

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين  
وزارة التربية والتعليم

# الرياضيات

## الفترة الثالثة



مركز المناهج

[mohe.gov.ps](http://mohe.gov.ps) | [mohe.pna.ps](http://mohe.pna.ps) | [mohe.ps](http://mohe.ps)

[.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym](https://www.facebook.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym)

هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب ٧١٩ - رام الله - فلسطين

[pcdc.edu.ps](http://pcdc.edu.ps) | [pcdc.mohe@gmail.com](mailto:pcdc.mohe@gmail.com)

## المحتويات

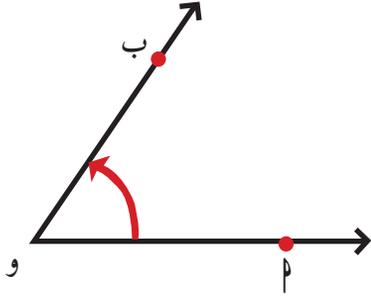
٣	الدرس الأول: الزاوية في الوضع القياسي .....
٧	الدرس الثاني: قياس الزوايا .....
١٠	الدرس الثالث: الاقترانات المثلثية .....
١٧	الدرس الرابع: تمثيل الاقترانات المثلثية بيانياً .....
٢٢	الدرس الخامس: المتطابقات والمعادلات المثلثية .....
٢٥	ورقة عمل .....
٢٧	اختبار ذاتي .....

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على  
توظيف الاقترانات المثلثية في الحياة العملية من خلال الآتي:

- ١- التعرف إلى مفهوم الزوايا الموجّهة.
- ٢- التعرف إلى مفهوم قياسي الزاوية: الستيني والدائري.
- ٣- التحويل من القياس الستيني إلى القياس الدائري وبالعكس.
- ٤- التعرف إلى الوضع القياسي للزاوية، والزوايا المتكافئة.
- ٥- تمثيل منحنيات الاقترانات الدورية (المثلثية) بيانياً.
- ٦- إثبات متطابقاتٍ مثلثية.
- ٧- حلّ معادلاتٍ مثلثية.

## الزّاوية في الوضع القياسي The Angle in Standard Position

( ١ )

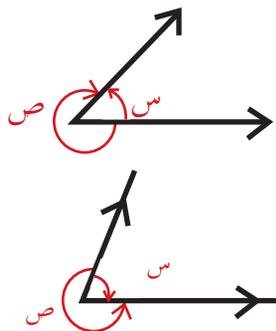


- في الشكل المجاور
- ضلع الابتداء للزاوية  $\theta$  و  $b$  هو: .....
  - ضلع الانتهاء لها هو: ....., لماذا؟ .....
  - اتجاه حركة ضلع الابتداء لينطبق على ضلع الانتهاء هو: .....
  - تُسمّى زاوية  $\theta$  و  $b$  زاويةً موجّهة.



١  
نشاط

**أتعلّم:** الزاوية الموجّهة: هي زاويةٌ يتحدّد اتجاهُها باتجاه دوران ضلع الابتداء لينطبق على ضلع الانتهاء، وتكون الزاوية الموجّهة زاويةً موجّهةً إذا كان اتجاه الدوران عكس عقارب الساعة، وتكون الزاوية الموجّهة سالبةً إذا كان اتجاه الدوران مع عقارب الساعة.



- في الشكل المجاور:
- $\Delta$ س =  $60^\circ$ ,
- $\Delta$ ص = .....
- $\Delta$ ص =  $280^\circ$ ،  $\Delta$ س = .....

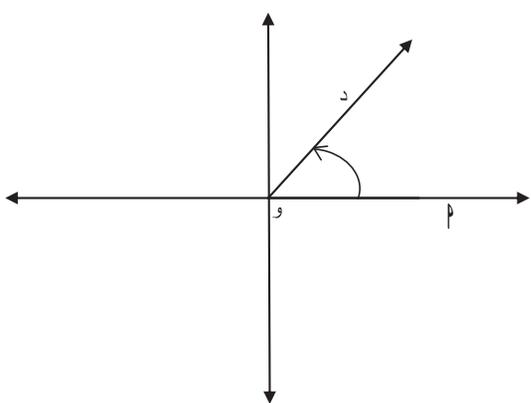


٢  
نشاط



نشاط ٣

أسمي الزاوية الموجهة في الشكل .....  
ضلع الابتداء لها هو  $٢$  ، ضلع الانتهاء لها  
هو: ..... ، رأس الزاوية هو: .....

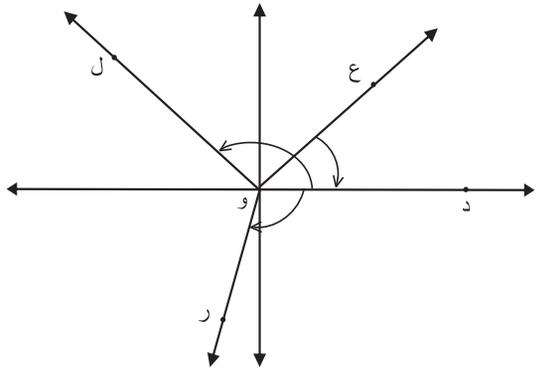


**أتعلم:** تكون الزاوية في الوضع القياسي إذا كان رأسها نقطة الأصل، وانطبق ضلع الابتداء على محور السينات الموجب.



نشاط ٤

في الشكل المجاور: الزاوية الموجهة ع و د  
ليست في وضع قياسي؛ لأنّ .....  
• الزاوية الموجهة ..... في الوضع القياسي؛  
لأنّ .....  
• الزاوية الموجهة د و ر في .....  
لأنّ .....



**أستنتج أنّ:**

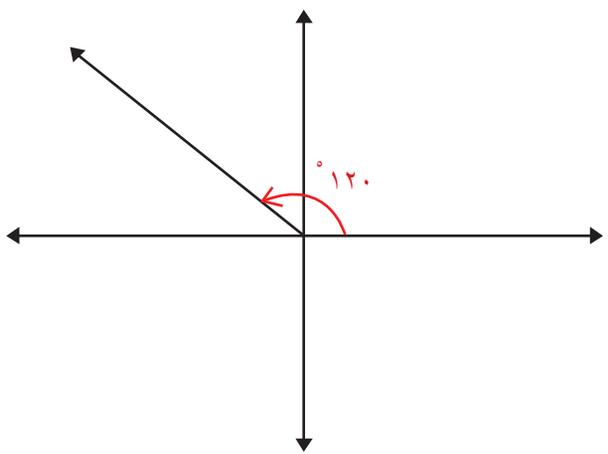
- إذا كانت  $\angle ه > ٩٠^\circ$  ، فإنّ ضلع انتهائها يقع في الربع الأول.
- إذا كانت  $\angle ه > \dots > \dots$  ، فإنّ ضلع انتهائها يقع في الربع الثاني.



٥

نشاط

أرسمُ الزّوايا التي قياسها  $120^\circ$  ،  $225^\circ$  ،  $300^\circ$  ،  $60^\circ$  في الوضع القياسي، ثم أحددُ الربع الذي تقع فيه:



تقع الزّاوية التي قياسها  $120^\circ$  في الربع .....

بينما تقع الزّاوية التي قياسها  $225^\circ$  في الربع .....

تقع الزّاوية التي قياسها  $300^\circ$  في الربع .....

تقع الزّاوية  $60^\circ$  في الربع .....

**أتعلّم:** عند رسم زاوية في الوضع القياسي فإنّ ضلعَ انتهائها يحدّد موقعها في المستوى الديكارتي.



٦

نشاط

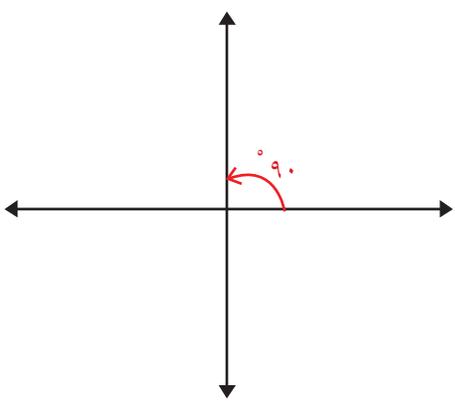
أرسمُ الزّوايا التي قياسها:  $90^\circ$  ،  $180^\circ$  ،  $90^\circ$ .

ينطبق ضلعُ انتهاء الزّاوية التي قياسها  $90^\circ$  على محور .....

بينما ينطبق ضلعُ انتهاء الزّاوية التي قياسها  $180^\circ$

على .....، أما ضلعُ انتهاء الزاوية التي قياسها

$90^\circ$  - فينطبق على .....

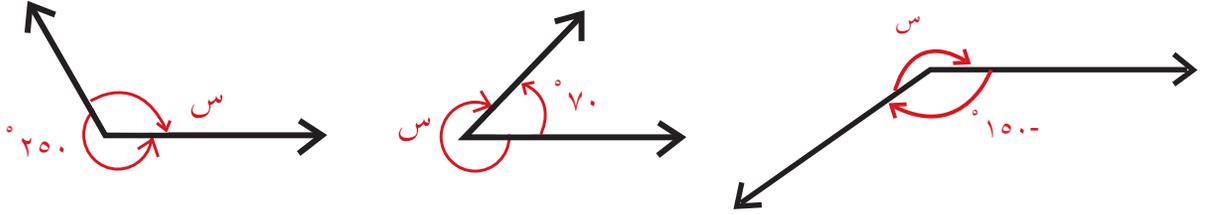


تُسمّى الزّاوية التي في الوضع القياسي، وينطبق ضلعُ انتهائها على أحد المحاور الإحداثيّة زاويةً ربعيّةً.

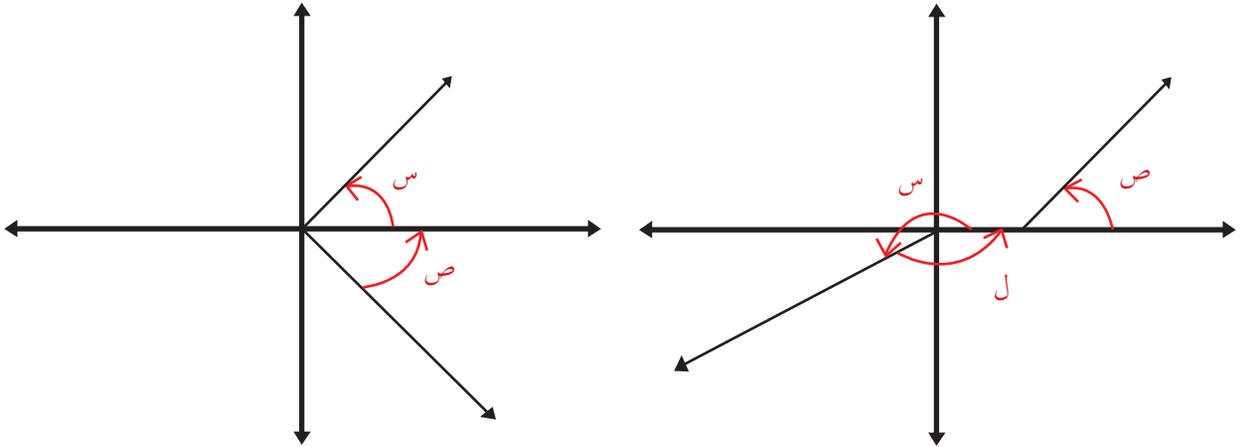
أعطِ ثلاثة أمثلة لزوايا ربعيّة: ..... ، ..... ، .....

## تمارين ومسائل:

(١) ما قيمة  $s$  التي تُمثّل قياس الزاوية في كلٍّ من الأشكال الآتية:



(٢) أميِّزُ الزوايا التي في الوضع القياسي:



(٣) أحدّدُ الرُّبع من المستوى الذي تقع فيه الزوايا الآتية:

$120^\circ$  ،  $130^\circ$  ،  $250^\circ$  ،  $320^\circ$  ،  $450^\circ$

## قياس الزوايا

## Angles and their Measurements

(٢)

في الشكل المجاور، تم تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساوياً في الطول، فإن الزاوية المركزية التي تقابل كل قوس، قياسها ١°. والزاوية التي تقابل ٥٠ قوساً يكون قياسها .....°.



والدرجة الواحدة تقسم إلى ٦٠ جزءاً أصغر منها، وهو

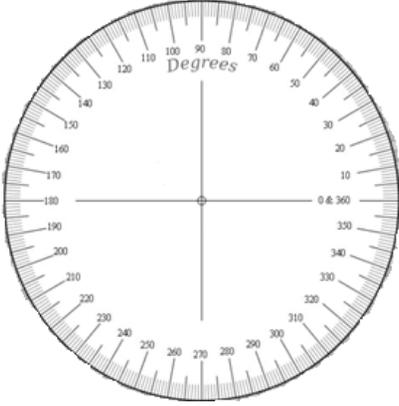
الدقيقة،

وتُكتَبُ على الصورة: ١° = (...)

والدقيقة الواحدة تُقسم إلى ٦٠ جزءاً أصغر منها، وهو الثانية،

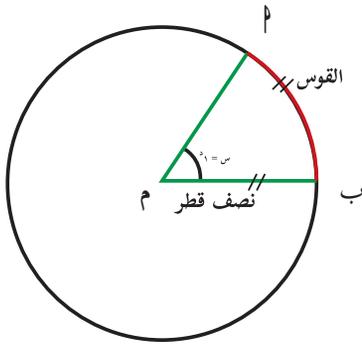
وتُكتَبُ على الصورة: ١' = ٦٠''

الزاوية ٣٢,٦° = ٣٢° و ٠,٦ × ٦٠ = (...)' = ٣٦' = ٣٢°



يُسمى قياس الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني القياس الستيني للزاوية.

أفكر: لماذا سُمي القياس الستيني بهذا الاسم؟



في الشكل المجاور، دائرة مركزها م ونصف قطرها وحدة واحدة.

طول المقوس ب = طول نصف قطر الدائرة

طول المقوس الذي يقابل الزاوية المركزية التي قياسها (س) في

الشكل = .....



أتعلم: يكون قياس الزاوية س بالقياس الدائري = ١ راديان (Radian) ونرمز له بالرمز ١<sup>ر</sup>

تعريف: الزاوية النصف قطريّة: هي زاوية مركزية في دائرة يقابلها قوس طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة، ويُرمز لها بالرمز (١<sup>ر</sup>)، وهي وحدة قياس الزاوية بالقياس الدائري للزوايا.

محيط الدائرة =  $2\pi$  ← محيط دائرة الوحدة = .....

الدورة الكاملة =  $360^\circ$  يقابلها  $2\pi$

←  $\pi$  يقابلها ..... درجة

باستخدام التقريب ( $\pi = 3,14$ ) نستنتج أن:  $3 = 57,3^\circ$

أكمل:  $3^\circ = \dots\dots\dots$  ،  $1,5^\circ = \dots\dots\dots$



أولاً: أحوّل قياس الزوايا الآتية من درجات إلى زاوية نصف قطرية (راديان):

$90^\circ$  ،  $120^\circ$  ،  $225^\circ$

•  $90^\circ$  :  
•

للتحويل من درجات إلى دائري:  $\pi$  يقابلها  $180^\circ$

←  $90^\circ$  هـ بالتقدير الدائري

$$هـ = \frac{90^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{1}{2} \pi$$

$$\bullet \quad 120^\circ = \frac{120^\circ}{180^\circ} \times \pi = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \quad 225^\circ = \dots\dots\dots$$



ثانياً: أحوّل قياس الزوايا من دائري إلى درجات:

$$\frac{5}{6} \pi ، \frac{3}{4} \pi ، \frac{15}{18} \pi$$

للتحويل من دائري إلى درجات:  $\pi$  يقابلها  $180^\circ$

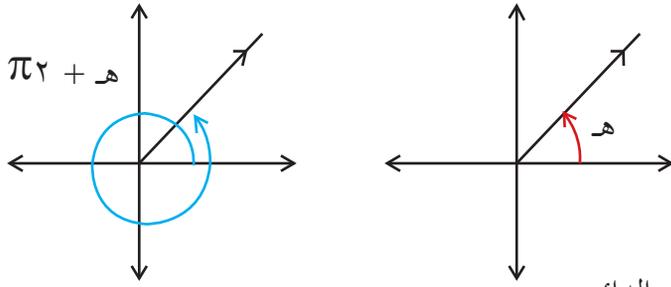
$$\frac{5}{6} \pi \leftarrow \text{س بالدرجات.}$$

$$\text{س} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{5}{6} \pi = 150^\circ$$

أتعلم: يُقال لزاويتين أنّهما متكافئتان: إذا كان لهما ضلع الابتداء نفسه، وضلع الانتهاء نفسه.

في الشكل المجاور:

∠ه تكافئ ∠ه + π



وبشكلٍ عام:

∠ه تكافئ ∠ه + πν ، ∠ه بالقياس الدائري.

∠ه تكافئ ∠ه + ٣٦٠ν ، ∠ه بالقياس الستيني ، حيث ν عدد صحيح.

أجدُ ثلاث زوايا مكافئة لكلِّ من الزوايا التي قياسها:  $\frac{\pi}{4}$  ،  $60^\circ$  .

الزاوية التي قياسها  $60^\circ$  تكافئ الزاوية التي قياسها  $60^\circ + 360^\circ \cdot \nu$  ،  $\nu = 1$

الزاوية التي قياسها  $60^\circ$  تكافئ الزاوية التي قياسها  $60^\circ + 360^\circ \cdot 2$  ،  $\nu = 2$  ، .....

الزاوية التي قياسها  $60^\circ$  تكافئ الزاوية التي قياسها  $60^\circ + 360^\circ \cdot (1 - \nu)$  ،  $\nu = 1$  ، .....

الزاوية التي قياسها  $\frac{\pi}{4}$  تكافئ ..... عندما  $\nu = 1$

الزاوية التي قياسها  $\frac{\pi}{4}$  تكافئ  $\frac{\pi - \nu}{4}$  عندما  $\nu = 1$  ، .....



## مهمة تقويمية:

- أوجد ثلاث زوايا تكافئ الزاوية التي قياسها  $\frac{\pi}{4}$

- أعطي زاويتين قياس احدهما موجب والآخر سالب

مكافئتين لكل من الزوايا التي قياسها:  $\frac{\pi}{3}$  -

،  $120^\circ$  .

## تمارين ومسائل:

(١) أحوّل القياسات الآتية من الدرجات إلى راديان:

$240^\circ$  ،  $90^\circ$  ،  $420^\circ$  ،  $135^\circ$

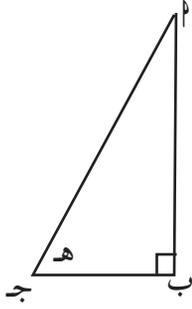
(ب) أحوّل القياسات الآتية من راديان إلى درجات:

$\frac{\pi}{6}$  ،  $\frac{\pi}{3}$  ،  $\frac{\pi - 11}{12}$  ،  $\frac{\pi - 2}{4}$  ،  $2,5$

(٢) أوجد ثلاث زوايا تكافئ الزاوية التي قياسها  $50^\circ$ .

(٣)

## الاقترانات المثلثية Trigonometric Functions



في المثلث القائم الزاوية  $\Delta$  ب ج هـ ، النسب المثلثية للزاوية الحادة التي قياسها هـ

$$\text{جا هـ} = \frac{\text{م}}{\text{هـ}} ، \text{جتا هـ} = \frac{\text{ج}}{\text{هـ}} ، \text{ظا هـ} = \frac{\text{م}}{\text{ج}}$$



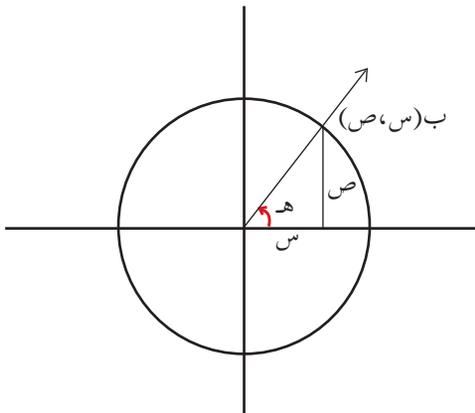
هل يمكن إيجاد النسب المثلثية للزوايا التي قياسها أكبر من  $90^\circ$  ، أو قياسها سالب؟



**أتعلم:** الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة، تُسمى دائرة الوحدة.

$$\text{معادلة دائرة الوحدة: } \text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$$

لتكن هـ زاوية في الوضع القياسي، إذا قطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في النقطة ب (س، ص). أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية هـ.



$$\text{جا هـ} = \frac{\text{ص}}{1} = \text{ص} ، \text{جتا هـ} = \frac{\text{س}}{1} = \text{س} ، \text{ظا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

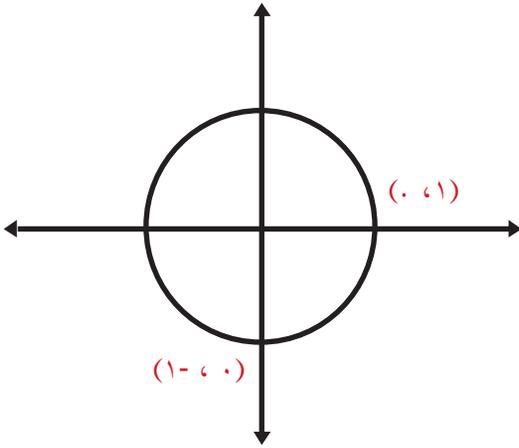
بشكل عام: إحداثيات النقطة ب (جتا هـ ، جا هـ).

**أتعلم:** إذا قطع ضلعٌ انتهاءً الزاوية هـ في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة ب (س،ص)، فإنه يمكن تعريفُ الاقترانات المثلثية جاه = ص ، جتاه = س ، ظاه =  $\frac{ص}{س}$  ،  $س \neq 0$  وتُسمى هذه الاقترانات، الاقترانات المثلثية الأساسية للزاوية هـ.

**ملاحظة:** إذا كانت النقطة ب (س ، ص) تقع على دائرة الوحدة،

فإن  $1 \geq س \geq 1$  ، و  $1 \geq ص \geq 1$  ، وعليه فإن  $1 \geq جتاه \geq 1$  و  $1 \geq جاه \geq 1$

أجدُ الاقترانات المثلثية للزوايا الربعية:  
° ، ° ٩٠ ، ° ٢٧٠ .



• ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (١، ٠)، وينتج جا.° = ..... ، جتا.° = ..... ، ظا.° = .....

• ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ° ٩٠ يقطع دائرة الوحدة في النقطة (..... ، .....)، وينتج جا.° ٩٠ = ..... ، جتا.° ٩٠ = ..... ، ظا.° ٩٠ = .....

• ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ° ٢٧٠ يقطع دائرة الوحدة في النقطة (..... ، .....)، وينتج جا.° ٢٧٠ = ..... ، جتا.° ٢٧٠ = ..... ، ظا.° ٢٧٠ = .....

• أكمل الجدول الآتي:

قياس الزاوية الربعية (س°)	جاس	جتاس	ظاس
صفر	صفر		
° ٩٠			
° ١٨٠		١-	صفر
° ٢٧٠			
° ٣٦٠		١	٠

٤  
نشاط



إذا قطع ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها  $هـ^\circ$  دائرة الوحدة في النقطة  $پ$   $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$  فإن:

- جاه  $= \frac{1}{2}$ ؛ لأن الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع ضلع انتهائها هو .....
- جتا هـ  $=$  .....؛ لأن:
- ظاهر  $=$  .....

٥  
نشاط

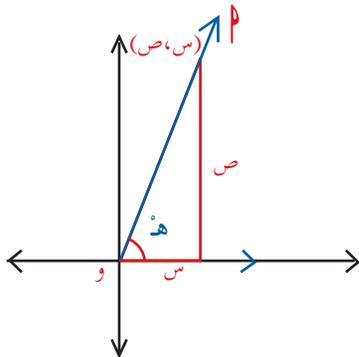


- أرسم دائرة الوحدة
- أرسم زاويةً قياسها  $هـ^\circ$  في الوضع القياسي
- نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية مع الدائرة هي النقطة  $پ$  (س، ص).
- تكون إشارة س موجبة، إذا وقعت النقطة  $پ$  في الربع .....، أو الربع ..... من المستوى.
- تكون إشارة ص موجبة، إذا وقعت النقطة  $پ$  في الربع .....، أو الربع ..... من المستوى.

**أتعلم:** تتحدد إشارة الاقترانات المثلثية للزاوية هـ حسب الربع الذي تقع فيه.

إذا كانت هـ زاويةً في الوضع القياسي، النقطة  $پ$  (س، ص) تقع على ضلع انتهائها، بعد النقطة

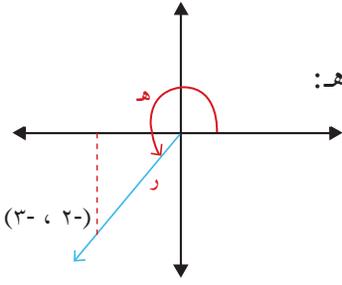
$پ$  (س، ص) عن نقطة الاصل = .....



$$\frac{ص}{ر} = \text{جاه، جاه}$$

$$\frac{س}{ر} = \text{جتاه}$$

$$\text{ظاهر} = \frac{ص}{س}، س \neq \text{صفر}$$



في الشكل المجاور، أجد قيم الاقترانات المثلثية جاه ، جتاه ، ظاهر:

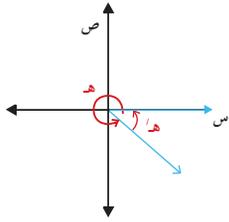
..... = ر

..... = جاه ، جتاه .....

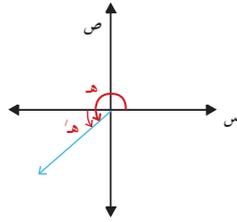
..... = ظاهر



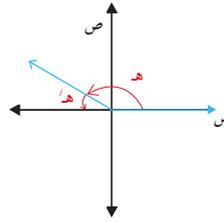
لكل زاوية قياسها ه درجة في المستوى زاوية اسناد قياسها ه' درجة، أكمل:



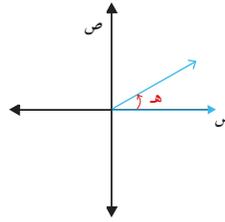
..... = ه'



..... = ه' - 180°



..... = ه'



..... = ه'



أتعلم: زاوية إسناد الزاوية (ه) هي الزاوية الحادة (> ه') الناتجة من إتحاد ضلع انتهاء الزاوية (> ه) ومحور السينات.

قيم الاقترانات المثلثية لزاوية الإسناد هي ذاتها قيم الاقترانات المثلثية للزاوية الأساسية، بينما تحدد إشارة تلك القيمة موضع ضلع انتهاء الزاوية الأساسية.

أذكر قيم الاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة، وأكمل الجدول الآتي:

قياس الزاوية (س)	جاس	جتاس	ظاس
30°	0,5		
45°			1
60°			√3/2





٩

نشاط

أولاً: أجد قيمة جا  $120^\circ$   
 الحل: الزاوية في الوضع القياسي والتي قياسها  $120^\circ$  تقع في الربع .....  
 إشارة جا  $120^\circ$  موجب.  
 قياس زاوية الإسناد هـ =  $180^\circ - 120^\circ = \dots\dots\dots$   
 جا  $120^\circ = \text{جا } 60^\circ = \dots\dots\dots$

ثانياً: أجد قيمة جتا  $240^\circ$   
 الحل: الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها  $240^\circ$  تقع في الربع .....  
 إذن: إشارة جتا  $240^\circ$  .....  
 قياس زاوية الإسناد (هـ) = .....  
 إذن: جتا  $240^\circ = \text{جتا } \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$



١٠

نشاط

أجدُ جا  $30^\circ$  -  
 الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها  $30^\circ$  تقع في الربع ..... ،  
 إشارة جا  $30^\circ$  هي: .....  
 قياس زاوية الإسناد (هـ) = .....  
 جا  $30^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

• أجد ظا  $\frac{\pi}{4}$   
 الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها  $\frac{\pi}{4}$  تقع في الربع ..... ،  
 إشارة ظا  $\frac{\pi}{4}$  هي: .....  
 قياس زاوية الإسناد (هـ) = ..... ، إذن: ظا  $\frac{\pi}{4} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$



أجد قيمة  $2^{\circ 30}$  جا  $2^{\circ 30}$  وأقارنه بقيمة جا  $60^{\circ}$   
 $2^{\circ 30}$  جا  $2^{\circ 30}$  جا  $2^{\circ 30} = \dots \times \dots \times 2 = \dots$   
جا  $60^{\circ} = \dots$  ماذا تلاحظ؟

أجد:

- جا  $2^{\circ 45}$  جا  $2^{\circ 45} = \dots \times \dots \times 2 = \dots$
- جا  $90^{\circ} = \dots$  ماذا تلاحظ؟ ماذا تلاحظ؟

أستنتج أن:  $2^{\circ 2} = 2^{\circ 2}$



أجد قيمة  $30^{\circ}$  جا  $30^{\circ}$  وأقارنه بقيمة جا  $60^{\circ}$   
 $30^{\circ}$  جا  $30^{\circ} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (\dots)^2$   
جا  $60^{\circ} = \dots$  ماذا تلاحظ؟



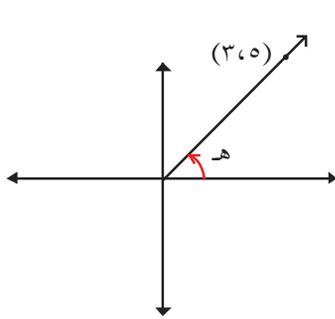
أجد ناتج جا  $15^{\circ}$  جا  $15^{\circ}$  دون استخدام الحاسبة  
جا  $15^{\circ}$  جا  $15^{\circ} = \dots$  جا  $15^{\circ} = \dots$

أستنتج أن:  $2^{\circ 2} = 2^{\circ 2}$  ،  $2^{\circ 2} = 2^{\circ 2}$  ،  $1 - 2^{\circ 2} = 2^{\circ 2} - 1$

## تمارين ومسائل:

(١) أجد قيمة الاقترانات المثلثية الأساسية لقياسات الزوايا الآتية:  
 $\pi$ ،  $90^\circ$ ،  $45^\circ$

(٢) أجد قيمة الاقترانات المثلثية الأساسية للزاوية هـ، إذا قطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في النقطة:



أ  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ، ب  $(-1, 0)$ ، ج  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

(٣) ما قيمة جا هـ، جتا هـ، ظا هـ في الشكل المجاور؟

(٤) أحدد إشارة ما يأتي:

جتا  $135^\circ$ ، ظا  $84^\circ$ ، جتا  $\frac{\pi}{3}$ ، ظا  $\frac{\pi}{4}$

(٥) أجد قيمة ما يلي دون استخدام الحاسبة جتا  $22,5^\circ$ ،  $1 -$

## مهمة تقويمية:

(١) أجد قيمة ما يلي دون استخدام الحاسبة

أ  $1 - 2$  جا  $\frac{\pi}{6}$ ، ب  $6$  جا  $\frac{\pi}{12}$  جتا  $\frac{\pi}{12}$

(٢) أجد قياس زاوية الإسناد للزوايا التي قياساتها ما يأتي:

$225^\circ$ ،  $\frac{\pi}{3}$ ،  $150^\circ$ ،  $\frac{\pi}{4}$ ،  $210^\circ$

(٧) أجد قيمة ما يأتي، دون استخدام الآلة الحاسبة:

جا  $330^\circ$ ، ، ، جا  $300^\circ$

(٤)

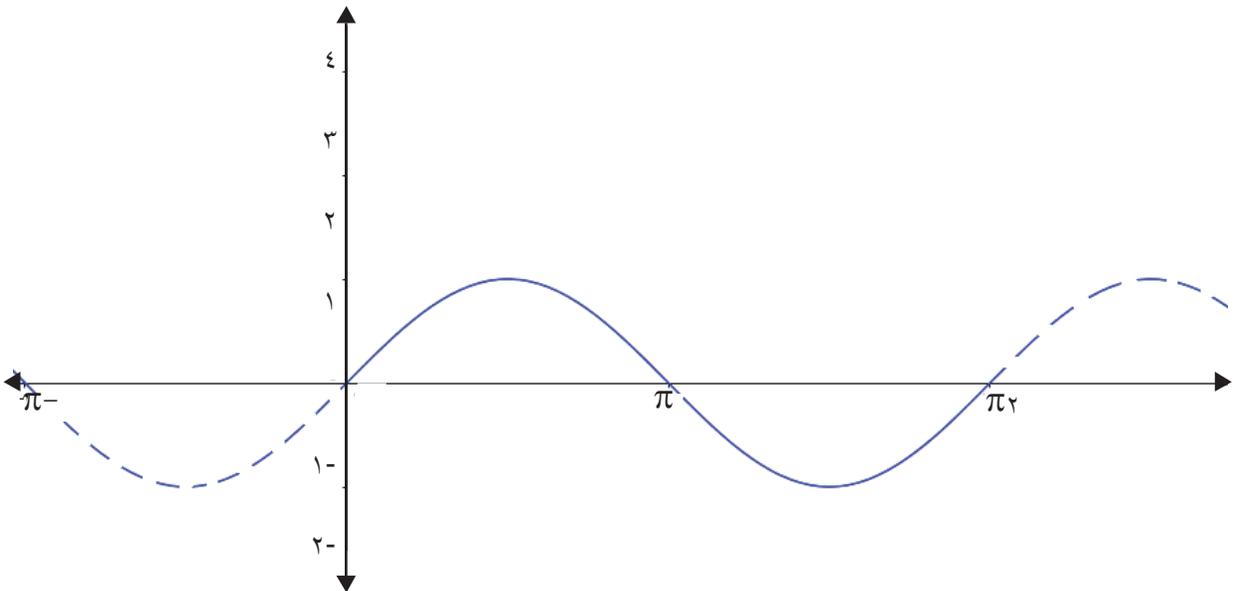
## تمثيل الاقترانات المثلثية بيانياً Graphing Trigonometric Functions

أتملُّ الاقتران ق(س) = جاس في المستوى الديكارتي، أكملُّ الجدول الآتي:



$\pi_2$	$\frac{\pi_11}{6}$	$\frac{\pi_3}{2}$	$\frac{\pi_5}{4}$	$\pi$	$\frac{\pi_2}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	صفر	$\frac{\pi}{2}-$	$\pi-$	قياس الزاوية س
...	...	1-	...	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	...	1-		ق(س) = جاس

أعيِّنُ النِّقاط من الجدول، وأرسمُ منحنى الاقتران:



الأحظ شكل المنحنى، وأستنتج خصائصه.

- بما أنَّ الزوايا المتكافئة لها النسب المثلثية المناظرة نفسها، فإنَّ منحنى ق(س) = جاس يكرِّر نفسه في فترات متساوية، طول كلِّ منها  $\pi_2$ . ومثل هذه الاقترانات تُسمَّى اقتراناتٍ دوريةً،

ومقدار دورة هذا الاقتران  $\pi_2 =$

- مجال الاقتران ق(س) = جتا س هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح، ومداه هو  $[-1, 1]$
- أكبر قيمة للاقتران = ..... وأصغر قيمة له = .....

- مثل هذه الاقترانات لها سعة، وتُعرف سعة الاقتران  $= \frac{\text{أكبر قيمة له} - \text{أصغر قيمة له}}{2}$

وعليه فإن: سعة الاقتران ق(س) = جتا س  $= \frac{1 - (-1)}{2} = 1$

- منحنى ق(س) = جتا س متماثل حول نقطة الأصل؛ لذلك فهو اقتران .....

أُمثِّل الاقتران: ق(س) = جتا س في المستوى الديكارتي، س  $\in$  ح .  
أكمل الجدول الآتي:



$\pi_2$	$\frac{\pi_{11}}{6}$	$\frac{\pi_3}{2}$	$\frac{\pi_5}{4}$	$\pi$	$\frac{\pi_2}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	صفر	$\frac{\pi}{2} -$	$\pi -$	قياس الزاوية س
	...	...	...	1-	$\frac{1}{2} -$	0	...	...	...	...	...	1-	ق(س) = جتا س

أُعيِّن النقاط من الجدول، وأرسم منحنى الاقتران.

ألاحظ شكل المنحنى، وأستنتج خصائصه:

- مجال الاقتران ق(س) = جتا س هو .....، ومداه .....

- أكبر قيمة للاقتران = .....، وأصغر قيمة له = .....

- الاقتران ق(س) = جتا س اقتران دوري، دورته = .....

- سعة الاقتران  $= \frac{\text{أكبر قيمة له} - \text{أصغر قيمة له}}{2} = \dots\dots\dots$

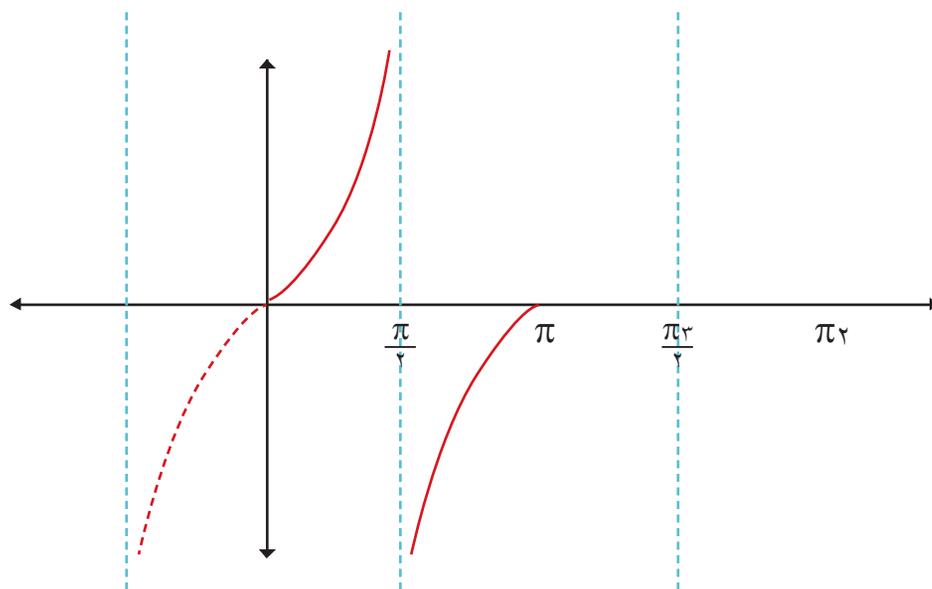
- ق(س) = جتا س اقتران زوجي؛ لأن منحناه متماثل حول محور .....

أمثل الاقتران ق(س) = ظاس في المستوى الديكارتي.

أكمل الجدول الآتي:

$\pi_2$	$\frac{\pi_{11}}{6}$	$\frac{\pi_3}{2}$	$\frac{\pi_4}{3}$	$\pi$	$\frac{\pi_2}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	صفر	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	قياس الزاوية س
...	$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	...	$\sqrt[3]{3}$	...	...	...	...	١	...	صفر	...	...	ق(س) = ظاس

أعینُ النِّقاط من الجدول، وأُكملُ رسم منحنى الاقتران.



ألاحظ شكل المنحنى، وأدوّن خصائصه:

مجال ق(س) = ظاس هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية، ما عدا .....

دورته = .....

ق(س) = ظاس اقترانٌ فرديٌّ، أوضِّح ذلك.

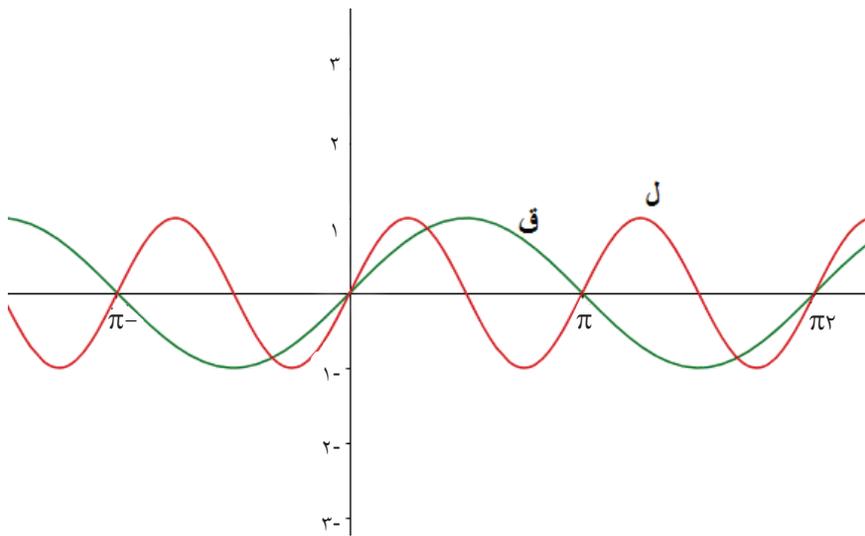


أُمثِّلُ منحنى الاقتران ق(س) = حاس، ل(س) = جا٢س على المستوى البياني نفسه، ثم أجدُ السَّعة والدورة للاقتران ل(س).

أُكْمَلُ الجدول الآتي:

$\pi_2$	$\frac{\pi_{11}}{6}$	$\frac{\pi_3}{2}$	$\frac{\pi_5}{4}$	$\pi$	$\frac{\pi_2}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	صفر	$\pi-$	قياس الزاوية س
...	...	...	١	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	...	...	...	صفر	...	ل(س) = جا٢س

أُعَيِّنُ النِّقَاطَ فِي الْمَسْتَوَى الْديكارتِي، وَأُلَاحِظُ التَّمثِيلَ الْبِيَانِي لِلْمَنْحَنِ:



من التمثيل البياني لمنحنى ل(س)، ألاحظُ أنَّ دورة الاقتران ل(س) هي: .....

بينما سعته = ....., مدى الاقتران ل = .....

**أُستنتج:** الاقتران الدوري ق(س) =  $P$  جا (ب س) + ج، او الاقتران ه(س) =  $P$  جتا (ب س) + ج

حيث:  $P$ ، ب، ج أعداد حقيقيّة،  $P \neq 0$ .

$$\frac{\pi^2}{|ب|} = \text{دورة الاقتران}$$

$$|ب| = \text{سعة الاقتران}$$

$$\text{مدى الاقتران} = [ - |ب| ، + |ب| ]$$

لديك الاقتران ق(س) = ٢ جتا  $\frac{س}{٤}$  - ٣، أجد دورته، سعته، ومداه، دون تمثيله بيانياً.

$$\text{دورة الاقتران} = \frac{\pi^2}{|ب|} = \dots\dots\dots ، \text{سعة الاقتران} = \dots\dots\dots$$



$$\text{مدى الاقتران} = \dots\dots\dots ، \text{مجال الاقتران} = \dots\dots\dots$$

## تمارين ومسائل:

(١) أمثلُ منحنيات الاقترانات المثلثية الآتية:

$$\bullet \text{ ق(س) = جا س + ٢ ، ل(س) = جتا ٢س - ١ ، م(س) = جتا (-س)}$$

$$\bullet \text{ ع(س) = ظاس + ١ ، ك(س) = جا (س + \pi)}$$

(٢) أجد: أكبر قيمة وأصغر قيمة (إن وجدت)، السعة، الدورة لكل من الاقترانات الواردة في السؤال الأول.

(٣) أجد: دورة، وسعة، ومدى الاقتران: ق(س) = ٣- جتا  $(\frac{س}{٤})$ ، دون تمثيله بيانياً.

## مهمة تقويمية:

(أ) أرسم منحنى الاقتران ق(س) = جتاس، وعلى المستوى الديكارتي نفسه أرسم منحنى الاقتران ل(س) = جا  $(س + \frac{\pi}{٤})$ ، ماذا تلاحظ؟

(ب) أرسم منحنى الاقتران ق(س) = جاس، وعلى المستوى الديكارتي نفسه أرسم منحنى الاقتران ل(س) = جتا  $(س - \frac{\pi}{٤})$ ، ماذا تلاحظ؟

## المتطابقات والمعادلات المثلثية (Trigonometric Identities and Equations)

(٥)

معادلة دائرة الوحدة  $ص^2 + ج^2 = ١$ ، النقطة ب تقع على الدائرة، إذن: تحقق معادلتها وينتج أن:  
جا<sup>٢</sup>ه + جتا<sup>٢</sup>ه = ١، مثل هذه العلاقة صحيحة لأي زاوية ه، وتسمى متطابقة.

$$جا^2 ه + جتا^2 ه = ١$$

أتعلم: المتطابقة المثلثية هي معادلة بمتغير تحتوي اقتراناً مثلثياً، وتكون صائبة لجميع قيم المتغير.

أستنتج أن: جا<sup>٢</sup>ه = ١ - جتا<sup>٢</sup>ه، جتا<sup>٢</sup>ه = ١ - جا<sup>٢</sup>ه، وضح ذلك.

زاوية قياسها س درجة بحيث جاس =  $\frac{٣}{٥}$ ، أجد جتا س، ظا س.

$$١ = جا^2 س + جتا^2 س$$

$$١ = جتا^2 س + \left(\frac{٣}{٥}\right)^2$$

$$جتا^2 س = ١ - \dots = \dots، جتا س = \dots$$

$$ظا س = \dots$$

باستخدام المتطابقة جا<sup>٢</sup>ه + جتا<sup>٢</sup>ه = ١، أثبت أن:

$$١ + ظاه = قاه صحيحة لأي زاوية.$$

نقسم طرفي المتطابقة على جتا<sup>٢</sup>ه.

وينتج أن: .....، حيث إن جتا<sup>٢</sup>ه ≠ ٠.

بنفس الطريقة اثبت أن ظتا<sup>٢</sup>ه + ١ = قتا<sup>٢</sup>ه صحيحة لأي زاوية.

$$أثبت صحة المتطابقة  $\frac{جاس}{جتاس - ١} = ١ + جتا س$ ، جتا س ≠ ١$$

$$\dots = \text{الطرف الأيمن}$$

أضرب البسط والمقام في (١ + جتا س)

أستبدل (١ - جتا س) بـ جا<sup>٢</sup>س

أختصر البسط والمقام بالقسمة على جا<sup>٢</sup>س

أقارن النتيجة بالطرف الأيسر من المتطابقة الأصلية.

١  
نشاط

٢  
نشاط

٣  
نشاط

أثبت صحة المتطابقة: جتا<sup>٢</sup>هـ - جا<sup>٢</sup>هـ = ١ - جا<sup>٢</sup>هـ  
 الطرف الأيمن: من المتطابقة جا<sup>٢</sup>س + جتا<sup>٢</sup>س = ١، ينتج أن: جتا<sup>٢</sup>هـ = ١ - جا<sup>٢</sup>هـ  
 (١ - جا<sup>٢</sup>هـ) - جا<sup>٢</sup>هـ = ..... = الطرف الأيسر / وهو المطلوب.



أثبت أن:  $\frac{١ + \text{ظا}^٢\text{هـ}}{١ + \text{ظتا}^٢\text{هـ}} = \text{ظا}^٢\text{هـ}$



الطرف الأيمن:  $\frac{١ + \text{ظا}^٢\text{هـ}}{١ + \text{ظتا}^٢\text{هـ}} = \frac{\text{قا}^٢\text{هـ}}{\text{قتا}^٢\text{هـ}} = \dots\dots\dots$

**ملاحظة:** لإثبات صحة المتطابقة، يمكن البدء بأحد الطرفين، والوصول إلى الطرف الآخر، ويمكن البدء بكلا الطرفين، والوصول إلى مقدارين متساويين.

تسمى الجملة المفتوحة التي تحتوي اقتراناً مثلثياً وتكون صائبة لبعض القيم الحقيقية معادلة مثلثية.

أتذكر: إذا كان س ، ص قياسين لزاويتين متتامتين فإن: جتا ص = جتا ص.

أحلّ المعادلة المثلثية: جا(٣٠ + س) = جتا ٤س ، صفر  $\geq$  س  $\geq$  ٩٠°.  
 ٣٠ + س٤ = .....  
 ٦س = .....، إذن س = .....



مثال (١): أجد مجموعة حلّ المعادلة:

$$\text{جتا}^٢\text{س} + ٢\text{جتا}٣ - ٣ = \text{صفر} ، \text{صفر} \geq \text{س} \geq ٢\pi$$

$$\text{جتا}^٢\text{س} + ٢\text{جتا}٣ - ٣ = \text{صفر}$$

$$(\text{جتا}٣ + ٣) (\text{جتا}٣ - ١) = \text{صفر}$$

إذن: جتا س + ٣ = صفر ← جتا س = -٣ (تُرفض)، لماذا؟

أو جتا س = ١ ← س = ٠ أو س =  $\pi$  ← مجموعة الحلّ = {٠،  $\pi$ }

أجدُ مجموعةَ حلِّ المعادلة:

$$\text{جاس جتاس} - \frac{1}{\text{جاس}} = \text{صفر} ، \text{صفر} \geq \text{س} \geq \pi 2$$

$$\text{جاس جتاس} - \frac{1}{\text{جاس}} = \text{صفر} ، \leftarrow (\text{جاس}) (\dots - \dots) = \text{صفر}$$

إذن: جاس = صفر، س زاوية ربعية،  $\leftarrow$  س = صفر،  $\leftarrow$  أو س = ..... ، أو س = .....

$$\text{جتاس} - \frac{1}{\text{جاس}} = \text{صفر} ، \text{جتاس} = \dots\dots\dots ، \text{زاوية الإسناد} = \dots\dots\dots$$

جتاس قيمة موجبة  $\leftarrow$  تقع الزاوية في الربع ..... ، أو الربع .....

إذن: س = ..... ، أو س = .....

مجموعة الحل = .....

## تمارين ومسائل:

(١) أثبت صحة المتطابقات الآتية:

$$(أ) (\text{جاس} + \text{جتاس})^2 = 1 + \text{جا}^2 \text{س}$$

$$(ب) \left( \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{جاس}} \right)^2 = \frac{1 - \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}}$$

$$(ج) \frac{1 - \text{جتا}^2 \text{هـ}}{1 + \text{جتا}^2 \text{هـ}} = \text{ظا}^2 \text{هـ}$$

(٢) ما مجموعة حل كل من المعادلات الآتية، حيث: صفر  $\geq$  س  $\geq$   $\pi 2$  ؟

$$(أ) 2 \text{جتا}^2 \text{س} - 1 = \text{صفر}$$

$$(ب) 2 \text{جا}^2 \text{س} + \text{جاس} = \text{صفر}$$

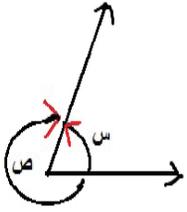
$$(ج) \text{ظا}^2 \text{س} + 1 = 2$$

## ورقة عمل

### السؤال الأول:

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(١) ما قيم  $s$  ،  $v$  الممكنة في الشكل المجاور؟



(أ)  $(60^\circ, 300^\circ)$  (ب)  $(60^\circ, -300^\circ)$  (ج)  $(-60^\circ, 300^\circ)$  (د)  $(-60^\circ, -300^\circ)$

(٢) أي القياسات الآتية قياسٌ لزاوية ربعية؟

(أ)  $120^\circ$  (ب)  $190^\circ$  (ج)  $300^\circ$  (د)  $360^\circ$

(٣) أي القياسات الآتية قياسٌ لزاويةٍ مكافئةٍ للزاوية التي قياسها  $135^\circ$ ؟

(أ)  $-225^\circ$  (ب)  $225^\circ$  (ج)  $-135^\circ$  (د)  $45^\circ$

(٤) ما قياس زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها  $200^\circ$ :

(أ)  $160^\circ$  (ب)  $-60^\circ$  (ج)  $20^\circ$  (د)  $-20^\circ$

(٥) زاوية قياسها  $(\frac{\pi 3}{5})^\circ$  ، ما قيمة قياسها بالدرجات؟

(أ)  $216^\circ$  (ب)  $54^\circ$  (ج)  $108^\circ$  (د)  $34,4^\circ$

(٦) زاوية قياسها  $315^\circ$  ، ما قياسها بالراديان؟

(أ)  $\frac{\pi 7}{8}$  (ب)  $\frac{\pi 7}{4}$  (ج)  $\frac{\pi 315}{360}$  (د)  $\frac{\pi 4}{7}$

(٧) إذا كان  $\csc \theta = \frac{6}{8}$  ، فما قيمة  $\csc \theta$ ؟

(أ)  $6$  (ب)  $\frac{3}{5}$  (ج)  $\frac{8}{1}$  (د)  $8$

(٨) ما سعة الاقتران: ق(س) = ٢جتا ٣س - ١ ؟

أ) ٢      ب) ٣      ج) ١-      د) ١

(٩) ما دورة الاقتران: ل(س) = ٣جا ٢س + ١ ؟

أ)  $\pi_2$       ب)  $\pi$       ج)  $\pi(\frac{2}{3})$       د)  $\pi(\frac{3}{2})$

**السؤال الثاني:**

ما قيمة ما يأتي:

أ) جا - ٢٤٠°      ب) جتا -  $\frac{\pi 7}{4}$       ج) ظا ٣٣٠°      د) جا ٤٠٥° ؟

**السؤال الثالث:**

أبين خطأ كل من العبارات الآتية:

أ) جتا (س + ص) = جتا س + جتا ص

ب) جا ٢س = ٢ جاس

ج) ظا  $\frac{2}{3}$  س =  $\frac{\text{ظا } 2\text{س}}{3}$

**السؤال الرابع:**

أرسم منحنى كل من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = ٣جا  $(\frac{2}{3})$  س

ب) هـ(س) = ٢ - جتا (س)

ج) ل(س) = ظاس - ١

د) ك(س) = جتا (س) -  $(\frac{\pi}{4})$

## نموذج اختبار ذاتي

السؤال الأول: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:  
 (١) أي من الأزواج الآتية زوايا لها ضلع الانتهاء نفسه؟

أ)  $(70^\circ, -290^\circ)$  ب)  $(150^\circ, 210^\circ)$  ج)  $(100^\circ, 610^\circ)$  د)  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(٢) المثلث الذهبي هو مثلث متساوي الساقين فيه نسبة طول أحد الساقين إلى طول القاعدة يساوي:

أ)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  ب)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  ج)  $\frac{\sqrt{5}+1}{3}$  د)  $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$

(٣) زاوية قياسها  $\frac{\pi}{5}$  قيمة قياسها بالدرجات يساوي:

أ)  $144^\circ$  ب)  $135^\circ$  ج)  $72^\circ$  د)  $108^\circ$

(٤) ضلع انتهاء الزاوية  $(-60^\circ)$  يقع في الربع:

أ) الأول. ب) الثاني. ج) الثالث. د) الرابع.

(٥) زاوية الإسناد للزاوية  $220^\circ$  يساوي:

أ)  $80^\circ$  ب)  $40^\circ$  ج)  $60^\circ$  د)  $140^\circ$

(٦) جتاس =

أ) جتاس +  $\frac{\pi}{2}$  ب) جتاس +  $(\frac{\pi}{2} + س)$  ج) جتاس -  $(\frac{\pi}{2} - س)$  د) جتاس -  $\frac{\pi}{2}$

السؤال الثاني:

1) إذا كانت هـ في الوضع القياسي، ومر ضلع الانتهاء لها بالنقطة  $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$  أجب عن الأسئلة الآتية:

- أ) في أي ربع تقع الزاوية هـ؟ وما قياسها؟  
ب) اكتب النسب المثلثية الأساسية للزاوية هـ .

السؤال الثالث:

- 1) جد مجموعة حل المعادلة الآتية علماً بأن:  $0 \leq s < \pi$   
2)  $\sin^2 s - \cos^2 s = 1$   
أثبت صحة المتطابقات الآتية:  
 $(1 - \cos^2 s) = \sin^2 s$   
3) مثل على خط الأعداد:  $1 + \sqrt{2}$

السؤال الرابع:

- جد القيمة الصغرى، والقيمة العظمى، والدورة، والسعة للإقتران  $v = \sin(3s - \frac{\pi}{4})$