١١

بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفرع الأدبي والشرعي

الفترة الرابعة

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

فاكس 2983250-2-970+ | هاتف 2983280-2-970+

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

يتوقع من الطلبة بعد دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف النهايات والاتصال في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إِلى مفهوم نهاية الاقتران عند نقطة.
٢. إِيجاد نهاية الاقتران عند نقطة باستخدام الجدول والرسم البياني.
٣. إِيجاد نهاية الاقتران عند نقطة باستخدام قوانين النهايات.
٤. إِيجاد نهاية اقتران متعدد القاعدة عند نقطة.
٥. البحث في اتصال اقتران عند نقطة.

٤ - ١ نهاية الاقتران Limit of a Function

تعريف: نهاية الاقتران ق(س) عند نقطة:

يكون للاقتران ق(س) نهاية تساوي ل عندما تقترب قيم س من العدد أ ، إِذا وفقط إِذا كان للاقتران ق(س) نهاية من اليمين تساوي ل ونهاية من اليسار تساوي ل عند س = أ ، وتُكتب بالرّموز: $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ل ↔ $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ل

مثال ١ : ليكن ق(س) = س + ٣ ، س ∋ ح ماذا يحدث للاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ٣ (من اليمين ومن اليسار)؟

ق(٣,١) = ٣,١ + ٣ = ٦,١ .

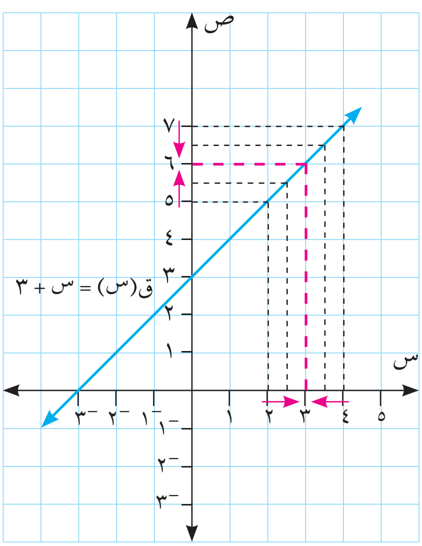
ق(٢,٩٩) = ٢,٩٩ + ٣ = ٥,٩٩ .

نكوِّن الجدول الآتي:

س	...	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	← ...	٣	→ ...	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩	...
ق(س)	...	٦,١	٦,٠١	٦,٠٠١	←	٦	→	٥,٩٩٩	٥,٩٩	٥,٩	...

اقتراب قيم س من اليمين من العدد ٣ يقابله اقتراب قيم ق(س) المقابلة لها من العدد ٦ .

اقتراب قيم س من اليسار من العدد ٣ يقابله اقتراب قيم ق(س) المقابلة لها من العدد ٦ .



مثال ٢ : يمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) = س + ٣ من الشكل أَجِدْ النهايات الآتية.

١ $\underset{\text{س}\leftarrow ٣^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) =٦ .

٢ $\underset{\text{س}\leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) =٦ .

٣ $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) =٦ .

٤ ق(٣) =٦ .

نشاط ١: إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}$ ، س ≠ ٢ ، أَجِدْ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢}$ ق(س)، باستخدام الجدول.

$$\text{ق(س)} = \frac{(\text{س} - ٣)\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{(\text{س} - ٢)}} \text{ ، س} \neq ٢$$

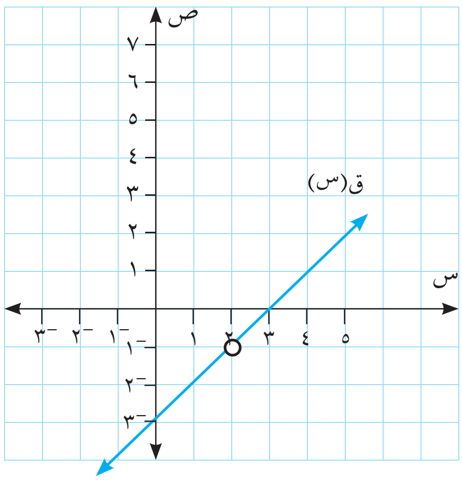
ق(س) = س − ٣

س	...	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	← ...	٢	→ ...	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩	...
ق(س)	...	−٠,٩	−٠,٩٩	−٠,٩٩٩	←	....	→	−١,٠٠١	−١,٠١	−١,١	...

- $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}$ ق(س) = −١ . لماذا؟
- $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}$ ق(س) = ______________ .
- $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢}$ ق(س) = −١ . لماذا؟

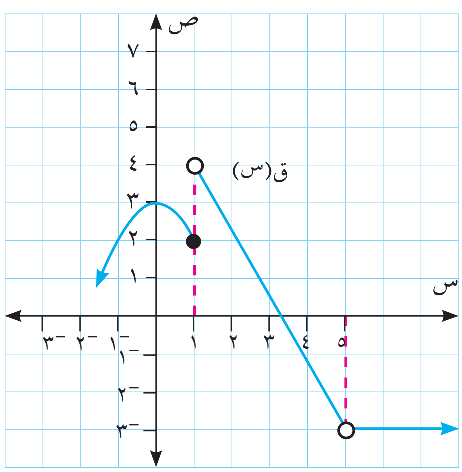
أُلاحظ من الشكل المجاور أن ق(٢) غير معرفة.

من الشكل أُوضِّحُ كيفية إيجاد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢}$ ق(س).



نشاط ٢: أَتأَمّلُ الشكل المجاور المرسوم ثم أَجِدُ ما يأتي:

- ق(٠) = ٣
- $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠}$ ق(س) = ______________ .
- ق(١) = ______________ .
- $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١}$ ق(س) غير موجودة، لماذا ؟
- ق(٥) = ______________ .
- $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٥}$ ق(س) = ______________ .



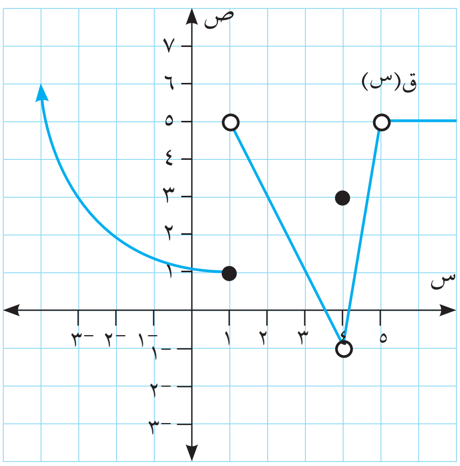
تمارين ومسائل ٤-١:

١ باستخدام طريقة الجدول أَجِدْ:

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٣} \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}{\text{س} - ٣} \text{، س} \neq ٣$$

٢ إِذا كان الشكل المجاور يُمثّل منحنى الاقتران ق(س).

من الرسم أجدْ ما يأتي:



أ ق($^{-}$٣)

ب $\lim_{\text{س} \leftarrow {}^{-}٣}$ ق(س)

ج ق(١)

د $\lim_{\text{س} \leftarrow ١}$ ق(س)

هـ ق(٤)

و $\lim_{\text{س} \leftarrow ٤}$ ق(س)

ز ق(٥)

ح $\lim_{\text{س} \leftarrow ٥}$ ق(س)

٤ - ٢ قوانين النهايات Limits Rules

أتعلم: قانون (١): إِذا كان أ ، جـ $\in$ ح ، وكان ق(س) = جـ ، لكل س $\in$ ح

فإِن: $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = جـ

قانون (٢): إِذا كان أ $\in$ ح ، وكان ق(س) = سⁿ

فإِن: $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ق(أ) = $أ^{ن}$

وبشكل عام إِذا كان ق(س) اقتران كثير حدود فإِن: $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ق(أ)

مثال ١ : ليكن *ق(س) = س، س $\in$ ح ، هـ(س) = $\sqrt{٢}$

١ ق(٠) = ٠

٢ هـ($^-$٢) = $\sqrt{٢}$

٣ ق(٥) = ٥

٤ هـ(٥) = $\sqrt{٢}$

٥ $\underset{س \leftarrow {}^-٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $^-$٢

٦ $\underset{س \leftarrow {}^-٢}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = $\sqrt{٢}$

أتعلم: إِذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ل ، $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = ك، وكان جـ عدداً حقيقياً فإِن:

قانون (٣): $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ جـ ق(س) = جـ × ل

قانون (٤): $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ (ق(س) ± هـ(س)) = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) ± $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = ل ± ك

مثال ٢ : إِذا كان ق(س) = $^-$٥، $\underset{س \leftarrow {}^-٣}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = ١٢ . أَجدُ قيمة كل من النهايات الآتية:

١ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٢ $\underset{س \leftarrow {}^-٣}{\text{نهــا}}$ ٥ ق(س)

٣ $\underset{س \leftarrow {}^-٣}{\text{نهــا}}$ (ق(س) + هـ(س))

٤ $\underset{س \leftarrow {}^-٣}{\text{نهــا}}$ (هـ(س) - ق(س))

* يُسمي الاقتران الذي قاعدته = ق(س) = س، س $\in$ ح. بالاقتران المحايد.

الحل :

١) $\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نهـا}}$ ق(س) = -٥ .   لماذا؟

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow -3}{\text{نهـا}}$ ٥ ق(س) = ٥ $\underset{\text{س} \leftarrow -3}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٥ × -٥ = -٢٥

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow -3}{\text{نهـا}}$ (ق(س) + هـ(س)) = $\underset{\text{س} \leftarrow -3}{\text{نهـا}}$ ق(س) + $\underset{\text{س} \leftarrow -3}{\text{نهـا}}$ هـ(س)

= -٥ + ١٢ = ٧

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow -3}{\text{نهـا}}$ (هـ(س) − ق(س)) = $\underset{\text{س} \leftarrow -3}{\text{نهـا}}$ هـ(س) − $\underset{\text{س} \leftarrow -3}{\text{نهـا}}$ ق(س)

= ١٢ − (-٥) = ١٧

مثال ٣ : أَجِدُ قيمة كل مما يأتي:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{2}}{\text{نهـا}}$ (٨س − ١١)

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow -1}{\text{نهـا}}$ ٤(٥ + ٧س)

الحل :

١) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{2}}{\text{نهـا}}$ (٨س − ١١) = ٨ $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{2}}{\text{نهـا}}$ س − $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{2}}{\text{نهـا}}$ ١١

= ٨ × $\frac{١}{٢}$ − ١١ = -٧

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow -1}{\text{نهـا}}$ ٤(٥ + ٧س) = ٤ × $\underset{\text{س} \leftarrow -1}{\text{نهـا}}$ (٥ + ٧س)

= ٤ × ($\underset{\text{س} \leftarrow -1}{\text{نهـا}}$ ٥ + ٧ $\underset{\text{س} \leftarrow -1}{\text{نهـا}}$ س)

= ٤ × (٥ + ٧ × -١) = -٨

مثال ٤ : إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ٩(٣س − ٤) = ١٨، أَجِدُ قيمة أ.

الحل : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ٩(٣س − ٤) = ٩ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ (٣س − ٤) = ١٨

= (٣أ − ٤) = $\frac{١٨}{٩}$ = ٢

٣أ = ٢ + ٤

أ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

أتعلم: إِذا كانت $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}$ ق(س) = ل ، $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}$ هـ(س) = ك، فإن:

قانون (٥): $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}$ (ق(س) × هـ(س)) = $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}$ ق(س) × $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}$ هـ(س) = ل × ك

قانون (٦): $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \dfrac{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}}{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\,\text{هـ(س)}} = \dfrac{\text{ل}}{\text{ك}}$ ، هـ(س) ≠ ٠ ، ك ≠ ٠

مثال ٥ : أَجدُ $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{١}}{\text{نها}}$ (٢س^{٣} − ٥س + ٧)

الحل :

$\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{١}}{\text{نها}}$ (٢س^{٣} − ٥س + ٧) = ٢ $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{١}}{\text{نها}}$ س^{٣} − ٥ $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{١}}{\text{نها}}$ س + $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{١}}{\text{نها}}$ ٧

= ٢ $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{١}}{\text{نها}}$ (س × س × س) − ٥ $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{١}}{\text{نها}}$ س + $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{١}}{\text{نها}}$ ٧

= ٢ ($\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{١}}{\text{نها}}$ س × $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{١}}{\text{نها}}$ س × $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{١}}{\text{نها}}$ س) − ٥ $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{١}}{\text{نها}}$ س + $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{١}}{\text{نها}}$ ٧

= ٢ × (${}^{-}$١ × ${}^{-}$١ × ${}^{-}$١) − ٥ × ${}^{-}$١ + ٧

= ١٠

نشاط ١ : إِذا كان ق(س) = ٧س^{٢} + ٢، هـ(س) = ١٠ − ٢س ، فإِن :

١) $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{٢}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٧ × (${}^{-}$٢)^{٢} + ٢ = ٣٠

٢) $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{٢}}{\text{نها}}$ (س^{٢} ق(س) + ٥) = $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{٢}}{\text{نها}}$ س^{٢} × $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{٢}}{\text{نها}}$ ق(س) + $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{٢}}{\text{نها}}$ ٥

= ٤ × ٣٠ + ٥ = ________

٣) $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{٢}}{\text{نها}}$ هـ(س) = ١٠ − ٢ × ${}^{-}$٢ = ١٤

٤) $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{٢}}{\text{نها}}$ (٤ ق(س) − ١٠ هـ(س)) = ________

٥) $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{٢}}{\text{نها}}$ (ق(س) × $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{٢}}{\text{نها}}$ هـ(س)) = ٣٠ × ١٤ = ٤٢٠

٦) $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س ق(س)}}{\text{٢ هـ(س)}}$ = ________

٧) $\underset{\text{س}\to{}^{-}\text{٢}}{\text{نها}}$ هـ^{٢}(س) = ________

مثال ٦ : إِذا كانت *م(س) = $\frac{\text{س}^٢ + ١٠}{\text{س} + ٦}$ ، أَجد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣^-}$ م(س) ، س $\neq ٦^-$

الحل : $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣^-}$ م(س) = $\frac{\text{س}^٢ + ١٠}{\text{س} + ٦}$

بالتعويض المباشر: $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣^-} \frac{\text{س}^٢ + ١٠}{\text{س} + ٦} = \frac{(٣^-)^٢ + ١٠}{٣^- + ٦} = \frac{٩ + ١٠}{٣}$

$= ٦\frac{١}{٣}$

مثال ٧ : أَجد قيمة $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٤} \frac{٢\text{س} - ٨}{\text{س} + ٥}$ ، س $\neq ٥^-$.

الحل : $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٤} \frac{٢\text{س} - ٨}{\text{س} + ٥} = \frac{٢(٤) - ٨}{٤ + ٥} = \frac{٠}{٩} = ٠$

أتعلم: إِذا كان ناتج التعويض المباشر في الاقتران النسبي مساوياً لـِ $\frac{٠}{٠}$ فإِن هذه الصورة تُسمى صورة غير معينة، أَي لا تعطي نتيجة محددة، وللتخلص من هذه الصورة نُعيد كتابة الاقتران بصورة مكافئة بطرق عديدة إِحداها استخدام التحليل إِلى العوامل.

مثال ٨ : أَجد قيمة $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{٤ - \text{س}^٢}{٢ - \text{س}}$ ، س $\neq ٢$.

الحل : عند التعويض المباشر نحصل على : $\frac{٤ - ٤}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$ وهي صورة غير معينة، وللتخلص من هذه الصورة نعيد كتابة الاقتران بصورة مكافئة باستخدام التحليل إِلى العوامل.

$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{٤ - \text{س}^٢}{٢ - \text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{(\text{س} + ٢)\cancel{(٢ - \text{س})}}{\cancel{(٢ - \text{س})}}$

$= ٢ + ٢ = ٤$

* الاقتران النسبي هو اقتران يمكن كتابته على الصورة م(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، ق(س) ، هـ(س) كثيرا حدود، هـ(س) $\neq ٠$

نشاط ٢: أَجِدُ قيمة $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٢٧}{(\text{س} + ٣)}$

عند التعويض المباشر نحصل على ________ .

$$\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٢٧}{(\text{س} + ٣)} = \underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س} + ٣)}\,(\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٩)}{\cancel{(\text{س} + ٣)}}$$

$\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٩) =$ ________ .

تمارين ومسائل ٤-٢:

١ إذا كان $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = -٢$ ، $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} ٣\text{هـ}(\text{س}) = ٩$. أَجِدْ قيمة النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} ٢(\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}))$

ب $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} (\text{ق}^{٢}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}))$

جـ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\ \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}^{٢}(\text{س})}$

د $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} (٤\text{ق}(\text{س}) + \text{س}^{٢} - ٣)$

٢ أَجِدْ قيمة النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س} \to ٨}{\text{نهـا}} (٢\text{س} - ١١)$

ب $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} (-٢\text{س}^{٣} - ٨\text{س} + ٧)$

جـ $\underset{\text{س} \to ٦}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣٦} - \dfrac{٦}{\text{س}^{٢} - ٣٦}\right)$ ، $\text{س} \neq \pm ٦$

د $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ١٢}{\text{س}^{٢} - ٩}$ ، $\text{س} \neq \pm ٣$

هـ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س} - ١}$ ، $\text{س} \neq ١$

و $\underset{\text{س} \to \sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س} - \sqrt{٢}}$ ، $\text{س} \neq \sqrt{٢}$

٣ إذا كان $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} (\text{أ}\,\text{س}^{٢} - ٣٦) = ٠$ ، فما قيمة أ ؟

مهمة تعليمية (١)

إذا كانت: $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{ن}(\text{س}) = \text{ل}$ ، $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{هـ}(\text{س}) = \text{ك}$ ،

وكان $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} (\text{هـ}(\text{س}) - \text{ن}(\text{س})) = ١$ ، $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} (\text{ن}^{٢}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})) = ١٣$ ،

أجد: $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} (٥\text{هـ}(\text{س}) + \text{س})$.

٣ – ٤ نهاية اقتران متعدد القاعدة Limit of Multi-Base Function

أتعلم: إِذا كان ق(س) اقتران يُغير قاعدته عند س = أ . نبحث $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) و $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

فإِذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) ، فإِن نهاية الاقتران موجودة عند س = أ .

مثال ١ : إِذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{٣س + ٥ ، س} \geq \text{٤} \\ \text{س}^{\text{٢}} \text{ − ١ ، س} < \text{٤} \end{cases}$

- يقع العدد ٢ ضمن مجال القاعدة الثانية.
- فتكون $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٢}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٢}}{\text{نهـا}}$ (س$^{\text{٢}}$ − ١) = ٢$^{\text{٢}}$ − ١ = ٣
- $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ⁻١.
- يقع العدد ١٠ ضمن مجال القاعدة الأُولى. فتكون $\underset{\text{س} \leftarrow \text{١٠}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣٥
- $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٧}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٢٦.
- يقع العدد ٤ على الحد الفاصل بين مجالي القاعدتين.
- $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٤}^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١٧
- $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٤}^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١٥
- $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٤}}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة. لماذا؟

أتعلم: إِذا كان ق(س) اقتران يُغير قاعدته عند س = أ . نبحث $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) و $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

فإِذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) ، فإِن نهاية الاقتران موجودة عند س = أ .

مثال ٢ : إِذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{٣} & ، \quad س = ٠ \\ ٣س^٢ - ٢س & ، \quad س \neq ٠ \end{cases}$ ، فإِن:

- $\lim_{س \to -١}$ ق(س) = ٥
- $\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = ٠
- $\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = ٠
- $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = ٠
- ق(٠) = $\sqrt{٣}$
- $\lim_{س \to \sqrt{٣}}$ ق(س) = ٩ − ٢$\sqrt{٣}$

تمارين ومسائل ٤-٣:

١ إِذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س - ١ & ، \quad س \neq ١ \\ ١ & ، \quad س = ١ \end{cases}$ ، أَجِدْ ما يأتي:

أ ق(١)

ب $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

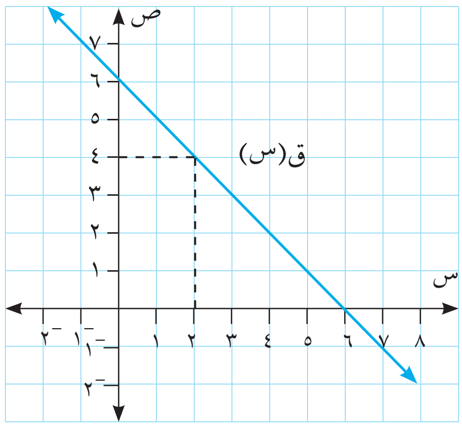
٢ إِذا كان ق(س) = $\begin{cases} -س^٢ & ، \quad س \leq ٠ \\ س - ٢ & ، \quad س > ٠ \end{cases}$ ، أَجِدْ $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) إن وُجدت.

مهمة تعليمية (٢)

إذا كان: ر(س) = $\begin{cases} ٥س^٢ - أ س & ، \quad س \geq ١ \\ ٢ أ س + ب & ، \quad س < ١ \end{cases}$

وكانت: $\lim_{س \to ١}$ ر(س) = ٣، أجد قيمتيّ الثابتين أ ، ب.

نشاط ١: أَتأَمّلُ الأشكال المرسومة للاقترانات ق(س)، هـ(س)، ل (س)، ك (س).

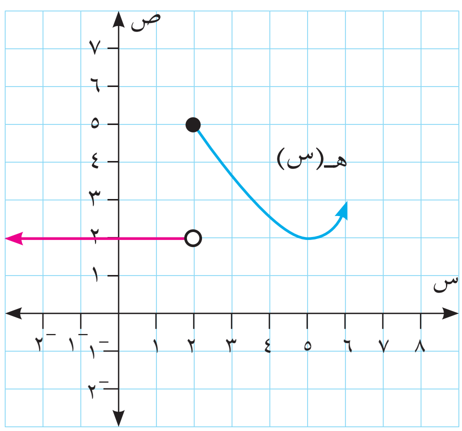


١ في الشكل المجاور:

ق(٢) = ٤

نهـــا ق(س) = ٤
س ← ٢

ق(٢) = نهـــا ق(س) = ٤
س ← ٢

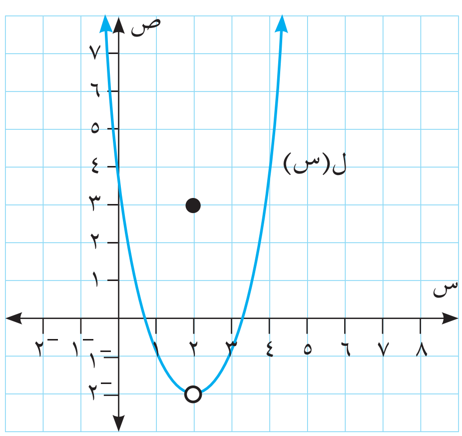


٢ في الشكل المجاور:

هـ(٢) = ________________ .

نهـــا هـ(س) = ____________ .
س ← ٢

أُقارنُ بين نهـــا هـ(س) وقيمة هـ(٢) .
س ← ٢



٣ في الشكل المجاور:

ل(٢) = ________________ .

نهـــا ل(س) = ____________ .
س ← ٢

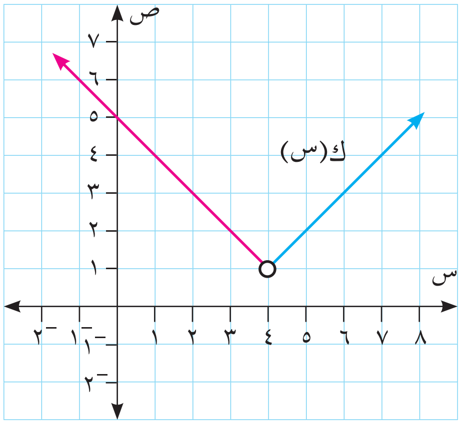
أُقارنُ بين نهـــا ل(س) وقيمة ل(٢) .
س ← ٢

٤ في الشكل المجاور:

ك(٤) = ______________ .

$\lim_{س \leftarrow ٤}$ ك(س) = ______________ .

أُقارنُ بين $\lim_{س \leftarrow ٤}$ ك(س) وقيمة ك(٤) .



تعريف: يكون الاقتران ق(س) متصلاً عندما س = أ ، إذا تحققت الشروط الآتية:

١ **ق(س) معرفة عند س = أ.**

٢ **$\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) موجودة.**

٣ **$\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ق(أ).**

مثال ١ : أَبحثُ في اتصال الاقترانات الآتية عند قيم س المشار إِليها في كل حالة من الحالات الآتية:

١ ق(س) = ١١ ، عند س = ٩

٢ هـ(س) = س^{٣} + ٢س + ١ ، عند س = ⁻١

الحل :

١ ق(٩) = ١١

$\lim_{س \leftarrow ٩}$ ق(س) = ١١

ق(٩) = $\lim_{س \leftarrow ٩}$ ق(س) = ١١

إِذن ق(س) متصل عند س = ٩

٢ هـ(⁻١) = (⁻١)^{٣} + ٢(⁻١) + ١ = ⁻٢

$\lim_{س \leftarrow ⁻١}$ هـ(س) = (⁻١)^{٣} + ٢(⁻١) + ١ = ⁻٢

هـ(⁻١) = $\lim_{س \leftarrow ⁻١}$ هـ(س) = ⁻٢

إِذن هـ(س) متصل عند س = ⁻١

أتعلم: الاقترانات كثيرة الحدود متصلة في مجالها.

أتعلم: إِذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = أ فإِن:

١ (ق ± هـ)(س) يكون متصلاً عند س = أ.

٢ (ق × هـ)(س) يكون متصلاً عند س = أ.

٣ $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$(س) يكون متصلاً عند س = أ، حيث هـ (أ) ≠ ٠

مثال ٢ : إِذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س - ٢ & ، س \geq ٠ \\ -٢ & ، س < ٠ \end{cases}$ ، أَبحثُ في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٠

الحل : ق(٠) = ٢ × ٠ − ٢ = −٢

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = −٢

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = −٢

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = −٢

$\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = −٢

ق(٠) = $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = −٢

إِذن ق(س) متصل عند س = ٠

مثال ٣ : إِذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س & ، س \neq ١ \\ ٤ & ، س = ١ \end{cases}$ ، أَبحثُ في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١ .

الحل : ق(١) = ٤

$\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = ٣

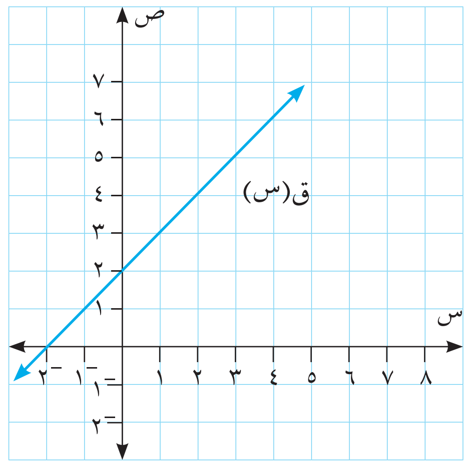
$\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = ٣

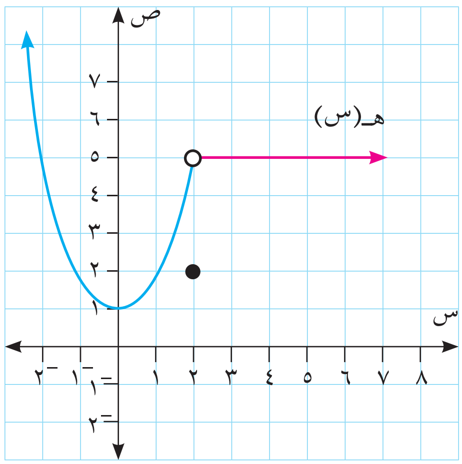
إِذن $\lim_{س \to ١}$ ق(س) ≠ ق(١)

إِذن ق(س) غير متصل عند س = ١

تمارين ومسائل ٤-٤:

١ أتأمّل الاقترانين ق(س)، هـ(س) المرسومين في الشكلين الآتيين ثم أُجب عن الآتي:





أ أَبحثُ في اتصال الاقتران ق(س) عند س = صفر .

ب أَبحثُ في اتصال الاقتران هـ(س) عند س = ٢ .

٢ أَبحثُ في اتصال الاقترانات الآتية عند قيم س المشار إِليها في كل حالة:

أ ق(س) = ٣ س − ٦ عند س = ١

ب ق(س) = (س − ٣) (س + ٣) عند س = ٣

٣ إِذا كان ق(س) = { ٣ − س ، س < ١ ؛ س^{٢} + ١ ، س ≥ ١ } أَبحثُ في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١ .

مهمة تعليمية (٣)

إذا كان: ع(س) + هـ(س) = ٣ ع(س)، وكان : نهـا$_{س \leftarrow ٧}$ ٢ع(س) = ٦، وكان:

ع(س) و هـ(س) اقترانين متصلين عند س = ٧ ، أجد هـ(٧) .

تمارين عامة:

١ اختر رمز الإِجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow ^-٢}{\text{نهـا}} (٥\text{س}^٣ + ٣\text{س}^٢ - ٦)$ ؟

أ) ٣٤ ب) $^-$٣٤ جـ) ٤٣ د) $^-$٤٣

٢ إِذا كان $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ ٤ هـ(س) = ٨. ما قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ ٢ق(س) + $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ هـ^٢(س)؟

أ) ٧٠ ب) ١١ جـ) ٦ د) ١٠

٣ إِذا كان ق(س) = أ س^٢ + س − ٢ وكان $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١٠ ما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٩ ب) $^-$٩ جـ) $^-$١١ د) ١١

٤ ما قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٣}$ ؟

أ) $^-$١ ب) ١ جـ) صفر د) ٢

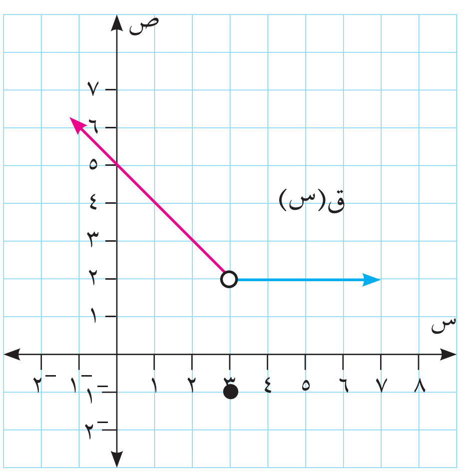
٥ في الشكل المجاور ما قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) ؟

أ) ٢

ب) غير موجودة

جـ) صفر

د) ٣



٦ إِذا كان $\lim\limits_{س \leftarrow أ} (٣ س - ٥) = ١$ ما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٣ ب) -٣ جـ) ٢ د) -٢

٧ إِذا كان $ق(س) = \frac{٢س^٢ - ٥}{٦س^٤ + س + ٣}$. ما قيمة $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} ق(س)$؟

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{-٥}{٣}$ جـ) صفر د) $\frac{-٣}{١٠}$

٨ إِذا كان $\lim\limits_{س \leftarrow ١} ق(س) + ١ = ١١$ ، ما قيمة $\lim\limits_{س \leftarrow ١} (٣س ق(س) - ٣٣)$ ؟

أ) -٣ ب) ٠ جـ) -٣٠ د) ١٠

٢ إِذا كان $\lim\limits_{س \leftarrow -١} ق(س) = \lim\limits_{س \leftarrow -١} هـ(س)$ ، $هـ(س) = س^٢ + ٣س$، أَجِدْ ما يأتي:

أ $٢ \lim\limits_{س \leftarrow -١} ق(س) + \lim\limits_{س \leftarrow -١} هـ(س)$

ب $\lim\limits_{س \leftarrow -١} \frac{ق(س)}{هـ^٢(س) + ٦س}$

٣ أَجِدْ النهايات الآتية:

أ $\lim\limits_{س \leftarrow -٤} ٤س^٢ + ٣س - ٥$

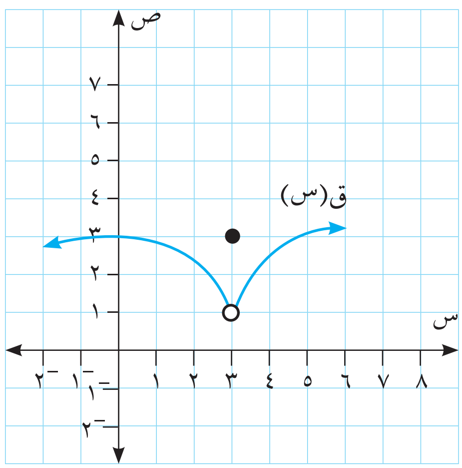
ب $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{٣س^٢ - ٢س - ٣}{س^٢ + ٧س + ١٢}$

جـ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$

د $\lim\limits_{س \leftarrow ٢٥} \frac{\sqrt{س} - ٥}{س - ٢٥}$

٤ إِذا كان $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\text{أ س}^{٢} - ٨}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ٢} = ١٠$ ، فما قيمة/ قيم الثابت أ .

٥ أتأمّل الشكل المجاور ثم أَجِدْ ما يأتي:



أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

جـ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س)

د ق(٣)

هـ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س)

و ق(٠)

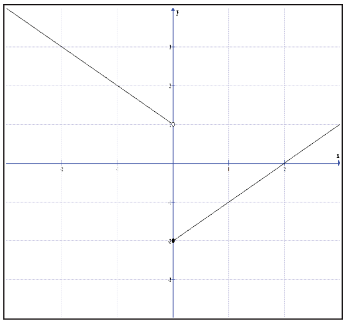
٦ أَبحثُ اتصال الاقتران ق(س) = $\begin{cases} ٧ - \text{س} & \text{، س} < ٢ \\ \text{س}^{٣} - ٣ & \text{، س} \geq ٢ \end{cases}$ ، عند س = ٢

أقيّم ذاتي أعبر بلغتي عن المفاهيم الاكثر متعة والمفاهيم التي واجهت بها صعوبات في هذه الوحدة بما لا يزيد عن أربعة أسطر.

نموذج اختبار نهاية الفترة الرابعة

السؤال الأول: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

١ – اعتماداً على الشكل المجاور، ما قيمة: $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س)؟



أ) – ٢ ب) – ١

جـ) ١ د) غير موجودة.

٢ – ما قيمة $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ (س^{٢} – ٢س +٣)

أ) ٦ ب) ٥ جـ) ٠ د) –٢

٣ – إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أس}^{٢} - ٤\text{أ}}{\text{س} - ٢}$ = ٦ ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ) – ١٥ ب) ١٥ جـ) ٠ د) $\dfrac{٢}{٣}$

٤ – إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (٣ق(س) + ٥س) = ٢٢ ، فما قيمة: $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق^{٢}(س) ؟

أ) ٤ ب) ٢ جـ) ١٦ د) $\dfrac{١}{١٦}$

٥ – ما قيمة الثابت أ التي تجعل $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة، حيث: ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{أ} ، & \text{س} \geq ١ \\ ٥\text{س} ، & \text{س} < ١ \end{cases}$ ؟

أ) ٤ ب) –٤ جـ) ١ د) –١

السؤال الثاني:

أحسبُ النهايات الآتية :

أ- $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^{٣} - ١٦}{\text{س} + ٢}$ ، $\text{س} \neq -٢$

ب- $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}} - \dfrac{٣}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}} \right)$ ، $\text{س} \neq ٠ ، ٣$

السؤال الثالث:

إِذا كان $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = -٣$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)} = ٢$. أَجدُ قيمة كل من النهايات الآتية:

أ- $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢}\ \text{ق(س)} - ٥\ \text{هـ(س)})$

ب- $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٧ + \text{ق}^{٢}\text{(س)} - \text{هـ(س)}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}} \right)$ ، $\text{س} \neq ٠ ، ٣$

السؤال الرابع:

أ) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ \text{ ، } & \text{س} \leq ٢ \\ ٣\text{س} - ١ \text{ ، } & \text{س} > ٢ \end{cases}$ ، أبحثُ في اتصال الاقتران: ق(س) عند س =٢.

ب) اذا كانت: $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٨ + \text{أس} \text{ ، } & \text{س} \neq ٢ \\ \text{أ}^{٢} \text{ ، } & \text{س} = ٢ \end{cases}$ ، أجد قيمة الثابت أ إذا كان الاقتران متصلاً عند س = ٢.