ق(س) – ك(س) = س^{٤} – (س^{٤} + ١٣) = -١٣ وكذلك ك(س) – هـ(س) = (س^{٤} + ١٣) – (س^{٤} – π) = ١٣ + π أي أن الفرق بين أي اقترانين لهما نفس المشتقة هو عدد ثابت، لذلك فإن الاقتران الذي مشتقته ٤س^{٣} سيكون على الصورة ق(س) = س^{٤} + جـ، أي أن التكامل عملية عكسية للتفاضل.

تعريف:

إذا كان الاقتران ق$'$(س) هو المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، فإن الاقتران ق(س) + جـ يمثل مجموعة الاقترانات التي مشتقتها الأولى ق$'$(س)، ويسمى بالتكامل غير المحدود للاقتران ق$'$(س)، أو يسمى بالاقتران الأصلي الذي مشتقته ق$'$(س).

وبالرموز يكتب: $\int$ ق$'$(س) ءس = ق(س) + جـ ، جـ $\in$ ح، الرمز $\int$ هو إشارة التكامل، ءس تشير أن الاقتران بدلالة المتغير س ، جـ يسمى ثابت التكامل.

مثال (٢): أجد $\int$ ٢ءس ؟

الحل: $\int$ ٢ءس = ق(س) ، حيث ق$'$(س) = ٢

ق(س) = ٢س + جـ

$\int$ ٢ءس = ٢س + جـ (الاقتران الأصلي).

مثال (٣): أجد $\int$ ٣س^{٢} ءس ؟

الحل: $\int$ ٣س^{٢} ءس = ك(س)، حيث ك$'$(س) = ٣س^{٢}

ك(س) = س^{٣} + جـ

$\int$ ٣س^{٢} ءس = س^{٣} + جـ (الاقتران الأصلي).

مثال (٤): أي من الاقترانين ق(س) = ٢س^{٣} + ٤س^{٢} + ٤س + جـ

هـ(س) = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ

يمكن اعتباره اقتراناً أصلياً للمشتقة (٦س^{٢} + ١٠س + ٤) ؟

الحل: ق$^{/}$(س) = ٦س^{٢} + ٨س + ٤

هـ$^{/}$(س) = ٦س^{٢} + ١٠س + ٤

هـ(س) = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ هو الاقتران الأصلي للمشتقة (٦س^{٢} + ١٠س + ٤)

وبالرموز $\int$(٦س^{٢} + ١٠س + ٤) ءس = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ

مثال(٥): إذا كان ق(س) = $\int$(س^{٢} + س)(س − ٢) ءس ، أجد ق$^{/}$(س) ؟

الحل: ق$^{/}$(س) = مشتقة $\int$(س^{٢} + س)(س − ٢) ءس، وبما أن الاشتقاق عملية عكسية للتكامل،

فإن ق$^{/}$(س) = (س^{٢} + س)(س − ٢).

تمارين ومسائل

س١. أضع إشارة ✓ أمام العبارة الصائبة وإشارة ✗ أمام العبارة الخاطئة:

أ) $\int$(٥س + ٤) ءس = $\frac{\text{٥س}^{٢}}{٢}$ + ٤س

ب) $\int$(٦س^{٥} + ٣س^{٢}) ءس = س^{٦} + س^{٣} + جـ

جـ) $\int$(٢س^{٣} + ٣س) ءس = ٦س + ٣

د) $\int \frac{-٥}{\text{س}^{٢}}$ ءس = $\frac{٥}{\text{س}}$ + جـ

هـ) $\int$٢نقءس = نق^{٢} + جـ

و) $\int$٢نقءنق = نق^{٢} + جـ

س٢. إذا كان ق(س) = $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س} + ١}$ ءس، أجد ق$^{/}$(س).

قواعد التكامل غير المحدود (Rules of Indefinite Integral)

إذا كان الاقتران الأصلي للمشتقة $ق'(س) = ٣س^{٢}$ هو $س^{٣} + جـ$، فكيف يمكن إيجاد الاقتران الأصلي للمشتقة $ق'(س) = ٤س^{٣} + ٣س^{٢} - ٣$ ؟ هل يوجد قواعد لإيجاد الاقتران الأصلي؟

الاقتران الأصلي لِـ $٤س^{٣}$ هو $س^{٤} + جـ$

الاقتران الأصلي لِـ $٣س^{٢}$ هو $س^{٣} + جـ$

الاقتران الأصلي لِـ -٣ هو ....

الاقتران الأصلي لِـ $٤س^{٣} + ٣س^{٢} - ٣$ هو ......

مثال (١): أجد $\int ٣ \, دس$ ؟

الحل: المطلوب هو إيجاد الاقتران الأصلي ق(س) الذي مشتقته الأولى $ق'(س) = ٣$.

من معلوماتنا في التفاضل، ألاحظ أن الاقترانات:

$ق_{١}(س) = ٣س$ ، $ق_{٢}(س) = ٣س + ٥$،

$ق_{٣}(س) = ٣س - \sqrt{٢}$ ، $ق_{٤}(س) = ٣س + ثابت$

هي اقترانات مشتقتها الأولى $ق'(س) = ٣$، ألاحظ أن الفرق بين هذه الاقترانات هو في الحد الثابت فقط، ولذلك فإن الاقتران الأصلي ق(س) الذي مشتقته $ق'(س) = ٣$ هو $ق(س) = ٣س + جـ$.

أي أن $\int ٣ \, دس = ٣س + جـ$

قاعدة (١): $\int أ \, دس = أ\,س + جـ$ ، أ ، جـ عددين حقيقيين.

مثال (٢): أجد التكاملات الآتية:

١) $\int -٥ \, دس$ ٢) $\int \sqrt{٣} \, دص$ ٣) $\int \frac{١}{٢} \, دع$.

الحل: ١) $\int -٥ \, دس = -٥س + جـ$، الاقتران بدلالة المتغير س.

٢) $\int \sqrt{٣} \, دص = \sqrt{٣}\, ص + جـ$، الاقتران بدلالة المتغير ص.

٣) $\int \frac{١}{٢} \, دع = \frac{١}{٢}\, ع + جـ$، الاقتران بدلالة المتغير ع.

مثال (٣): أتأمل الجدول الآتي، وأجيب عن الأسئلة اللاحقة:

ق(س)	$\frac{س^٣}{٣}$	$\frac{س^٤}{٤} + ٧$	$\frac{س^٥}{٥}$	$\frac{س^٦}{٦} + ٢$
ق/(س)	$س^٢$	$س^٣$	$س^٤$	$س^٥$

١. ما العلاقة بين درجة ق/(س) و درجة ق(س)؟

٢. ما العلاقة بين معامل الحد الذي يحتوي على س في ق(س) ودرجة ق(س) ؟

الحل: ١. درجة الاقتران ق(س) تزيد ١ عن درجة ق/(س).

معامل الحد الذي يحتوي على س يساوي مقلوب درجة الاقتران.

قاعدة (٢): $\int س^{ن} \, دس = \frac{س^{ن+١}}{ن + ١} + جـ$، جـ عدد حقيقي، ن $\neq$ -١.

مثال (٤): أجد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int س^٢ \, دس$ ب) $\int س^{-٣} \, دس$ ج) $\int س^{\frac{١}{٢}} \, دس$ د) $\int \sqrt{س^٣} \, دس$

الحل: أ) $\int س^٢ \, دس = \frac{س^{٢+١}}{٢ + ١} + جـ = \frac{س^٣}{٣} + جـ$

ب) $\int \text{س}^{-٣} \, \text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{-٣+١}}{-٣+١} + \text{جـ} = \dfrac{\text{س}^{-٢}}{-٢} + \text{جـ}$

ج) $\int \text{س}^{\frac{١}{٢}} \, \text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + \text{جـ} = \dfrac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \dfrac{٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \text{جـ}$

د) $\int \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} \, \text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{٢}{٣}} \, \text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{\frac{٢}{٣}+١}}{\frac{٢}{٣}+١} + \text{جـ} = \dfrac{\text{س}^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}} + \text{جـ} = \dfrac{٣\text{س}^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + \text{جـ} = \dfrac{٣}{٥}\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}} + \text{جـ}$

قاعدة (٣): إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل، فإن $\int \text{أ ق(س)} \, \text{ءس} = \text{أ} \int \text{ق(س)} \, \text{ءس}$ ، أ $\in$ ح

مثال (٥): أجد التكاملات الآتية:

أ) $\int ٢\text{س}^{٣} \, \text{ءس}$

ب) $\int \frac{٣}{٥} \text{س}^{٤} \, \text{ءس}$

ج) $\int \sqrt{٢}\, \text{ل}^{٧} \, \text{ءل}$

الحل: أ) $\int ٢\text{س}^{٣} \, \text{ءس} = ٢\int \text{س}^{٣} \, \text{ءس} = \dfrac{٢\text{س}^{٤}}{٤} + \text{جـ} = \dfrac{\text{س}^{٤}}{٢} + \text{جـ}$

ب) $\int \frac{٣}{٥} \text{س}^{٤} \, \text{ءس} = \frac{٣}{٥} \int \text{س}^{٤} \, \text{ءس} = \dfrac{٣}{٥} \times \dfrac{\text{س}^{٥}}{٥} + \text{جـ} = \dfrac{٣\text{س}^{٥}}{٢٥} + \text{جـ}$

ج) $\int \sqrt{٢}\, \text{ل}^{٧} \, \text{ءل} = \sqrt{٢} \int \text{ل}^{٧} \, \text{ءل} = \sqrt{٢}\, \dfrac{\text{ل}^{٨}}{٨} + \text{جـ}$

قاعدة (٤): إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل، فإن:

١. $\int (\text{ق+هـ})(\text{س}) \, \text{ءس} = \int \text{ق(س)} \, \text{ءس} + \int \text{هـ(س)} \, \text{ءس}$

٢. $\int (\text{ق−هـ})(\text{س}) \, \text{ءس} = \int \text{ق(س)} \, \text{ءس} - \int \text{هـ(س)} \, \text{ءس}$

مثال (٦): أجد $\int (٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س}) \, \text{ءس}$

الحل: $\int (٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س}) \, \text{ءس} = ٣\int \text{س}^{٢} \, \text{ءس} + ٤\int \text{س} \, \text{ءس}$

$= \text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + \text{جـ}$ لماذا ؟

مثال (٧): أجد $\int (\frac{١}{٢}\text{س}^{٣} - \frac{٥}{\text{س}^{٢}})\,\text{ءس}$

الحل: $\int (\frac{١}{٢}\text{س}^{٣} - \frac{٥}{\text{س}^{٢}})\,\text{ءس} = \int \frac{١}{٢}\text{س}^{٣}\,\text{ءس} - \int \frac{٥}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int \text{س}^{٣}\,\text{ءس} - ٥\int \text{س}^{-٢}\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{٤}}{٨} + ٥\text{س}^{-١} + \text{جـ}$ لماذا؟

يمكن تعميم القاعدة (٤) لأكثر من اقترانين.

مثال (٨): أجد $\int (\text{س} + ٣)^{٢}\,\text{ءس}$

الحل: $(\text{س} + ٣)^{٢} = (\text{س} + ٣)(\text{س} + ٣) = \text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩$

$\int (\text{س} + ٣)^{٢}\,\text{ءس} = \int (\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩)\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \int ٦\text{س}\,\text{ءس} + \int ٩\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٦\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٩\text{س} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٣\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + \text{جـ}$

مثال (٩): أجد $\int \frac{\text{ع}^{٢} - ٩}{\text{ع} + ٣}\,\text{ءع}$ ، $\text{ع} \neq -٣$

الحل: $\int \frac{\text{ع}^{٢} - ٩}{\text{ع} + ٣}\,\text{ءع} = \int \frac{(\text{ع} + ٣)(\text{ع} - ٣)}{(\text{ع} + ٣)}\,\text{ءع} = \int (\text{ع} - ٣)\,\text{ءع} = \frac{\text{ع}^{٢}}{٢} - ٣\text{ع} + \text{جـ}$

مثال (١٠): إذا كان $\text{ص} = \int (٥\text{س}^{٢} + ٣\text{س})\,\text{ءس}$ = أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ؟

الحل: $\text{ص} = \int (٥\text{س}^{٢} + ٣\text{س})\,\text{ءس} = \frac{٥\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{٣} + \text{جـ}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٥ \times ٣\text{س}^{٢}}{٣} + \frac{٣ \times ٢\text{س}}{٢} + \text{صفر}$

$= ٥\text{س}^{٢} + ٣\text{س}$ ماذا تلاحظ؟

هل يمكن الحل بطريقة أخرى؟ وضّح ذلك.

٤ - ٢ تمارين ومسائل

س١: أجد التكاملات الآتية:

أ. $\int \frac{٢}{٣} \, \text{ءس}$ ب. $\int \pi \, \text{ءع}$ ج. $\int -\sqrt{٥}\, \text{س} \, \text{ءس}$

د. $\int (٢\text{س}^{٢} + ٣) \, \text{ءس}$ هـ. $\int (٧\text{س}^{٣} - \frac{٢}{\text{س}^{٢}} + ١) \, \text{ءس}$ و. $\int \text{ك}^{٢} \, \text{ءس}$ ، ك ثابت $\neq$ ٠

س٢: أجد $\int (٢\text{ص} - ٥)(\text{ص} + ٣) \, \text{ءص}$

س٣: أجد $\int \frac{\text{ل}^{٢} - ٥\text{ل} + ٦}{\text{ل} - ٢} \, \text{ءل}$ ، ل $\neq$ ٢

س٤: أجد $\int (٢\text{س} + ١)(\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٤) \, \text{ءس}$

س٥: إذا كان ق(س) = $\int (٣\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤) \, \text{ءس}$، أجد ق/(س).

س٦: إذا كان ص = $\int (٢\text{س} + ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س})^{٥} \, \text{ءس}$، أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

التكامل المحدود

(Definite Integral)

تعريف: إذا كانت ق/(س) هي المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، وكان ق/(س) قابلاً للتكامل، فإن

$\int_{أ}^{ب}$ ق/(س)ءس = ق(ب) − ق(أ)، أ ، ب عددان حقيقيان. وهذا التكامل يسمى تكاملاً محدوداً، حدّه العلوي = ب،

وحدّه السفلي= أ، وقيمته تساوي عدداً ثابتاً.

مثال (١): أحسب قيمة التكامل $\int_{١}^{٢}$ (س − ٣) ءس ؟

الحل: ق(س) = $\int$ (س − ٣) ءس

$= \frac{س^٢}{٢} - ٣س + جـ$

$\int_{١}^{٢}$ (س − ٣) ءس = ق(٢) − ق(١)

$= (٢ - ٦ + جـ) - (\frac{١}{٢} - ٣ + جـ)$

$= \frac{-٣}{٢} + جـ - جـ = \frac{-٣}{٢}$

يمكن حل المثال بطريقة أخرى

$\int_{١}^{٢}$ (س − ٣) ءس = $(\frac{س^٢}{٢} - ٣س)\Big|_{١}^{٢}$

أعوض الحد العلوي، ثم أطرح منه ناتج تعويض الحد السفلي. = (٢ − ٦) − $(\frac{١}{٢} - ٣) = \frac{-٣}{٢}$

مثال (٢): أجد $\int_{-١}^{٢}$ (٣س^٢ − ٢س + ١)ءس

الحل: $\int_{-١}^{٢}$ (٣س^٢ − ٢س + ١)ءس = (س^٣ − س^٢ + س)$\Big|_{-١}^{٢}$

= (٨ − ٤ + ٢) − (-١-١-١) = ٩

مثال (٣): إذا كان ق$^{/}$(س)= ٢س^{٣} + ٥س أحسب متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٣.

الحل: متوسط التغير $= \dfrac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣ - ١}$

لكن $\text{ق}(٣) - \text{ق}(١) = \int_{١}^{٣} (٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س})\ \text{ءس}$

$$= \left. \frac{\text{س}^{٤}}{٢} + \frac{٥\text{س}^{٢}}{٢} \right|_{١}^{٣}$$

$$= \left(\frac{٨١}{٢} + \frac{٤٥}{٢}\right) - \left(\frac{١}{٢} + \frac{٥}{٢}\right) = ٦٣ - ٣ \ = ٦٠$$

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣ - ١} = \frac{٦٠}{٢} = ٣٠$$

مثال (٤): إذا كان $\int_{٢}^{٤} (\text{ب}\text{س} - ٧)\ \text{ءس} = ٣٤$، أجد قيمة الثابت ب.

الحل: $\int_{٢}^{٤} (\text{ب}\text{س} - ٧)\ \text{ءس} = \left. \left(\frac{\text{ب}\text{س}^{٢}}{٢} - ٧\text{س}\right) \right|_{٢}^{٤} = ٣٤$

$$= (٨\text{ب} - ٢٨) - (٢\text{ب} - ١٤) = ٣٤$$

$$٦\text{ب} - ١٤ = ٣٤$$

$$٦\text{ب} = ٤٨$$

$$\text{ب} = ٨$$

مثال (٥): إذا كان $\int_{٥}^{\text{ب}} ٦\text{س}\ \text{ءس} = -٦٣$، أجد قيمة/قيم الثابت ب.

الحل: $\int_{٥}^{\text{ب}} ٦\text{س}\ \text{ءس} = \left. ٣\text{س}^{٢} \right|_{٥}^{\text{ب}} = -٦٣$

$$٣\text{ب}^{٢} - ٧٥ = -٦٣$$

$\text{ب}^{٢} = ٤$ لماذا؟

$$\text{ب} = \pm ٢$$

٤ - ٤ تمارين ومسائل

س١: أحسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{\text{-١}}^{\text{٢}} \text{٦}\,\pi \; \text{ءس}$

ب) $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{٥} - \text{٣س}^{\text{٢}}) \; \text{ءس}$

جـ) $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \left(\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}} - \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٣}}}\right) \text{ءس}$

د) $\int_{\text{١}}^{\text{٨}} \sqrt[\text{٣}]{\text{س}} \; \text{ءس}$

س٢: إذا كان $\int_{\text{٣}}^{\text{٥}} \text{ب}^{\text{٢}} \, \text{ءس} = \text{٣٢}$ فما قيمة/ قيم الثابت ب ؟

س٣: إذا كان $\int_{\text{-٢}}^{\text{م}} (\text{٣} - \text{٢س}) \; \text{ءس}$ = صفراً، فما قيمة/ قيم الثابت م ؟

س٤: أحسب $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{٢س} - \text{١})^{\text{٢}} \, \text{ءس}$.

س٥: أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتي:

أ) ص = $\int (\text{٤س}^{\text{٣}} + \text{٢س} - \text{٥}) \; \text{ءس}$

ب) ص = $\int_{\text{٢}}^{\text{٧}} (\text{٤س}^{\text{٣}} + \text{٢س} - \text{٥}) \; \text{ءس}$

خصائص التكامل المحدود
(Definite Integral Properties)

خاصية (١): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل فإن $\int_{أ}^{أ}$ ق(س) ءس = ٠ لكل أ ∋ ح

فمثلاً: أ. $\int_{١}^{١}$ (٢س^{٢} + ٣س + ٢) ءس = ٠ حسب الخاصية (١)

ب. $\int_{٢}^{٢}$ ($\sqrt{س}$ + ٥) ءس = ٠ حسب الخاصية (١)

نشاط ١ أكمل الجدول الآتي:

التكامل	قيمته	التكامل	قيمته
$\int_{١}^{٢}$ (س + ١) ءس	$\frac{٥}{٢}$	$\int_{٢}^{١}$ (س + ١) ءس	$\frac{-٥}{٢}$
$\int_{٣}^{٥}$ ٧ ءس	١٤	$\int_{٥}^{٣}$ ٧ ءس	
$\int_{٠}^{١}$ س^{٥} ءس		$\int_{١}^{٠}$ س^{٥} ءس	$-\frac{١}{٦}$

من الجدول ماذا نلاحظ ؟

خاصية (٢): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، فإن: $\int_{أ}^{ب}$ ق(س)ءس = - $\int_{ب}^{أ}$ ق(س)ءس

مثال (١): إذا علمت أن $\int_{١}^{٢} \text{ق(س) ءس} = ٨$ ، أحسب $\int_{٢}^{١} \text{ق(س) ءس}$ ؟

الحل: $\int_{٢}^{١} \text{ق(س) ءس} = - \int_{١}^{٢} \text{ق(س) ءس} = -٨$ حسب الخاصية (٢)

مثال (٢): إذا كان $\int_{٢}^{٣} \text{ق(س) ءس} = -٣$ ، أجد $\int_{٣}^{٢} \text{-٢ق(س) ءس}$ ؟

الحل: $\int_{٣}^{٢} \text{-٢ق(س) ءس} = -٢ \int_{٣}^{٢} \text{ق(س) ءس}$

$= ٢ \int_{٢}^{٣} \text{ق(س) ءس}$ لماذا؟

$= ٢ \, (-٣) = -٦$

نشاط ٢ أكمل الجدول الآتي:

التكامل	(١) قيمته	التكامل	(٢) قيمته	التكامل	(٣) قيمته	أكتب علاقة بين (١)،(٢)،(٣)
$\int_{١}^{٢} \text{٥ ءس}$	٥	$\int_{٢}^{٥} \text{٥ ءس}$	١٥	$\int_{١}^{٥} \text{٥ ءس}$	٢٠	٥+١٥= ٢٠
$\int_{٠}^{٢} \text{س}^٢ \text{ءس}$	$\frac{٨}{٣}$	$\int_{٢}^{٤} \text{س}^٢ \text{ءس}$		$\int_{٠}^{٤} \text{س}^٢ \text{ءس}$	$\frac{٦٤}{٣}$	
$\int_{١}^{٢} \text{(س – ٣) ءس}$		$\int_{٢}^{٣} \text{(س – ٣) ءس}$	$-\frac{١}{٢}$	$\int_{١}^{٣} \text{(س – ٣) ءس}$		

من الجدول أعلاه، ماذا نلاحظ؟

خاصية (٣): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، على [أ ، جـ] ، ب ∈ [أ ، جـ] فإن:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\, ءس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\, ءس$$ (خاصية الإضافة).

مثال (٣): إذا علمت أن $\int_{١}^{٢} ق(س)\, ءس = ٣$ ، $\int_{٢}^{٤} ق(س)\, ءس = -٩$ أجد $\int_{١}^{٤} ق(س)\, ءس$ ؟

الحل: $\int_{١}^{٤} ق(س)\, ءس = \int_{١}^{٢} ق(س)\, ءس + \int_{٢}^{٤} ق(س)\, ءس$ حسب الخاصية (٣)

$= (٣) + (-٩) = ٣ - ٩ = -٦$

مثال (٤): إذا علمت أن $\int_{١}^{٣} ق(س)\, ءس = ٢$ ، $\int_{٤}^{٣} ٥ق(س)\, ءس = ١٥$ أجد $\int_{١}^{٤} -٢ق(س)\, ءس$ ؟

الحل: $\int_{١}^{٤} -٢ق(س)\, ءس = -٢ \int_{١}^{٤} ق(س)\, ءس$

لكن $\int_{١}^{٤} ق(س)\, ءس = \int_{١}^{٣} ق(س)\, ءس + \int_{٣}^{٤} ق(س)\, ءس$

$\int_{٣}^{٤} ق(س)\, ءس = - \int_{٤}^{٣} ق(س)\, ءس = -٣$ لماذا؟

$\int_{١}^{٤} ق(س)\, ءس = ٢ + (-٣) = -١$ لماذا؟

$\int_{١}^{٤} -٢ق(س)\, ءس = -٢ (-١) = ٢$

خاصية (٤): إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل، على [أ ، ب] ، فإن:

$$\int_{أ}^{ب} (ق(س) \pm هـ(س))\, ءس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, ءس$$

مثال (٥): إذا كان $\int_{-1}^{2} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = -5$ ، أجد $\int_{-1}^{2} (3\text{ق(س)} + \text{س} + 2)\ \text{ءس}$ ؟

الحل: $\int_{-1}^{2} (3\text{ق(س)} + \text{س} + 2)\ \text{ءس} = \int_{-1}^{2} 3\text{ق(س)}\ \text{ءس} + \int_{-1}^{2} (\text{س} + 2)\ \text{ءس}$

$$= 3\int_{-1}^{2} \text{ق(س)}\ \text{ءس} + \left(\frac{\text{س}^2}{2} + 2\text{س}\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= 3(-5) + \left[\left(\frac{4}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} + 2(-1)\right)\right]$$

$$= -15 + \left(6 + \frac{3}{2}\right) = \frac{-15}{2}$$

تمارين ومسائل

س١: أحسب $\int_{2}^{2} (\text{س}^2 - 6\text{س})\ \text{ءس}$

س٢: أحسب التكاملات الآتية: أ) $\int_{2}^{3} (\text{س} - 6)\ \text{ءس}$ ب) $\int_{2}^{5} (\text{س} - 6)\ \text{ءس}$ جـ) $\int_{3}^{5} (\text{س} - 6)\ \text{ءس}$

س٣: إذا كان $\int_{-1}^{2} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = -3$ ، $\int_{0}^{2} 2\text{ق(س)}\ \text{ءس} = 4$، أجد قيمة الآتي:

أ) $\int_{0}^{2} -3\text{ق(س)}\ \text{ءس}$ ب) $\int_{-1}^{0} \text{ق(س)}\ \text{ءس}$ جـ) $\int_{-1}^{2} (3\text{ق(س)} + \text{س})\ \text{ءس}$

س٤: إذا كان $\int_{2}^{3} 3\text{ق(س)}\ \text{ءس} = 12$ ، $\int_{2}^{3} -2\text{هـ(س)}\ \text{ءس} = 6$ ، أجد قيمة:

$$\int_{2}^{3} (5\text{هـ(س)} - 3\text{ق(س)})\ \text{ءس}$$

س٥: إذا كان $\int_{1}^{\text{م}} (2\text{س} + 5)\ \text{ءس} = 0$ ، أجد قيمة/قيم الثابت م.

التكامل بالتعويض
(Integration by Substitution)

بعض الاقترانات لا يمكن تكاملها باستخدام القواعد التي درستها، وهذه الاقترانات يمكن تكاملها بطرق متعددة ومتنوعة، وسنتعرف في دراستنا لهذه الوحدة إلى طريقة التكامل بالتعويض على أنواع معينة من الاقترانات.

نشاط ١

أجد $\int (س - ٣)^{٢} \, ءس$

$\int (س - ٣)^{٢} \, ءس = \int (\qquad) \, ءس$ لماذا ؟

$= \frac{س^{٣}}{٣} - ٣س^{٢} + ٩س + جـ$

وبالطريقة نفسها أجد $\int (٤س - ٩)^{٣} \, ءس$

لكن هل يمكن أن أجد $\int (٤س - ٩)^{١٠} \, ءس$ بسهولة بالطريقة نفسها ؟

يمكن إيجاد $\int (س - ٣)^{٢} \, ءس$ بطريقة أخرى، تسمى طريقة التكامل بالتعويض

الحل: أفرض أن $ص = (س - ٣)$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ١$ ، $ءس = ءص$ بالتعويض في التكامل

$\int (س - ٣)^{٢} \, ءس = \int ص^{٢} \, ءص = \frac{ص^{٣}}{٣} + جـ$

$= \frac{(س - ٣)^{٣}}{٣} + جـ$

مثال (١): أجد $\int (\text{٣س} + ١)^{٩}\, \text{ءس}$

الحـل: أفرض أن ص = ٣س + ١ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٣}$

أعوض في التكامل

$$\int (\text{٣س} + ١)^{٩}\, \text{ءس} = \int \text{ص}^{٩}\, \frac{\text{ءص}}{٣} = \frac{١}{٣} \int \text{ص}^{٩}\, \text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{\text{ص}^{١٠}}{١٠} + \text{جـ} = \frac{\text{ص}^{١٠}}{٣٠} + \text{جـ}$$

$$= \frac{(\text{٣س} + ١)^{١٠}}{٣٠} + \text{جـ}$$

مثال (٢): أجـد $\int_{٠}^{١} \text{س}(\text{٣س}^{٢} - ١)^{٣}\, \text{ءس}$

الحل: نفرض أن ص = $(\text{٣س}^{٢} - ١)$، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٦س}$ ومنها $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٦س}}$

أعوض في التكامل

$$\int \text{س}(\text{٣س}^{٢} - ١)^{٣}\, \text{ءس} = \int \text{س}\,\text{ص}^{٣}\, \frac{\text{ءص}}{\text{٦س}} = \frac{١}{٦} \int \text{ص}^{٣}\, \text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٦} \times \frac{\text{ص}^{٤}}{٤} + \text{جـ} = \frac{(\text{٣س}^{٢} - ١)^{٤}}{٢٤} + \text{جـ}$$

$$\int_{٠}^{١} \text{س}(\text{٣س}^{٢} - ١)^{٣}\, \text{ءس} = \left. \frac{(\text{٣س}^{٢} - ١)^{٤}}{٢٤} \right|_{٠}^{١}$$

$$= \frac{(٣\times١ - ١)^{٤}}{٢٤} - \frac{(٣\times٠ - ١)^{٤}}{٢٤} = \frac{١٥}{٢٤}$$

مثال (٣): أجـد $\int (٢س + ١)(س^{٢} + س - ٥)^{٣} ءس$

الحل: أفرض أن ص $= (س^{٢} + س - ٥)$ ، $\frac{ءص}{ءس} = (٢س + ١)$

أعوض في التكامل

$$\int (٢س + ١)(س^{٢} + س - ٥)^{٣} ءس = \int (٢س + ١)(ص)^{٣} \frac{ءص}{(٢س+١)}$$

$$= \int ص^{٣} ءص = \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ = \frac{(س^{٢} + س - ٥)^{٤}}{٤} + جـ$$

٤ - ٦ تمارين ومسائل

أجـد التكاملات الآتية:

س١: $\int (٢ - ٣س)^{٣} ءس$

س٢: $\int \frac{٣}{(س - ١)^{٥}} ءس$

س٣: $\int (أس + ب)^{٤} ءس$ ، أ ، ب ثوابت

س٤: $\int س^{٢}(س^{٣} + ١)^{٤} ءس$

س٥: $\int_{١}^{٢} (٢س - ٣)^{٢} ءس$

س٦: $\int_{٠}^{١} (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢} ءس$

س٧: $\int \sqrt{٣س - ١}\, ءس$

س٨: $\int (س + ٢) \sqrt[٣]{س^{٢} + ٤س}\, ءس$

تطبيقات على التكامل المحدود
(إيجاد المساحات)

(Definite Integral Applications) (Areas)

في هذا الدرس سنستخدم التكامل المحدود لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات في فترة معينة، علماً بأن ق(س) ممثل بيانياً ويقع منحناه فوق محور السينات.

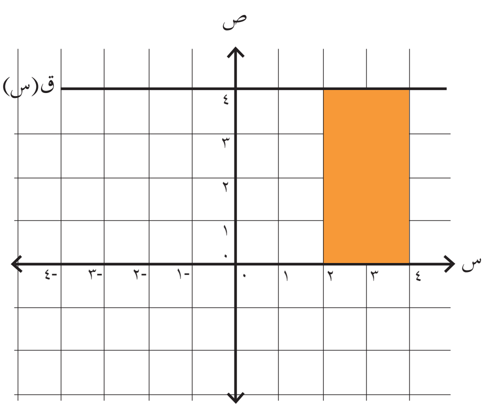
نظرية: إذا كان ق(س) اقتراناً موجباً (فوق محور السينات)، فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب تساوي $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس

مثال (١): أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٤ ومحور السينات والمستقيمين س = ٢، س = ٤ كما في الشكل المجاور.

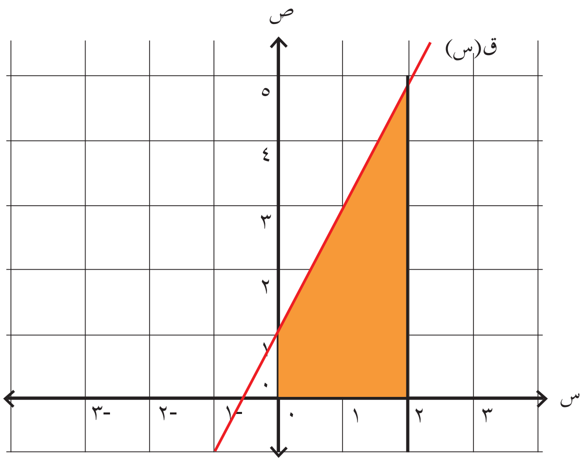
الحل: $\int_{٢}^{٤} ٤ \, \text{ءس} = ٤\text{س} \Big|_{٢}^{٤} = ٤×٤ - ٤×٢ = ٨$ وحدات مربعة.

ألاحظ أن المنطقة المحصورة هي مستطيلة الشكل.

مساحة المستطيل = الطول × العرض = ٤ × ٢ = ٨ وحدات مربعة.



مثال (٢): أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢س + ١ ومحور السينات، والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢، ألاحظ الشكل المرسوم.

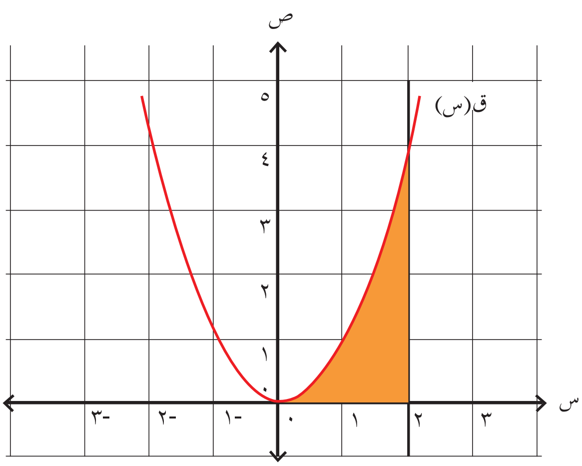


الحل: المساحة (م) المظللة في الشكل تساوي

$$م = \int_{٠}^{٢} (٢س + ١)\, ءس = (س^{٢} + س) \Big|_{٠}^{٢}$$

$$= (٤+٢) - (٠) = ٦ \text{ وحدات مربعة}$$

هل يمكن حساب المساحة بطريقة أخرى؟



مثال (٣): أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $س^{٢}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢ ، ألاحظ الشكل المرسوم.

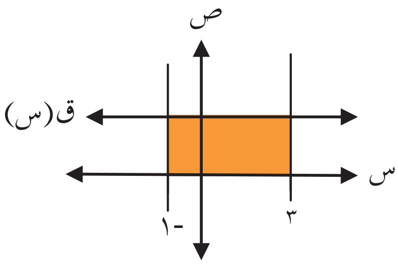
الحل: المساحة (م) المظللة في الشكل تساوي

$$م = \int_{٠}^{٢} س^{٢}\, ءس = \frac{س^{٣}}{٣} \Big|_{٠}^{٢}$$

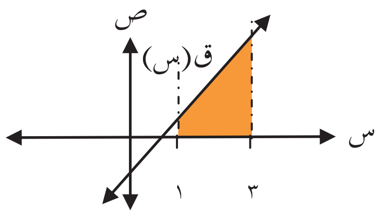
$$= \frac{٨}{٣} - \frac{٠}{٣} = \frac{٨}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

هل يمكن حساب المساحة بطريقة أخرى؟

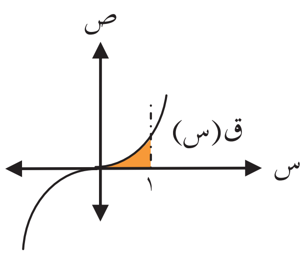
٤ - ٧ تمارين ومسائل



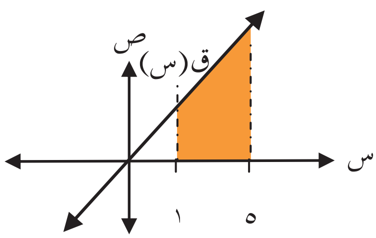
س١: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٣، ومحور السينات والمستقيمين س = -١ ، س = ٣



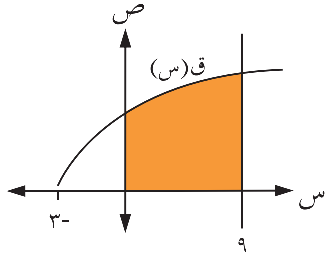
س٢: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٣س − ٢ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣



س٣: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $س^{٣}$ ، ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ١



س٤: إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = أس ومحور السينات والمستقيمين س = ١، س = ٥ تساوي ٨ فما قيمة الثابت أ ، أ > صفر.



س٥: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ك(س) = $\sqrt{٣س + ٩}$ ومحور السينات والمستقيمين س = صفر ، س = ٩.

الفـائــــدة

(Interest)

نشاط ١

يستثمر بعض الناس نقودهم عن طريق إيداعها في البنوك، حيث يقوم البنك باستثمارها في مشاريع تحقق لهم نسبة معينة من الأرباح، ويعطي فوائد للذين يدّخرون لديه بنسبة معينة، تسمى نسبة فائدة. وعندما يقترض أصحاب الأعمال من البنك، فإنه يأخذ منهم نسبة فائدة أيضاً مقابل ذلك.

فمثلاً، إذا أودع شخص مبلغ ٢٠٠ دينار في أحد البنوك، وكان هذا البنك يعطي فائدةً سنويةً نسبتها ٨٪ ، فما المبلغ الذي يقبضه الشخص من البنك أرباحاً عن المبلغ المودع؟ يقبض الشخص ٨ دنانير عن كل مائة دينار، لذا فإنه يقبض في نهاية العام ....

يسمى المبلغ ١٦ ديناراً الذي يقبضه في نهاية السنة الفائدة.

نشاط ٢

أم العبد امرأة فلسطينية زوجها أسير في سجون الاحتلال، لديها بنت وولد وتفكر كيف تؤمن لهما أقساط الدراسة الجامعية بعد ٦ سنوات، حيث إنها تمتلك مبلغ ٤٠٠٠ دينار ورثته عن أبيها، قررت فتح حساب بنكي لهما بمبلغ ٢٠٠٠ دينار، وأبلغها الموظف في البنك أنها ستحصل على ٢٠٠ دينار زيادة سنوياً:

١- ما مقدار الزيادة التي تحصل عليها أم العبد بعد ٦ سنوات؟

الزيادة بعد السنة الأولى : ٢٠٠ دينار.

الزيادة تكون ٦٠٠ بعد السنة ....

الزيادة بعد السنة السادسة :..............

٢- تسمى هذه الزيادة:................، النسبة المئوية للزيادة : ١٠٪ . لماذا؟

٣- جملة المبلغ الذي ستحصل عليه بعد ٦ سنوات: ....

٤- العوامل المؤثرة في الفائدة: الزمن، ....، ....

تعريف الفائدة (Interest):

هو المبلغ الذي يدفع مقابل استخدام المال، أو هي عائد استثمار مبلغ ما بمعدل معين لزمن معين. ويعبر عنه عادة بنسبة مئوية تسمى "سعر الفائدة" أو "معدل الفائدة" وهي نوعان:

الفائدة البسيطة: وهي الفائدة التي تحسب على أصل المبلغ في نهاية كل فترة زمنية.

الفائدة المركبة: وهي الفائدة التي تحسب على أصل المبلغ بعد إضافة الفائدة إلى الأصل في نهاية كل فترة زمنية، أي أنه بعد نهاية كل فترة زمنية يكون لدينا أصل جديد، وهذا الأصل الجديد هو أصل المبلغ السابق مضافاً إليه الفائدة من الفترة السابقة.

العوامل المؤثرة في حساب الفائدة، هي:

١- أصل المبلغ، ويرمز له بالرمز (م): وهو عبارة عن مبلغ القرض، أو المبلغ المستثمر.

٢- معدل الفائدة ويرمز لها بالرمز (ع): هو العائد من وحدة رأس المال (دينار) لكل وحدة زمن (سنة)[1].

٣- الفترة الزمنية ويرمز لها بالرمز (ﻫ): وهي عبارة عن مدة القرض، أو مدة الاستثمار.

الفائدة البسيطة (Simple Interest):

تستخدم الفائدة البسيطة عند اقتراض الأموال، أو استثمارها لفترة زمنية قصيرة الأجل (عادة أقل من سنة)، وتحسب دائماً على أصل المبلغ عن كل وحدة زمنية، أي أنها لا تعتبر من فترة زمنية إلى أخرى عند ثبات أصل القرض، أو أصل المبلغ المستثمر.

تسمى هذه الفائدة بالفائدة البسيطة، وتحسب بالعلاقة:

ف = م × ع × ﻫ

جملة المبلغ بفائدة بسيطة = المبلغ الأصلي + الفائدة البسيطة.

جـ = م + ف

حيث: (**ف**) هي الفائدة ،(م) أصل المبلغ، و(ع) معدل الفائدة، و(ﻫ) الفترة الزمنية، أو المدة بالسنوات، وإذا كانت بالأشهر = عدد الأشهر ÷ ١٢

مثال (١): استثمر يامن مبلغ ١٠٠٠ دينار لمدة ٣ سنوات في أحد البنوك بمعدل فائدة سنوي قدره ٧٪ ، أجد مقدار الفائدة البسيطة، وجملة المبلغ.

الحل: المعطيات: م = ١٠٠٠ دينار ، ع = ٧٪ ، ﻫ = ٣ سنوات.

ف = م × ع × ﻫ = ١٠٠٠ × ٠,٠٧ × ٣ = ٢١٠ دنانير.

جملة المبلغ = المبلغ الأصلي + الفائدة البسيطة

جملة المبلغ = ١٠٠٠ + ٢١٠ = ١٢١٠ دنانير.

١ تم التعارف على كتابة معدل الفائدة في مقدار العائد لكل ١٠٠ وحدة من النقود / لكل وحدة زمن لذلك فإن معدل الفائدة يكتب كنسبة مئوية

مثال (٢): إذا كان العائد (الفائدة) من استثمار مبلغ تم استثماره لمدة ٤ سنوات هو ٤٨٠ ديناراً. أجد أصل المبلغ المستثمر، علماً بأن معدل الفائدة هو ٨٪ سنوياً.

الحل: المعطيات: ن = ٤ سنوات ، **ف** = ٤٨٠ ديناراً ، ع = ٨٪

ف = م × ع × ن

٤٨٠ = م × ٠,٠٨ × ٤

$$م = \frac{٤٨٠}{٠,٣٢} = ١٥٠٠ \text{ دينار}$$

نشاط ٣

أكمل الفراغ في الجدول الآتي:

	المبلغ	معدل الفائدة البسيطة	الزمن بالسنوات	الفائدة	الجملة
١	٤٠٠٠	١٢٪	٣		
٢		٦٪	٤	٣٦٠٠	
٣	٥٠٠٠	٧٪			٨٥٠٠
٤			٥		
المجموع	٣٠٠٠٠			٩٢٩٠	

أنواع الفائدة البسيطة:

إذا كانت مدة الإيداع بالأيام، نميز بين طريقتين لحساب الفائدة البسيطة:

١) الفائدة التجارية : (**ف**): حيث تعتبر عدد أيام السنة في الفائدة التجارية ٣٦٠ يوماً،

أي ن = المدة بالأيام ÷ ٣٦٠

٢) الفائدة الصحيحة ($\overline{\text{ف}}$): حيث تعتبر عدد أيام السنة في الفائدة الصحيحة [1] ٣٦٥ يوماً

أي ن = المدة بالأيام ÷ ٣٦٥

١ السنة الكبيسة عدد أيامها ٣٦٦ يوماً (سنقتصر في دراستنا على السنة العادية فقط).

مثال (٣): أجد قيمة كل من الفائدة التجارية والصحيحة المترتبة على مبلغ قدره ٢٠٠٠٠ دينار، استثمر بمعدل فائدة بسيطة ٦٪ سنوياً لمدة ٩٠ يوماً، علماً بأن السنة عادية. ماذا نستنتج ؟

الحل: الفائدة التجارية:

$$\text{ف} = \text{م} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

$$\text{ف} = ٢٠٠٠٠ \times ٠,٠٦ \times \frac{٩٠}{٣٦٠} = ٣٠٠ \text{ دينار.}$$

الفائدة الصحيحة:

$$\overline{\text{ف}} = \text{م} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

$$\overline{\text{ف}} = ٢٠٠٠٠ \times ٠,٠٦ \times \frac{٩٠}{٣٦٥} = ٢٩٥,٩ \text{ ديناراً.}$$

ألاحظ أن الفائدة الصحيحة اقل من الفائدة التجارية.

لذلك تستخدم البنوك الفائدة التجارية عند منح القروض، والفائدة الصحيحة عند فتح حسابات التوفير.

ملاحظة: يكتفى بالحل لأقرب ثلاث منازل عشرية.

٥ - ١ تمارين ومسائل

س١: أودعت عبير مبلغاً قدره ١٣٨٠٠ دينار في بنك لمدة ١٠ أشهر، بمعدل فائدة بسيطة ٤٪ سنوياً، أجد:

أ) مقدار الفائدة.

ب) الجملة البسيطة للمبلغ في نهاية المدة.

س٢: أجد مقدار المبلغ الذي يجب إيداعه في بنك لمدة ٨ سنوات، للحصول على جملة مقدارها ٥٦٠٠ دينار بمعدل فائدة بسيطة ٥٪.

س٣: أحسب عدد الأشهر اللازمة لاستثمار مبلغ قدره ٢٤٠٠٠ دينار، بمعدل فائدة بسيطة ٨٪ سنوياً ليعطي فائدة قدرها ٨٠٠ دينار.

س٤: اقترض تاجر من البنك مبلغ ١٢٠٠٠ دينار، بمعدل فائدة بسيطة مقدارها ١١٪ لمدة ٣ سنوات أحسب جملة المبلغ.

س٥: قامت فيروز باستثمار مبلغ ١٢٠٠٠ دينار، بمعدل فائدة بسيطة ٣٪ سنوياً من أصل المبلغ المستثمر. أجد:

أ) الفائدة التي تحصل عليها فيروز في ٣ أشهر.

ب) الفترة الزمنية اللازمة للحصول على عوائد قدرها ٢١٦٠ ديناراً.

س٦: أودع جورج مبلغ ٨٠٠٠ دينار لمدة ٢٤٠ يوماً، بمعدل فائدة بسيطة ١٢٪ سنوياً. أحسب الفائدة التجارية والصحيحة.

س٧: حصلت لبنى على فوائد من البنك قيمتها ٤٢٠ ديناراً مقابل استثمارها مبلغ ١٢٠٠٠ دينار في حساب الربح البسيط لمدة ٧ شهور. أجد معدل الفائدة البسيطة التي يمنحها البنك للبنى.

الفائـــدة المركبـــــة

(Compound Interest)

نشاط ١

تتنافس البنوك في جذب الإيداعات المالية للأفراد والشركات، وذلك للربح وزيادة رأس المال.

فاز فادي في إحدى المسابقات، وحصل على مبلغ ١٠٠٠٠ دينار، وذهب إلى أحد البنوك لاستثمار هذا المبلغ لمدة ٣ سنوات، فأخبره موظف البنك بأن لهذا المبلغ ربحين مختلفين في نهاية الثلاث سنوات، بفائدة واحدة ٦٪ تعجب فادي وتساءل عن الفرق في الربح:

١- ربح فادي بعد سنة ٦٠٠ دينار بحساب الربح البسيط.

٢- ربح فادي بعد ٣ سنوات .... بحساب الربح البسيط.

٣- ربح فادي بعد سنتين ١٢٠٠ دينار بحساب الربح البسيط، و ١٢٣٦ ديناراً بربح من نوع آخر. كم الفرق بين الربح في حسابين مختلفين.................

مفهوم الفائدة المركبة:

استعرضنا في الصف الحادي عشر مفهوم الفائدة المركبة وكيفية حسابها على الاستثمارات طويلة الآجال بشكل عام، وسوف نتعرف في هذا الدرس على تطبيقاتها الأخرى، وأنواعها.

مفهوم الفائدة المركبة: هي المردود المالي الناتج من استثمار مبلغ من المال خلال مدة زمنية محددة بمعدل فائدة معين، بحيث يضاف هذا المردود إلى المبلغ الأصلي في نهاية كل دورة زمنية، وتحسب جملة المبلغ بالفائدة المركبة حسب العلاقة:

$$\text{جـ} = \text{أ}\ (١+\text{ع})^{\text{ن}}$$

$$\textbf{ف} = \text{جـ} - \text{أ}$$

أ: المبلغ الأصلي ، ن: المدة الزمنية ، ع: المعدل ، **ف**: الفائدة المركبة ، جـ: جملة المبلغ.

مثال(١): أودع مبلغ ٣٠٠٠٠ دينار في بنك لمدة ٧ سنوات بمعدل فائدة مركبة ٦٪ سنوياً. أجد:

١) جملة المبلغ. ٢) مقدار الفائدة المركبة.

$\text{جـ} = \text{أ}\,(1+\text{ع})^{\text{ن}}$

$\text{جـ} = ٣٠٠٠\,(١ + ٠٫٠٦)^{٧} = ٣٠٠٠ \times ١٫٥٠٣ = ٤٥١٠٫٨٩$ دينار

ف = جـ - أ

ف = ٤٥١٠٫٨٩ - ٣٠٠٠ = ١٥١٠٫٨٩ دنانير.

مثال(٢): ما المبلغ الذي استثمره فادي لمدة ٦ سنوات، في بنك يعطي فائدة مركبة بمعدل ٩٪ سنوياً، فأعطى مبلغاً جملته ١٦٧٧١٠ دنانير.

$\text{جـ} = \text{أ}\,(1+\text{ع})^{\text{ن}}$

$١٦٧٧١٠ = \text{أ}\,(١٫٠٩)^{٦}$

$\text{أ} = \dfrac{١٦٧٧١٠}{(١٫٠٩)^{٦}} = ٩٩٩٩٩٫٩٩ \approx ١٠٠٠٠٠$ دينار

مثال(٣): يوفر نزار مبلغ ١٠٠٠ دينار في أحد البنوك، بفائدة مركبة ٦٪ سنوياً، إذا بلغت جملة المبلغ ٢٤٠٠ دينار. أجد الفترة الزمنية التي استثمر فيها المبلغ.

$\text{جـ} = \text{أ}\,(1+\text{ع})^{\text{ن}}$

$٢٤٠٠ = ١٠٠٠(١٫٠٦)^{\text{ن}}$ ومنها $٢٫٤ = (١٫٠٦)^{\text{ن}}$

وباستخدام الآلة الحاسبة العلمية نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$\text{لـو}\,٢٫٤ = \text{لـو}(١٫٠٦)^{\text{ن}}$ ومنها $\text{ن} = \dfrac{\text{لـو}\,٢٫٤}{\text{لـو}\,١٫٠٦} = ١٥٫٠٢$ سنة

إضافة الفائدة أكثر من مرة في العام:

عند إضافة الفائدة أكثر من مرة في العام، يكون قانون الجملة المستخدم في هذه الحالة، هو:

$\text{جـ} = \text{أ}\,(1+\dfrac{\text{ع}}{\text{ر}})^{\text{ن ر}}$، حيث ر: عدد مرات إضافة الفائدة

مثال (٤): أحسب رأس المال الناتج من توظيف مبلغ ٣٠٠٠ دينار في بنك يعطي فائدة مركبة معدلها ٨٪ سنوياً لمدة ٩ سنوات، وتضاف الفائدة مرتين في العام، ثم أحسب الفائدة المركبة.

الحل: $\text{جـ} = \text{أ}\,(1+\dfrac{\text{ع}}{\text{ر}})^{\text{ن ر}}$

$\text{جـ} = ٣٠٠٠\,(١ + \dfrac{٠٫٠٨}{٢})^{٩\times٢} = ٣٠٠٠\,(١٫٠٤)^{١٨} = ٦٠٧٧٫٤٥$ ديناراً.

الفائدة المركبة = جـ - أ = ٦٠٧٧٫٤٥ - ٣٠٠٠ = ٣٠٧٧٫٤٥ ديناراً.

نشاط ٢

أكمل الفراغ في الجدول الآتي:

	المبلغ	المعدل	المدة بالسنوات	الجملة	الفائدة
أ	٢٠٠٠٠	٤٪ سنوياً		٢٩٦٠٤,٨٨	
ب		٧٪ كل ٦ شهور	٦,٥ سنة	٣٦١٤٧,٦٨	٢١١٤٧,٦٨
ج	٨٠٠٠	١١,٥٪سنوياً		١٩١١١,٢٤	
د	١٠٠٠٠	٣,٧٪ كل ٣ شهور			١٠٦٨١,١٧

٥ - ٢ تمارين ومسائل

س١: أودعت جمعية الأمل للمكفوفين ٨٠٠٠ دينار في بنك، بحساب فائدة مركبة معدلها السنوي ٩٪ أجد جملة المبلغ بعد ٦ سنوات.

س٢: أودعت سعاد مبلغ ٥٠٠٠ دينار في البنك، بحساب فائدة مركبة معدلها ٧,٥٪ سنوياً. أجد عدد السنوات التي تلزم حتى تصبح جملة المبلغ ٧١٧٨,١٤٦٦ ديناراً .

س٣: أودع غسان ٤٠٠٠٠ دينار في بنك بفائدة مركبة بمعدل ما وفي نهاية ٨ سنوات بلغت الفوائد المستحقة له ١٥٦٥٧,٨٥ ديناراً. أجد معدل الفائدة المركبة السنوي.

س٤: أحسب رأس المال الناتج من توظيف مبلغ ١٥٠٠٠ دينار في بنك، يعطي فائدة مركبة معدلها ٧٪ سنوياً لمدة ٥ سنوات، وتضاف الفائدة مرتين في العام، ثم أحسب الفائدة المركبة.

س٥: اقترض ماجد مبلغ ٨٠٠٠ دينار من البنك بمعدل فائدة مركبة ٨٪ سنوياً، وبعد مدة زمنية كان المبلغ المطلوب منه ١٤٨٠٧,٤٤ دنانير، أجد مدة الاستثمار لهذا المبلغ.

س٦: أودع رامي مبلغ ٥٠٠٠ دينار في بنك بمعدل فائدة مركبة ١٢ ٪ سنوياً ولمدة ٣ سنوات، فإذا علمت أن الفوائد تضاف كل ٣ شهور. أجد جملة الوديعة.

ورقة عمل

س١: إذا علمت أن ق$^{/}$(س) = ٤س^{٣} + س^{٢} − ٢س، ق(٠) = ٣ أجد ق(١).

س٢: إذا كان $\int_{١}^{٣} \text{ق(س) ءس} = ٧$ ، $\int_{١}^{٣} \text{هـ(س) ءس} = -٤$ ، ما قيمة $\int_{٣}^{١} \text{(٢ق(س) − ٥هـ(س) + ٢) ءس}$ ؟

س٣: أودعت فداء مبلغ ٥٠٠٠ دينار في البنك بمعدل فائدة مركبة ١٢٪ سنوياً، أحسب مبلغ الفائدة المستحقة لها بعد ٤ سنوات، إذا كانت الفوائد تضاف كل شهر؟

س٤: أجد المبلغ الذي تصبح جملته ٧١٧٦,٨٨ ديناراً في نهاية ٣ سنوات، بمعدل فائدة مركبة ٦٪ سنوياً تضاف كل شهرين.

نموذج اختبار

س١: أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) إذا كان ق(س) = $\int$ (٢س + ١) ءس فما قيمة ق$'$(٢)؟

أ) صفر　　ب) ٢　　جـ) ٥　　د) ٦

٢) ما الاقتران الذي يمثل اقتراناً أصلياً للمشتقة ق$'$(س) = ٤س^{٢} + ٦س + ٢ ؟

أ) ق(س) = $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢س + ١　　ب) ق(س) = $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + ٦س^{٢} + ٢س + ١

جـ) ق(س) = ٨س + ٦　　د) ق(س) = $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢

٣) إذا كان $\int$ ق$'$(س) ءس = ٣س − ٤س^{٢} + ٢، ما قيمة ق$'$(١) ؟

أ) -٨　　ب) -٥　　جـ) ١　　د) صفر

٤) ما هو $\int$ س $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ ءس؟

أ) س$^{\frac{٥}{٣}}$ + جـ　　ب) $\frac{٣}{٥}$س$^{\frac{٥}{٣}}$ + جـ　　جـ) س$^{\frac{٨}{٣}}$ + جـ　　د) $\frac{٣}{٨}$س$^{\frac{٨}{٣}}$ + جـ

٥) إذا كان $\int_{٢}^{٥}$ ق$'$(س) ءس = ١٢، وكان ق(٥) = ٢ق(٢)، ما قيمة ق(٢) ؟

أ) ١٢　　ب) ٥　　جـ) ٤　　د) ٢

٦) إذا كان هـ(س) = $\int_{٠}^{٣}$ (٢س + ٣س^{٢} + ١) ءس، ما قيمة هـ$'$(٢)؟

أ) صفر　　ب) ٣　　جـ) ٨　　د) ١٥

٧) إذا استثمر مبلغ قدره ٨٢٠٠٠ دينار، بمعدل ٥٪ سنوياً، فما الفائدة البسيطة بعد ٦ سنوات:

أ) ٢٤٢٠٠　　ب) ٢٤٩٠٠　　جـ) ٢٤١٠٠　　د) ٢٤٦٠٠

٨) استثمر مبلغ قدره ٥٠٠٠ دينار بمعدل ٨٪ سنوياً، فما الجملة البسيطة للمبلغ بعد ١٠ سنوات:

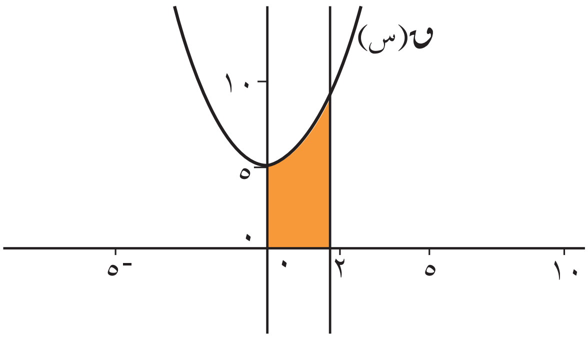
أ) ٩٠٠٠　　ب) ٥٤٠٠　　جـ) ٩٤٠٠　　د) ٩٥٠٠

٩) إذا بلغت الفائدة البسيطة لمبلغ ٨٠٠ دينار ٨٠ ديناراً، فإن معدل الفائدة يساوي:

أ) ٥٪　　ب) ١٨٪　　جـ) ١٠٪　　د) ١٥٪

س٢: أجد $\int (٢س + ١) \sqrt[٣]{(س^{٢} + س + ٤)^{٢}}$ ءس.

س٣: أجد المساحة المحصورة بين منحنى
ق(س) = $س^{٢}$ + ٥، ومحور السينات
والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢



س٤: اقترضت رتيل من بنك مبلغ ٨٠٠٠ دينار لمدة ١٢٠ يوماً بمعدل ١٢٪ سنوياً. أحسب الفائدة البسيطة التجارية والصحيحة.

س٥: حصل أحد التجار من البنك على فوائد قيمتها ٨٤٠ ديناراً مقابل مبلغ ٢٤٠٠٠ دينار، أودعه في البنك لمدة سنتين أحسب معدل الفائدة البسيطة التي حسبها البنك؟