١١

بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفروع: الريادي والفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

الفترة الرابعة

الطبعة الثالثة
٢٠٢٠ م/ ١٤٤١ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 - رام الله - فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
https://www.facebook.com/Palestinian.MOEHE/
هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

المحتويات

حل معادلة خطية بمتغير واحد ٣
نهاية الاقتران ٦
قوانين النهايات ٩
نهاية الاقتران متعدد القاعدة ١٣
الاتصال ١٥
الفائدة ١٩
تمارين عامة ٢٣

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف النهايات والاتصال في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. حلّ معادلة خطيّة بمتغير واحد
٢. التعرف إلى مفهوم نهاية الاقتران عند نقطة.
٢. إيجاد نهاية الاقتران عند نقطة، باستخدام الجدول والرسم البياني.
٣. استخدام نهاية اقتران متعدد القاعدة عند نقطة.
٤. بحث اتصال اقتران عند نقطة.
٥. التعرف إلى الفائدة، وحسابها.

١ - ٤ حلّ معادلة خطيّة بمتغير واحد
Solving a Linear Equation With One Variable

نشاط ١:

المسجد الإبراهيميّ من أَهم المعالم التَّاريخيَّة والدّينيّة في فلسطين. ارتبطت باسمه إِحدى مجازر الاحتلال الصهيوني حيث راح ضحيتها ١٨٠ مُصلياً ما بين شهيد وجريح.

أَجِدُ عدد شهداء وجرحى المجزرة إِذا علمت أَن عدد الجرحى يساوى خمسة أَمثال عدد الشهداء.

أفرض أَن عدد شهداء المجزرة س شهيد.

إِذن عدد جرحى المجزرة بدلالة س = _____.

عدد شهداءالمجزرة وجرحاها بدلالة س يكون ٦ س. لماذا؟

عدد شهداء المجزرة = _____.

عدد جرحى المجزرة = _____.

نشاط ٢:

يزيد ثمن صندوق عنب قباطية عن ثمن صندوق عنب غزة بمقدار دينارين، وثمن ثلاثة صناديق من عنب غزة يساوي ١٨ ديناراً، أَجدُ ثمن الصندوق الواحد لكل منهما.

إِذا كان ثمن صندوق عنب غزة = س دينار.

أُكمل الجدول الآتي:

	الثّمن بدلالة س	الثّمن بالدّينار
ثمن صندوق عنب غزة	س	
ثمن ٣ صناديق عنب غزة		١٨
ثمن صندوق عنب قباطية		

تعريف: المعادلة الخطيّة بمتغير واحد: هي معادلة يمكن كتابتها على الصورة

أ س + ب = صفر ، حيث أَن أ ، ب ∋ ح ، أ ≠ صفر.

نشاط ٣: أُكملُ الجدول الآتي:

المعادلة	نوع المعادلة	حل المعادلة الخطيّة بمتغير واحد
أ) ٧س – ١١ = ٣	خطيّة بمتغير واحد	بإضافة النظير الجمعي للعدد $^{-}$١١ لطرفي المعادلة ينتج: ٧س = ١٤ بضرب الطرفين بالنظير الضربي للعدد ٧ ينتج: س = ٢
ب) $\frac{٥}{س}$ – ٧ = ٠	غير خطيّة. لماذا؟	
جـ) ٣س + ٥ = $^{-}$٤		
د) $\frac{س}{٣}$ – ٤ = $^{-}$٢		
هـ) س + ٥ص = ١٠		

نشاط ٤: إذا علمتَ أَن قاعدة مبنى المسجد القبلي الواقع جنوبي المسجد الأَقصى، مستطيلة الشكل، ويزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٥ متراً، فإذا كان محيطها = ٢٧٠ متراً، فما بُعْديّ القاعدة؟

أفرض أَن طول القاعدة = س متر.

عرض القاعدة بدلالة س = _____.

بما أَن محيط القاعدة = ٢٧٠ متراً.

٢((س – ٢٥) + س) = ٢٧٠، لماذا؟

إذن طول القاعدة: س = ٨٠ متراً. عرض القاعدة: _____.

أفرض أَن الزمن اللازم حتى تلتقي السيارتان = ن ساعة.

المسافة التي قطعتها السيارة الأُولى بدلالة ن = _____.

المسافة التي قطعتها السيارة الثانية بدلالة ن = _____.

إِذن ٧٠ ن + ٨٠ ن = ٤٥٠. لماذا؟

ن = _____.

تلتقي السيارتان في تمام الساعة _____.

بُعْد السيارة عن مكان انطلاقها من مدينة أُمّ الرشراش = ٢١٠ كم.

بُعْد السيارة عن مكان انطلاقها من مدينة طبريا = _____.

تمارين ومسائل ٤ - ١:

١ أُميّز المعادلة الخطية بمتغير واحد مما يأَتي:

أ) س + ٣ = ص

ب) س - ١ = ٤س

جـ) س^{٢} - ١ = صفر

د) ص = ٤س

هـ) س ص = ٩

و) س = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٣}$

٢ أحِلّ المعادلات الآتية:

أ) ٢س - ٣ = ٩

ب) ٧(س - ٣) = ٢٨

جـ) س - ٤ = ٢س - ٦

د) ٣(س - ٥) = ٤ - (س + ٣)

٢-٤ نهاية الاقتران (Limit of a Function)

نشاط (١)

يستخدم الطلبة عادة الأنابيب المخبرية في تجاربهم العلمية، ولهذه الأنابيب أحجام وأنواع مختلفة، حسب طبيعة الاستخدام، فإذا استخدم إبراهيم أنبوباً مخبرياً سعته ٨ مللتر، وتدرج بوضع سائل فيه مسجلاً حجم السائل والحجم الفارغ في كل لحظة، وكانت القراءات كما في الجدول الآتي:

حجم السائل س	...	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	← ...	٣	→ ...	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩	...
حجم الفراغ ص	...	٤,٩	٤,٩٩	٤,٩٩٩	← ...	٥	→ ...	٥,٠٠١	٥,٠١	٥,١	...

وبفرض أن حجم السائل س وحجم الفراغ ص فإن العلاقة بين س ، ص تكون ص = ٨ − س

يقابل ٣,٠١ مللتر من حجم السائل ٤,٩٩ مللتر من الحجم الفارغ.

يقابل ٣,٠٠١ مللتر من حجم السائل ..... مللتر من الحجم الفارغ.

يقابل ..... مللتر من حجم السائل ٥,٠١ مللتر من الحجم الفارغ.

اقتراب حجم الماء (س) من اليمين من العدد ٣ يقابله اقتراب حجم المنطقة الفارغة (ص) من اليمين من العدد ٥.

اقتراب حجم الماء من اليسار من العدد ٣ يقابله اقتراب حجم المنطقة الفارغة من اليسار من العدد .....

أقارن بين حجم المنطقة الفارغة من اليسار، وحجمها من اليمين عندما يقترب حجم السائل من العدد ٣.

نشاط (٢)

ليكن ق(س) = س + ١ ، س ∈ ح، فإنه عندما تقترب س من العدد ٤ من اليمين فإن ق(س) يقترب من ٥.

عندما تقترب س من العدد ٤ من اليسار فإن ق(س) يقترب .....

تعريف:

نهاية الاقتران ق(س) عند نقطة:

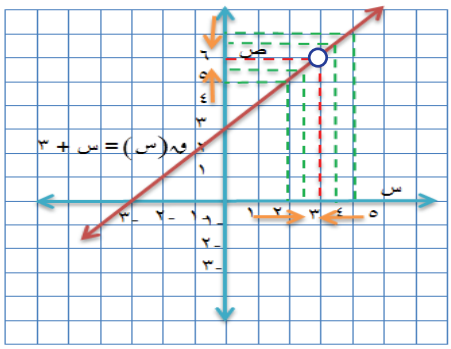
- كلما اقتربت قيم س من اليمين من العدد (أ) اقتربت قيم ق(س) المقابلة لها من عدد حقيقي معين (ل) ويعبر عن ذلك بالصورة $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) = ل.

- كلما اقتربت قيم س من اليسار من العدد (أ) اقتربت قيم ق(س) المقابلة لها من عدد حقيقي معين (ل) يعبر عن ذلك بالصورة $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) = ل.

- إذا كان $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) = ل فإن $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة ويكون $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل

نشاط (٣)

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^2 - ٩}{س - ٣}$ ، س ≠ ٣



$\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ٦ ، $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ٦

$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ...

ق (٣) = ...

أناقش:

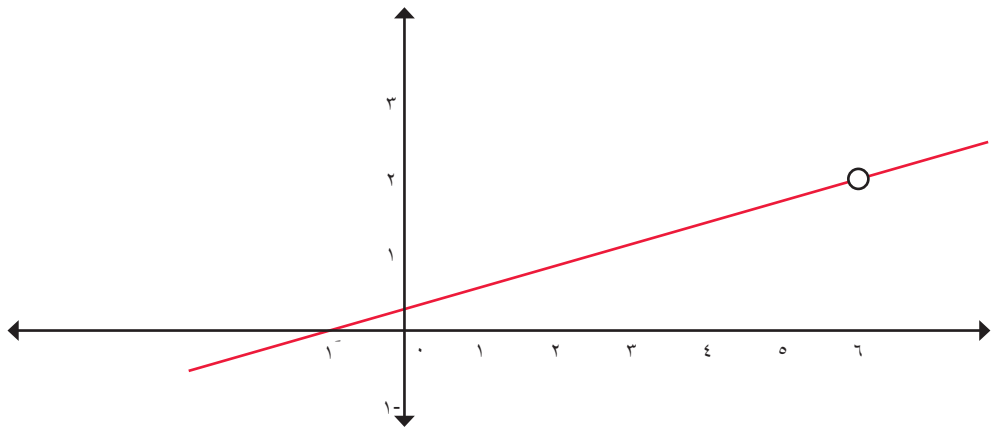
هل توجد علاقة بين وجود النهاية ووجود صورة الاقتران؟

نشاط (٤)

إذا كان ق (س) = $\frac{س^2 - ٥س - ٦}{س - ٦}$ ، س ≠ ٦ فإن

ق (س) = $\frac{(س - ٦)(س + ١)}{(س - ٦)}$ ، س ≠ ٦

ق (س) = (س + ١) ، س ≠ ٦



أكمل الجدول الآتي:

س	...	٦,١	٦,٠١	...	...	٦	...	٥,٩٩٩	...	...	...
ق (س)	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

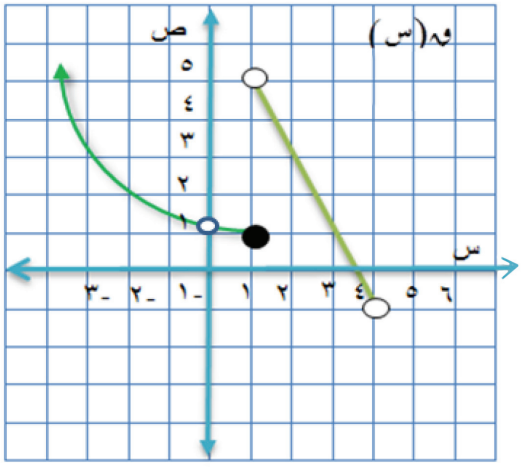
$\lim_{س \to ٦^-}$ ق (س) = ...

$\lim_{س \to ٦^+}$ ق (س) = ...

$\lim_{س \to ٦}$ ق (س) = ...

نشاط (٥)

الشكل المجاور:



١) ق(١) = ١

٢) $\lim_{س \to ١^-}$ ق (س) = ١

٣) $\lim_{س \to ١^+}$ ق (س) = ...

٤) $\lim_{س \to ١}$ ق (س) = ...

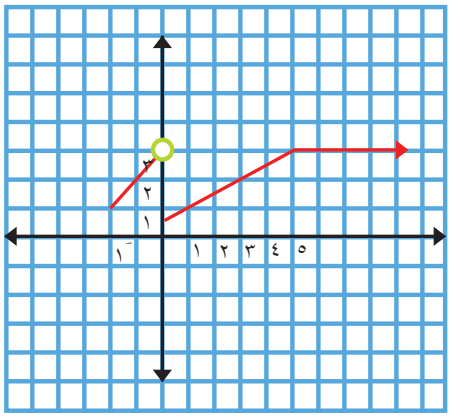
٥) $\lim_{س \to ٠}$ ق (س) = ...

تمارين ومسائل (٤-٢)

١ أجد النهايات الآتية باستخدام الجدول :

أ) $\lim_{س \to ٥}$ $\frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥}$ س ≠ ٥ ب) $\lim_{س \to ١}$ (س – ٢)

٢ أعتمد الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) لإيجاد.



أ) $\lim_{س \to ٥}$ ق (س) ب) $\lim_{س \to ٠^-}$ ق (س)

جـ) $\lim_{س \to ٠^+}$ ق (س) د) $\lim_{س \to ٠}$ ق (س)

٣-٤ قوانين النهايات (Limits Rules)

قاعدة (١)

إذا كان $\text{ن}(س) = جـ$ فإن $\lim_{س \to أ} \text{ن}(س) = جـ$ حيث $أ$ ، $جـ \in ح$

قاعدة (٢)

إذا كانت $\lim_{س \to أ} \text{ن}(س) = ل$ ، $\lim_{س \to أ} هـ(س) = ك$ وكان $جـ$ عدداً حقيقياً فإن:

١. $\lim_{س \to أ} (\text{ن}(س) \pm هـ(س)) = \lim_{س \to أ} \text{ن}(س) \pm \lim_{س \to أ} هـ(س) = ل \pm ك$

٢. $\lim_{س \to أ} جـ\text{ن}(س) = جـ \times ل$

٣. $\lim_{س \to أ} (\text{ن}(س) \times هـ(س)) = \lim_{س \to أ} \text{ن}(س) \times \lim_{س \to أ} هـ(س) = ل \times ك$

٤. $\lim_{س \to أ} \frac{\text{ن}(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} \text{ن}(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)} = \frac{ل}{ك}$ ، $هـ(أ) \neq ٠$ ، $ك \neq ٠$

نشاط (٢)

إذا كان $\lim_{س \to ٣} ن(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = -٣$

١. $\lim_{س \to ٣} (ن(س) + هـ(س)) = \lim_{س \to ٣} ن(س) + \lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٤ + -٣ = ١$

٢. $\lim_{س \to ٣} (٢ن(س) - ٣هـ(س)) = ٢ \lim_{س \to ٣} ن(س) - ٣ \lim_{س \to ٣} هـ(س) =$ .....

٣. $\lim_{س \to ٣} (ن(س) \times ٢هـ(س)) = \lim_{س \to ٣} ن(س) \times ٢ \lim_{س \to ٣} هـ(س) =$ .....

٤. $\lim_{س \to ٣} \frac{ن(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to ٣} ن(س)}{\lim_{س \to ٣} هـ(س)} =$ .....

٥. $\lim_{س \to ٣} ن^{٢}(س) = \lim_{س \to ٣} ن(س) \times \lim_{س \to ٣} ن(س) =$ .....

أتذكر:

اقتران كثير الحدود هو اقتران يكون على الصورة:

$ن(س) = ا_{ن} س^{ن} + ا_{ن-١} س^{ن-١} + ا_{ن-٢} س^{ن-٢} + ... + ا_{١} س^{١} + ا_{٠}$ حيث $ن \in ط$ ، $ا_{٠}$ ، $ا_{١}$ ، ..... $ا_{ن}$ أعداد حقيقية

قاعدة (٣)

إذا كان $ن(س)$ كثير حدود فإن $\lim_{س \to ا} ن(س) = ن(ا)$

مثال (١): إذا كان $ن(س) = ٣س^{٢} + ٢$ أجد $\lim_{س \to ٢} ن(س)$

بما أن $ن(س)$ كثير حدود فإن $\lim_{س \to ٢} ن(س) = ن(٢) = ٣(٢)^{٢} + ٢ = ١٤$

أتذكر:

الاقتران النسبي هو اقتران يمكن كتابته على الصورة $م(س) = \frac{ن(س)}{هـ(س)}$

حيث $ن(س)$، $هـ(س)$ كثيرا حدود، $هـ(س) \neq$ صفر

لإيجاد نهاية الاقتران النسبي م(س) ألجأ إلى التعويض المباشر:

١. إذا كان التعويض المباشر يعطي $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد غير الصفر}}$ فإن $\lim_{س \to أ} م(س) = \frac{ب(أ)}{هـ(أ)}$ ، $هـ(أ) \neq ٠$

٢. إذا كان التعويض المباشر يعطي $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ فإن هذه الكمية غير معرفة.

٣. إذا كان التعويض المباشر يعطي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فإن هذه الكمية غير معينة. وعندها ألجأ إلى التحليل ثم الاختصار ثم التعويض.

نشاط (٣)

إذا كان $ب(س) = \frac{س^٢ - ٢٥}{س^٢ - ٥س}$ ، $س \neq ٥$ فإن

أ) $\lim_{س \to ٢} ب(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٢٥}{س^٢ - ٥س}$ ، $س \neq ٥$ بالتعويض المباشر

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٤ - ٢٥}{١٠ - ٤} =$ .....

ب) $\lim_{س \to ٥} ب(س) = \lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{س^٢ - ٥س}$ ، $س \neq ٥$

التعويض المباشر يساوي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهي كمية غير معينة، لذا ألجأ للتحليل، ثم الاختصار، ثم التعويض.

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(س + ٥)}{س(س - ٥)}$ ، $س \neq ٥$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س + ٥)}{س}$ ، $س \neq ٥$ لماذا؟

= .....

نشاط (٤)

أجد $\lim_{س \to ٢} \frac{٤ - س^٢}{س - ٢}$ ، $س \neq ٢$

عند التعويض المباشر أحصل على: $\frac{٤ - ٤}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$

وهي صورة غير معينة، $\lim_{س \to ٢} \frac{٤ - س^٢}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{(س - ٢)} =$ .....

تمارين ومسائل (٤-٣)

١ إذا كان $\lim_{س \to ٢} ق(س) = -٢$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٣$. أجد النهايات الآتية:

أ- $\lim_{س \to ٢} (٢ق^{٢}(س) - هـ(س))$

ب- $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{٥ق(س)}{هـ^{٢}(س) + س} \right)$

ج- $\lim_{س \to ٢} (٤ق(س) + س^{٢} - ٣)$

٢ أجد النهايات الآتية:

أ- $\lim_{س \to ٤} \frac{٣س^{٢} - ١٢س}{س^{٢} - ١٦}$ ، $س \neq \pm ٤$

ب- $\lim_{س \to ٥} \left(\frac{س^{٢}}{س^{٢} - ٢٥} - \frac{٥س}{س^{٢} - ٢٥} \right)$، $س \neq \pm ٥$

د- $\lim_{س \to \sqrt{٥}} \frac{س^{٢} - ٥}{س - \sqrt{٥}}$ ، $س \neq \sqrt{٥}$

٣ إذا كان $ق(س) = \frac{س^{٢} - ٢س}{س^{٢} - ٥س + ٦}$، $س \neq ٣، ٢$. أجد $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

٤-٤ نهاية الاقتران متعدد القاعدة (Limits of Multibase Function)

نشاط (١)

لتقديم خدمة أفضل للمواطنين، تسعى البلديات إلى تشجيع المواطنين على تسديد المستحقات المترتبة عليهم، فإذا قدمت إحدى البلديات عرضا يقضي بخصم ربع المستحقات في حالة دفع مبلغ مئة دينار أو أكثر، وخصم مبلغ ثابت قدره ٢٥ ديناراً في حالة دفع مبلغ بين ٨٠ و ١٠٠ دينار .

يمكن تمثيل العرض بالعلاقة الآتية حيث س تمثل المبلغ المستحق:

$$ق(س) = \begin{cases} ٢٥ \ ، \ ٨٠ < س < ١٠٠ \\ \frac{١}{٤} س \ ، \ س \geq ١٠٠ \end{cases}$$

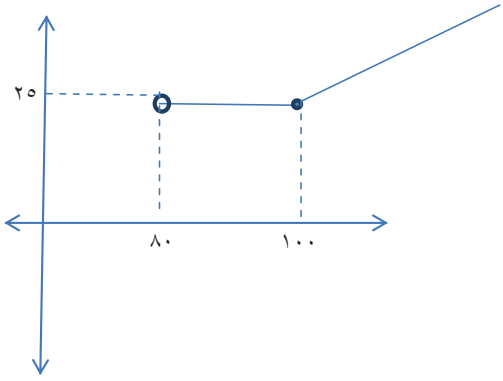
قيمة الخصومات لشخص دفع مبلغ ٨٥ ديناراً ، هو ٢٥ ديناراً.

قيمة الخصم لشخص دفع مبلغ ١٢٠ ديناراً، هو .....

قيمة الخصم لشخص دفع مبلغ ٢٠٠ دينار، هو .....

هل قيمة الخصم تساوي ٢٥ ديناراً، عندما يقترب مبلغ المستحقات من ١٠٠ دينار.

إذا مثلت علاقة الخصم بالشكل المجاور



فإن $\lim_{س \to ١٠٠^+} ق(س)$ = ...

$\lim_{س \to ١٠٠^-} ق(س)$ = ...

$\lim_{س \to ١٠٠} ق(س)$ = ...

نشاط (٢)

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ \ ، \ س < ٢ \\ س^٢ + ١ \ ، \ س \geq ٢ \end{cases}$

١. $\lim_{س \to ٤} ق(س) = \lim_{س \to ٤} (٢س+١) = ٩$

٢. $\lim_{س \to ١} ق(س) = \lim_{س \to ١} (س^٢ + ١)$ = ...

٣. $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢} (٢س + ١)$ = ...

٤. $\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢} (س^٢ + ١)$ = ...

٥. $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ = ...

قاعدة:

إذا كان $ق(س)$ اقتران متعدد القاعدة و يُغير من قاعدته عند $س = أ$. وكان $\lim_{س \to أ^+} ق(س) = \lim_{س \to أ^-} ق(س) = ل$ فإن $\lim_{س \to أ} ق(س)$ موجودة وتساوي ل.

نشاط (٣)

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٥س + ٤}{س - ٤} & ، س \neq ٤ \\ -١ & ، س = ٤ \end{cases}$ فإن

$\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٥س + ٤}{س - ٤}$ (لماذا؟) = ...

$\lim_{س \to ٤^-} ق(س)$ = ... ، $\lim_{س \to ٤} ق(س)$ = ...

$ق(٤)$ = ...

تمارين ومسائل (٤-٤)

١ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢ & ، س \leq ٠ \\ س - ٢ & ، س > ٠ \end{cases}$

أجد $\lim_{س \to ١} ق(س)$ ، $\lim_{س \to ٠} ق(س)$ إن وُجدت.

٢ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{٤ - س}{س - ٤} & ، س < ٤ \\ أس^٢ - ٩ & ، س \geq ٤ \end{cases}$ ، أجد قيمة أ إذا علمت أن $\lim_{س \to ٤} ق(س)$ موجودة.

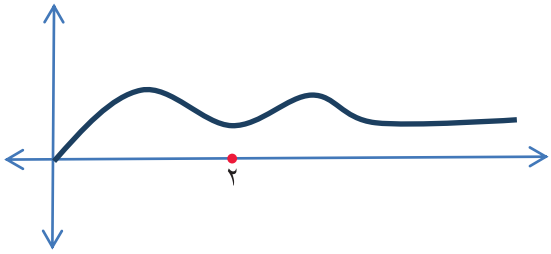
٥-٤ الاتصال (Continuity)

نشاط (١)

لدعم صمود أهلنا في مدينة القدس وإنعاش اقتصادهم، قررت مدرسة عسقلان الثانوية للبنات تنظيم رحلة مدرسية إلى مدينة القدس. وأثناء السفر في الحافلة لاحظت سلمى عدّاد السرعة في الحافلة، فكانت السرعة تتغير صعوداً ونزولاً فتارةً تصل السرعة إلى ٩٠كم/ساعة، وتارةً أخرى تنزل إلى ٥٠كم/ساعة.

تساءلت سلمى: هل السرعة تنتقل مباشرة من ٥٠ كم/ ساعة إلى ٩٠ كم/ ساعة، أم تنتقل لتمر بالسرعات الواقعة بين ٥٠ و ٩٠؟

أجابتها معلمة الفيزياء بـِ .....



إذا كانت الحافلة تسير حسب العلاقة الممثلة بالشكل، هل يمكن تمثيل هذه العلاقة دون رفع القلم؟

مثل هذه العلاقة تكون متصلة؛ لأنها ترسم دون رفع القلم.

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ... ، $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ...

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ... ، ق(٢) = ...

العلاقة بين $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) و ق(٢) = ...

تعريف: الاتصال عند نقطة:

يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = أ إذا تحققت الشروط الآتية:

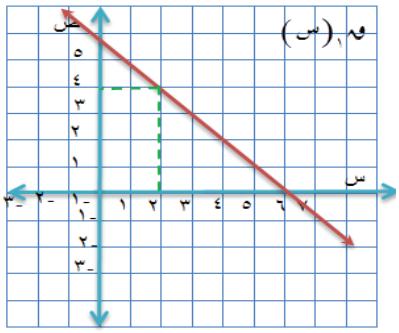
١. ق(أ) موجودة ومعرفة كعدد حقيقي.

٢. $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة.

٣. $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

نشاط (٢)

في الشكل المجاور:



ق (٢) = ٤

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٤ .

ق (٢) = $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٤ .

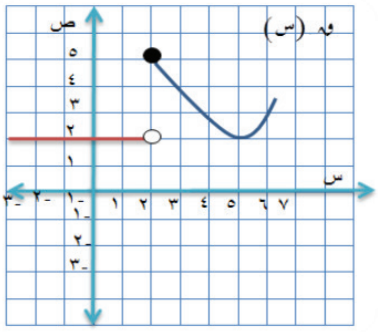
ألاحظ أن الشكل يمثل الاقتران كثير الحدود ص = ٦ – س وهو متصل دائماً.

قاعدة:

الاقترانات كثيرة الحدود متصلة في مجالها.

نشاط (٣)

في الشكل المجاور:



ق(٢) = ... ، $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ...

لأن .....

هل ق(س) متصلاً عند س = ٢ .

مثال (١): إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٤ & ، س = ١ \end{cases}$

أبحث اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١ .

الحل:

ق(١) = ٤ ، $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٢

$\lim_{س \to ١}$ ق(س) ≠ ق(١) ومنها ق(س) غير متصل عند س = ١ .

مثال (٢): إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س^{٢} - ٢ ، س > ٠ \\ س - ٢ ، س \leq ٠ \end{cases}$

أبحث اتصال الاقتران ق(س) عند س = صفر.

الحل:

أبحث شروط الاتصال عند س = صفر لأن الاقتران ق(س) يغير قاعدته عندها.

ق(٠) = ٠ − ٢ = -٢

$\lim_{س \to ٠^{+}}$ ق(س) = -٢ لماذا؟

$\lim_{س \to ٠^{-}}$ ق(س) = -٢ لماذا؟

$\lim_{س \to ٠^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^{-}}$ ق(س) = -٢ لماذا؟

ومنها $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = -٢

ق(٠) = $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = -٢

- ق(س) متصل عند س = -٢

نشاط (٤)

إذا كان ق(س) = ٣س + ١، هـ (س) = س^{٢}.

يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = ٢ لأنه اقتران كثير حدود.

يكون الاقتران هـ(س) متصلاً عند س = ٢ لأن .....

(ق + هـ)(س) متصل عند س = ٢ لأن مجموع اقتراني كثيري حدود يساوي اقتران كثير حدود.

(ق − هـ)(س) متصل عند س = ٢ لأن .....

(ق × هـ)(س) متصل عند س = ٢ لأن .....

أناقش:

هل $\frac{ق}{هـ}$ متصل عند س = ٢، حيث هـ (س) ≠ ٠ ؟

قاعدة:

إذا كان ق (س)، هـ (س) اقترانين متصلين عند س = أ فإن:

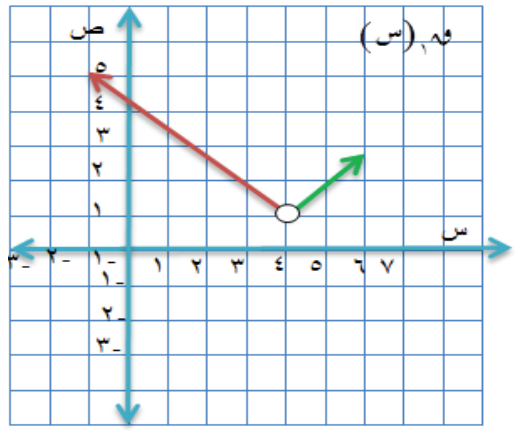
١. ($\text{ق} \pm \text{هـ}$) (س) يكون متصلاً عند س = أ.

٢. ($\text{ق} \times \text{هـ}$) (س) يكون متصلاً عند س = أ.

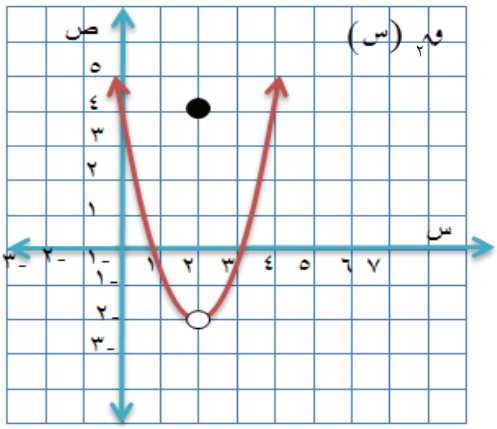
٣. $\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}$ (س) يكون متصلاً عند س = أ حيث هـ (أ) ≠ صفر

تمارين ومسائل (٤-٥)

(١) أبيّن سبب عدم اتصال الاقترانات الآتية، عند النقطة المذكورة إزاء كل منها:



عند س = ٤



عند س = ٢

(٢) أبحث اتصال الاقترانات الآتية، عند قيم س المشار لها في كل حالة:

أ- ق(س) = ٣س − ٦ . عند س = ١

ب- ق(س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} \neq ٢ \\ ٧ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣ - \text{س} & ، \text{س} > ١ \\ \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} \leq ١ \end{cases}$ أبحث اتصال الاقتران ق(س) ، عند س = ١

٦-٤ الفائدة (Interest)

نشاط (١)

مرح طالبة في الصف الثامن الأساسي في مدرسة فاطمة الزهراء، ربحت مرح مبلغاً من المال؛ لحصولها على المركز الأول في مسابقةٍ على مستوى مدارس فلسطين. قررت مرح استثمار المبلغ إلى أن تدخل الجامعة، وبذلك تسهم في تأمين دراستها الجامعية.

- أناقش مع زملائي، كيف يمكن لمرح استثمار مبلغ الجائزة؟

.....

- إذا ادخرت مرح مبلغ ١٠٠ دينار في أحد البنوك بفائدة سنوية ٧٪ فإن المبلغ في نهاية السنة الأولى، سيصبح .....

تعريف:

الفائدة: العائد الذي نحصل عليه نتيجة استثمار مبلغ من المال لفترة زمنية محددة وفقاً لمعدل معين. وهي نوعان: الفائدة البسيطة، والفائدة المركبة.

أولاً: الفائدة البسيطة

نشاط (٢)

قامت شركة فلسطينية للاتصالات باستثمار مبلغ ٨٠٠٠٠٠ دينار في أحد المشاريع لمدة ٣ سنوات بمعدل فائدة بسيطة ٦٪ .

- مبلغ الفائدة في السنة الأولى = ٨٠٠٠٠٠ × ٠,٠٦ = ٤٨٠٠٠ دينار.
- مبلغ الفائدة في السنة الثانية = ...
- مبلغ الفائدة في السنة الثالثة = ...
- إجمالي الفائدة = ...

تسمى الفائدة في هذه الحالة بالفائدة البسيطة.

تعريف:

الفائدة البسيطة: هي فائدة تُحسب على أصل مبلغ الاستثمار. هذه الفائدة تظل ثابتةً طوال مدة الاستثمار، بفرض ثبات قيمة المبلغ المستثمر طوال فترة الاستثمار. ويمكن حسابها باستخدام القاعدة: مبلغ الفائدة البسيطة = مبلغ الاستثمار × معدل الفائدة × المدة الزمنية... (١)

مثال (١):

أودعت وداد مبلغاً من المال في أحد البنوك الفلسطينية، بفائدة سنويّة بسيطة ٥,٥٪ لمدة ١٢ سنة، إذا كان مبلغ الفائدة الذي حصلت عليه وداد في نهاية المدة ١١٨٨٠ ديناراً، أحسب المبلغ المودع؟

الحل:

باستخدام العلاقة (١) يكون مبلغ الفائدة البسيطة = المبلغ الأصلي × نسبة الفائدة × المدة الزمنية.

١١٨٨٠ = المبلغ الأصلي × ٥,٥٪ × ١٢

١١٨٨٠ = المبلغ الأصلي × ٠,٦٦ (بالقسمة على ٠,٦٦)

١١٨٨٠ ÷ ٠,٦٦ = المبلغ الأصلي

١٨٠٠٠ دينار = المبلغ الأصلي (المبلغ المودع).

ثانياً: الفائدة المركبة

نشاط (٣)

أرادت رهام أن تستثمر مبلغاً من المال في أحد البنوك بفائدةٍ معينةٍ، على أن تضيف مبلغ الفائدة على المبلغ المودع في كل عام؛ حتى تحصل على ربحٍ أكبر.

- إذا أودعت ١٠٠ دينار بفائدة سنوية ٨٪ ، تحصل على مبلغ فائدة..... في نهاية العام الأول.
- إذا أبقت رهام مبلغ الفائدة في البنك يصبح المبلغ المودَع .....
- في العام الثاني ستتقاضى رهام فائدةً على المبلغ الجديد هي .....

تسمى الفائدة بهذه الطريقة الفائدة المركبة.

تعريف:

الفائدة المركبة: هي فائدة تُحسب على أصل المبلغ، مُضافاً إليه قيمة فائدة الفترة السابقة؛ وبالتالي فإن قيمة الفائدة تتغير في كل فترة من فترات الاستثمار. ويمكن حسابها باستخدام العلاقة:

الفائدة المركبة = المبلغ × ((١ + معدل الفائدة)$^{\text{المدة}}$ − ١) ..... (٢)

و بالرموز ف = م × ((١ + ع)$^{\text{ن}}$ − ١)

نشاط (٤)

قامت شركة فلسطينية للاتصالات باستثمار مبلغ ٨٠٠٠٠٠ دينار في أحد المشاريع لمدة ٣سنوات، بمعدل فائدة مركبة ٦٪. أحسب إجمالي الفائدة التي ستحصل عليها الشركة من هذا الاستثمار.

فائدة الاستثمار = مبلغ الاستثمار معدل الفائدة × ١

(ألاحظ أن الفائدة السنوية تعني أن الفترة الزمنية هي ١)

فائدة الاستثمار للعام الأول = ٨٠٠٠٠٠ × ٦٪ = ٤٨٠٠٠ دينار.

و هي تساوي أيضاً ٨٠٠٠٠٠ [(١ + ٠,٠٦)^{١} − ١ (أتحقق)

فائدة الاستثمار للعام الثاني = (٨٠٠٠٠٠ + ٤٨٠٠٠) × ٦٪ = ٥٠٨٨٠ ديناراً

و هي تساوي أيضاً ٨٠٠٠٠٠ [(١ + ٠,٠٦)^{٢} − ١ (أتحقق)

- فائدة الاستثمار للعام الثالث = ...

و هي تساوي أيضاً .....

- إجمالي الفائدة المركبة = ...

و يمكننا حساب إجمالي الفائدة المركبة خلال فترة الاستثمار باستخدام العلاقة (٢)

فائدة الاستثمار = ٨٠٠٠٠٠ × ((١+ ٠,٠٦)^{٣} − ١)

فائدة الاستثمار = ١٥٢٨١٢,٨٠ ديناراً.

أناقش:

إذا كنت سأستثمر مبلغاً من المال لفترة زمنية محددة، هل سأستثمره بفائدة بسيطة أم مركبة؟

ملاحظات عند حساب الفائدة البسيطة، أو المركبة:

١. معدل الفائدة قد يكون سنويّاً، أو نصف سنويّ، أو ربع سنويّ، وقد يكون شهريّاً، وقد يكون أقل من ذلك (بالأيام، بالساعات، .....).

٢. في بعض الحالات، يتم ذكر معدل الفائدة ١٢٪ ولا يتم ذكر هل هذه الفائدة سنوية/ نصف سنوية؟ حينها نعمل على أساس أن المعدل سنويّ.

مثال (٢): قامت جمعية للزيت في فلسطين باستثمار مبلغ (٥٠٠٠٠٠) دينار لمدة ٣ شهور، بمعدل سنويّ بسيط ٨٪. فما الفائدة التي تحصل عليها الجمعية؟

الحل:

الفائدة = ٥٠٠٠٠٠ × ٨٪ × (٣ ÷ ١٢ تحويل فترة الاستثمار إلى سنوات) = ١٠٠٠٠ دينار.

تمارين و مسائل (٤-٦)

١ قامت جمعية الأسرة السعيدة باستثمار مبلغ ٤٠٠٠٠ دينار لمدة عامين، بمعدل نصف سنوي بسيط ٤٪. فما الفائدة التي تحصل عليها هذه الجمعية؟

٢ إذا كانت الفائدة التي ربحتها شركة للمواد الغذائية في مدينة الخليل ٢٥٠٠٠ دينار في ٦سنوات، بمعدل فائدة بسيطة ٥٪، فما مبلغ الاستثمار؟

٣ أقارن بين الفائدة البسيطة والفائدة المركبة، التي يحصل عليها شخص استثمر ١٠٠٠٠ دولار لمدة ٤ سنوات، بمعدل فائدة ٨٪.

٤-٧ تمارين عامة

١ أختار رمز الإجابة الصحية فيما يأتي:

١) ما قيمة $\lim_{س \to ٢} (س^٣ + ٢س^٢ + ٦)$؟

أ) -٦ ب) -٥ جـ) ٥ د) ٦

٢) إذا كان $\lim_{س \to ٥} ٣د(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٢$. ما قيمة $\lim_{س \to ٥} ٢د(س) + \lim_{س \to ٥} هـ^٢(س)$؟

أ) ٣ ب) ٥ جـ) ٦ د) ٨

٣) إذا أستثمر مبلغ قدره ٨٢٠ دينار بمعدل فائدة سنوية ٥٪ ، فإن الفائدة البسيطة بعد ٦ سنوات تساوي

أ) ٢٤٢ ب) ٢٤٩ جـ) ٢٤١ د) ٢٤٦

٤) ما قيمة $\lim_{س \to ٦} \frac{س - ٦}{س^٢ - ٥س - ٦}$ ؟

أ) $-\frac{١}{٦}$ ب) $-\frac{١}{٧}$ جـ) $-\frac{١}{٨}$ د) غير موجودة

٥) إذا كان $\lim_{س \to ا} (س^٢ - ٣س) = -٢$ ما قيمة الثابت ا ؟

أ) ١، ٢ ب) -١، -٢ جـ) -١ د) ٢، -١

٦) أودعت رماح مبلغ ١٠٠٠٠ دينار في بنك بفائدة بسيطة ٨٪. ما جملة ما ستقبضه رماح بعد سنتين؟

أ) ١٦٠٠ دينار ب) ١١٦٠٠ دينار جـ) ١٠٦٠٠ دينار د) ١٨٠٠٠ دينار

٢ أجد النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{٢س}{س^٢ - ٤} - \frac{س^٢}{س^٢ - ٤} \right)$

ب) $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{س^٢ - ٧س}$

ج) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$

ورقة عمل

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من البدائل المدرجة:

١- $\lim_{س \to 0^+}$ س × |س| = ...

أ) صفر　　ب) ١　　ج) -١　　د) غير موجودة

٢- $\lim_{س \to 0^-}$ س × |س| = ...

أ) صفر　　ب) ١　　ج) -١　　د) غير موجودة

٣- إذا كانت $\lim_{س \to ٢}$ ن(س) = -٣، فإن $\lim_{س \to ٢}$ (ن(س) − س + ١) = ...

أ) -٥　　ب) -٦　　ج) -٤　　د) ٤

٤- إذا كان $\lim_{س \to ٣}$ ٥ن(س) = ٥، $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = ٤ ، فإن $\lim_{س \to ٣}$ (هـ(س) − ن(س) + س) = ...

أ) صفر　　ب) ٤　　ج) ٣　　د) ٦

٥- $\lim_{س \to ٦}$ ($\frac{١}{٣}$ س + ٣) = ...

أ) ٣　　ب) ٥　　ج) ٦　　د) $\frac{١}{٣}$

٦- إذا كانت $\lim_{س \to ٠}$ (ن(س) − ٥) = ٣، فإن $\lim_{س \to ٠}$ ٢ن(س) = ...

أ) ١٦　　ب) -٤　　ج) ٤　　د) غير موجودة

٧- $\lim_{س \to -٢}$ $\frac{٢س + ٤}{س^٢ - س - ٦}$ = ...

أ) -٤　　ب) $\frac{٢}{٥}$　　ج) -$\frac{٢}{٥}$　　د) صفر

٨- $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س - ٣}{س^٢ + س - ١٢}$ = ...

أ) $\frac{١}{٧}$　　ب) -$\frac{١}{٧}$　　ج) ٧　　د) -٧

٩- $\lim_{س \to ١}$ $\frac{س^٣ - ١}{س - ١}$ = ...

أ) -١　　ب) ١　　ج) -٣　　د) ٣

١٠- $\lim_{س \to ١}$ $\frac{س(\frac{١}{س} - س)}{س - ١}$ = ...

أ) ٢　　ب) -٢　　ج) ١　　د) -١

١١- $\lim_{س \to .} \frac{٦س^{٤} + ١٨س^{٢}}{٢س^{٢} - ٣س^{٣}} = ...$

أ) -٦ ب) -٢ ج) ٣ د) ٩

١٢- الفائدة ..... = مبلغ الاستثمار × معدل الفائدة × المدة الزمنية:

أ) المركّبة. ب) السوقية. ج) البسيطة. د) الفعلية.

١٣- أُودِع ١٠٠٠ دينار ؛ بمعدل فائدة سنوية ١٠٪ ، فإن قيمة ما سيقبض نهاية العام = ...

أ) ٥٠ ديناراً. ب) ٧٠ ديناراً. ج) ٨٠ ديناراً. د) ١٠٠ دينار.

١٤- أودع ساهر ١٥٠٠ دينار في حساب توفير بمعدل فائدة مركّبة ٧ ٪ سنوياً ولمدة ٣ سنوات ، فإنّ قيمة الفوائد التي يحصل عليها = ...

أ) ٣٠٠ دينار. ب) ٣١٥ ديناراً. ج) ٣٤٠ ديناراً. د) ٣٣٧,٦ ديناراً.

السؤال الثاني: يريد شخص اقتراض ٢٠٠٠ دينار، على أن يسدد القرض على دفعات شهرية متساوية خلال عام من تاريخ الاقتراض، فإذا كان البنك يتقاضى فائدة مركّبة ٨٪ سنوياً. فما قيمة الدفعة الشهرية؟

السؤال الثالث: يوفر عماد ٨٠٠ دينار نهاية كل سنة ويضعها في بنك بالفائدة المركّبة ٣٪ سنوياً لمدة ٤ سنوات. ما القيمة المستقبلية لتوفيراته (جملة ما وفره خلال المدة)؟

السؤال الرابع: يوفر ماجد ١٥٠ ديناراً نهاية كل سنة، ويضعها في بنك بالفائدة المركبة ٨٪ في السنة، ويضاف بشكل سنوي لمدة ٥ سنوات. ما القيمة المستقبلية لتوفيراته (جملة ما وفره خلال المدة)؟

السؤال الخامس: يريد حمودة اقتراض مبلغ ٤٠٠٠ دينار، على أن يسدد القرض على دفعات شهرية متساوية خلال سنة من تاريخ الاقتراض، فإذا كان البنك يتقاضى فائدة مركبة ٨٪ في السنة. ما قيمة الدفعة الشهرية؟

السؤال السادس: أودعت سناء مبلغ ٥٠٠٠ دينار، بحساب الربح المركب بفائدة ٦٪ في السنة، أوجد كلاً من:

أ) مقدار الربح بعد سنتين. ب) جملة المبلغ بعد سنتين.

السؤال السابع: احسب قيمة النهايات الآتية (إن أمكن):

أ) أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٥}{١ + س}$

ب) أوجد $\lim_{س \to ٥} \frac{٢س - ١٠}{س^{٢} - ٢٥}$

السؤال الثامن: ابحث في اتصال الاقتران ق(س) =

$$\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ، \ س \neq ٣ \\ ٦ & ، \ س = ٣ \end{cases}$$ عند س = ٣

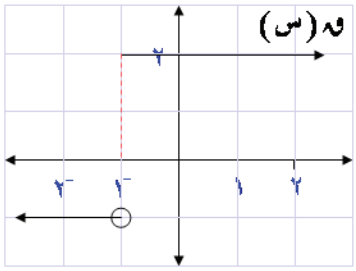
إختبار ذاتي- الفترة الرابعة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من البدائل المدرجة:

١) عند حل المعادلة ٣ س -١ = -١٦ فإن قيمة س =

أ) ٥ ب) -٥ جـ) ٣ د) -٣

٢) من الشكل المجاور، ما قيمة $\lim_{س \to -١} و(س)$ ؟



أ. ٢ ب. -١ ج. ٣ د. غير موجودة

٣) ما قيمة $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ ؟

أ. صفر ب. ٢ ج. ٤ د. غير موجودة

٤) استثمر خليل مبلغ ٥٠٠٠٠٠ دينار في شركة يافا للمجوهرات لمدة ٣ شهور بمعدل سنوي بسيط ٨٪، فما قيمة الفائدة البسيطة التي سيحصل عليها؟

أ. ١٠٠٠ ب. ٥٠٠٠ ج. ١٠٠٠٠ د. ١٠٠٠٠٠

٥) أحد الاقترانات الآتية متصل عند س = صفر ، هو .....

أ) $\frac{١ + س}{٢س}$ ب) $\frac{١ + س}{س(س + ٥)}$ ج) $\frac{١ + س}{٢س - ٤}$ د) $\frac{١}{س^{٢}(س - ١)}$

٦) إذا كان و(س) متصلاً على ح، $\lim_{س \to ٢} (٣و(س) + س) = ١٤$ ، فإن: و(٢)= .....

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) $\frac{١٣}{٣}$

٧) أُودِع مبلغ مدة ٤ سنوات بفائدة ٥ ٪ سنوياً ، فحقّق ٤٠٠ دينار ربحاً ، فإنّ مبلغ الاستثمار = ...

أ) ١٨٥٦ دينار. ب) ١٨٠٠ دينار. ج) ٢٠٠٠ دينار. د) ٢٤٠٠ دينار.

٨) أودع شخص مبلغاً وقدره ٦٠٠٠ دينار، بمعدل فائدة بسيطة قدرها ٧٪ ، فحقق ربحاً قيمته ٢١٠٠ دينار، فإنّ عدد السنوات اللازمة لهذا الربح تساوي:

أ) ٣ سنوات. ب) ٥ سنوات. ج) ٦ سنوات. د) ٨ سنوات.

٩) من مخاطر الاستثمار على الاقتصاد:

أ) المخاطر المالية. ب) المخاطر النفسية. ج) المخاطر الاجتماعية د) كل ما سبق.

السؤال الثاني: احسب قيمة النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to 0} \frac{س^٢ + ٧}{س^٢ + ٩}$

ب) $\lim_{س \to -٤} \frac{س + ٤}{١ - س}$

السؤال الثالث: أبحث في اتصال الاقتران: $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + س ، & س < ١ \\ ٢س ، & س \geq ١ \end{cases}$ عند س = ١.

السؤال الرابع: يودِعُ خالد مبلغ ١٠٠٠ دينار نهاية كل عام في حساب التوفير في أحد البنوك الفلسطينية، بفائدة ٥٪. كم تبلغ جملة توفيراته في نهاية السنة العاشرة؟

السؤال الخامس: أرادت سوسن أن تستثمر حصتها من تركة والدها والبالغة ١٠٠٠٠ دينار، لمدة خمس سنوات بمعدل فائدة ١٠٪. قارن بين الاستثمار بفائدة بسيطة أو مركّبة.

السؤال السادس: إذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٢} ٤هـ(س) = ١٢$ ، احسب قيمة كل من:

أ) $\lim_{س \to ٢} (ق(س) - ٢هـ(س))$

ب) $\lim_{س \to ٢} (ق(س) + ٦)$

ج) $\lim_{س \to ٢} (٥ق(س) + هـ(س) + س)$

د) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{(٢ق(س) - ١)}$

هـ) $\lim_{س \to ٢} (ق^٢(س) + ٢هـ(س) + \sqrt{٢س + ٥})$

----------» انتهت الأسئلة «----------

جدول الأرقام العشوائية

Line \ Col.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
1	10460	15011	01536	02011	81647	91646	69179	14194	62590	36207	20969	99570	91291	90700
2	22368	46573	25595	85393	30995	89198	27982	53402	93965	34095	52666	19174	39615	99505
3	24130	48360	22527	97265	76393	64809	15179	24830	49340	32081	30680	19655	63348	58629
4	42167	93093	06243	61680	07856	16376	39440	53537	71341	57004	00849	74917	97758	16379
5	37570	39975	81837	16656	06121	91782	60468	81305	49684	60672	14110	06927	01263	54613
6	77921	06907	11008	42751	27756	53498	18602	70659	90655	15053	21916	81825	44394	42880
7	99562	72905	56420	69994	98872	31016	71194	18738	44013	48840	63213	21069	10634	12952
8	96301	91977	05463	07972	18876	20922	94595	56869	69014	60045	18425	84903	42508	32307
9	89579	14342	63661	10281	17453	18103	57740	84378	25331	12566	58678	44947	05585	56941
10	85475	36857	53342	53988	53060	59533	38867	62300	08158	17983	16439	11458	18593	64952
11	28918	69578	88231	33276	70997	79936	56865	05859	90106	31595	01547	85590	91610	78188
12	63553	40961	48235	03427	49626	69445	18663	72695	52180	20847	12234	90511	33703	90322
13	09429	93969	52636	92737	88974	33488	36320	17617	30015	08272	8411	27156	30613	74952
14	10365	61129	87529	85689	48237	52267	67689	93394	01511	26358	85104	20285	29975	89868
15	07119	97336	71048	08178	77233	13916	47564	81056	97735	85677	29372	74461	28551	90707
16	51085	12765	51821	51259	77452	16308	60756	92144	49442	53900	70960	63990	75601	40719
17	02368	21382	62404	60268	89368	19885	55322	44819	01188	65255	64835	44919	05944	55157
18	01011	54092	33362	94904	31273	04146	18594	29852	71585	85030	51132	01915	92747	64951
19	52162	53916	46369	58586	23216	14513	83149	98736	23495	64350	94738	17752	35156	35749
20	07056	97628	33787	09998	42698	06691	76988	13602	51851	46104	88916	19509	25625	58104
21	48663	91245	85826	14346	09172	30168	90229	04734	59193	22178	30421	61666	99904	32812
22	54164	58492	00421	74103	47070	25306	76468	26384	58151	06646	21524	15227	96909	44592
23	32639	32363	05597	24200	13363	38005	94342	28728	35806	06912	17012	64161	18296	22851
24	29334	27001	87637	87308	58731	00256	45834	15398	46557	41135	10367	07684	36188	18510
25	02488	33062	28834	07351	19731	92420	60952	61280	50001	67658	32586	86679	50720	94953
26	81525	72295	04839	96423	24878	82651	66566	14778	76797	14780	13300	87074	79666	95725
27	29676	20591	68086	26432	46901	20849	89768	81536	86645	12659	92259	57102	80428	25280
28	00742	57392	39064	66432	84673	40027	32832	61362	98947	96067	64760	64584	96096	98253
29	05366	04213	25669	26422	44407	44048	37937	63904	45766	66134	75470	66520	34693	90449
30	91921	26418	64117	94305	26776	25940	39972	22209	71500	64568	91402	42416	07844	69618
31	00582	04711	87917	77341	42206	35126	74087	99547	81817	42607	43808	76655	62028	76630
32	00725	69884	62797	56170	86324	88072	76222	36086	84637	93161	76038	65855	77919	88006
33	69011	65795	95876	55293	18988	27354	26575	08625	40801	59920	29841	80150	12777	48501
34	25976	57948	29888	88604	67917	48708	18912	82271	65424	69774	33611	54262	85963	03547
35	09763	83473	73577	12908	30883	18317	28290	35797	05998	41688	34952	37888	38917	88050
36	91567	42595	27958	30134	04024	86385	29880	99730	00036	84855	29080	09250	79656	73211
37	17955	56349	90999	49127	20044	59931	06115	20542	18059	02008	73708	83517	36103	42791
38	46503	18584	18845	49618	02304	51038	20655	58727	28168	15475	56942	53389	20562	87338
39	92157	89634	94824	78171	84610	82834	09922	25417	44137	48413	25555	21246	35509	20468
40	14577	62765	35605	81263	39667	47358	56873	56307	61607	45918	89686	20103	77490	18062
41	98427	07523	00062	64270	01638	92477	66969	98420	04880	45585	46565	04102	46880	45709
42	34914	63976	88720	82765	34476	17032	87589	40836	32427	70002	70663	88863	77775	69348
43	70060	28277	39475	46473	23219	53416	94970	25832	69975	94884	19661	72828	00102	66794
44	53976	54914	06990	67245	68350	82948	11398	42878	80287	88267	47363	46634	06541	97809
45	76072	29515	40980	07391	58745	25774	00987	80059	39911	96189	41151	14222	60697	59583
46	90725	52210	83974	29992	65831	38857	50490	83765	55657	14361	31720	57375	56228	41546
47	64364	67412	33339	31926	14883	24413	59744	92351	97473	89286	35931	04110	23726	51900
48	08962	00358	31662	25388	61642	34072	81249	35648	56891	69352	48373	45578	78547	81788
49	95012	68379	93526	70765	10592	04542	76463	54328	02349	17247	28865	14777	62730	92277
50	15664	10493	20492	38391	91132	21999	59516	81652	27195	48223	46751	22923	32261	85653