

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفرع العلمي والصناعي

الفترة الثالثة

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moe.gov.ps

facebook.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWattlym

+970-2-2983250 فاكس | +970-2-2983280 هاتف

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

٣	المتغير العشوائي المنفصل، التوزيع الاحتمالي، التوقع للعلمي فقط	١ - ٣
٦	العلامة المعيارية للعلمي فقط	٢ - ٣
٨	التوزيع الطبيعي (المعتدل) للعلمي فقط	٣ - ٣
١٢	تطبيقات للعلمي فقط	٤ - ٣
١٤	المتتاليات	٥ - ٣
١٦	المتسلسلات	٦ - ٣
١٩	المتتاليات الحسابية (العديّة)	٧ - ٣
٢٢	مجموع المتسلسلة الحسابية	٨ - ٣
٢٤	المتتالية الهندسية	٩ - ٣
٢٦	المتسلسلة الهندسية المنتهية، ومجموعها	١٠ - ٣

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المنحنى الطبيعي ومفاهيم المتتاليات في الحياة العملية من خلال الآتي:

- ١ التعرف إلى اقتران المتغير العشوائي المنفصل.
- ٢ إيجاد احتمالات قيم المتغير العشوائي، وتكوين جدول التوزيع الاحتمالي، حساب التوقع.
- ٣ التعرف إلى العلامة المعيارية، وتحويل العلامة الخام إلى علامة معيارية.
- ٤ التعرف إلى التوزيع الطبيعي، والطبيعي المعياري وحساب المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري.
- ٥ استخدام منحنى التوزيع الطبيعي لحل مشكلات حياتية.
- ٦ التعرف إلى مفهوم المتتالية ومفهوم المتسلسلة .
- ٧ التعرف إلى المتتالية الحسابية والمتسلسلة الحسابية .
- ٨ التعرف إلى المتتالية الهندسية والمتسلسلة الهندسية.
- ٩ استنتاج الحد العام لكل من المتتاليتين الحسابية والهندسية.
- ١٠ إيجاد مجموع (ن) من حدود المتتاليتين الحسابية والهندسية.
- ١١ توظيف قوانين المتتاليات والمتسلسلات في مسائل حياتية.

٣ - ١ المتغير العشوائي المنفصل ، التوزيع الاحتمالي، التوقع

تعريف (المتغير العشوائي المنفصل): هو اقتران مجاله الفضاء العيني ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية القابلة للعد، ويرمز له بإحدى الحروف الهجائية ق، ك، ع، ...
التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل: إذا كان ق متغيراً عشوائياً منفصلاً مداه $\{س_١، س_٢، س_٣، ...، س_٧\}$ فإن التوزيع الاحتمالي: اقتران مجاله مجموعة قيم المتغير العشوائي، ومداه مجموعة احتمالات الحوادث المرتبطة بمجموعة قيم المتغير العشوائي. يسمى هذا الاقتران كثافة احتمالية ويرمز له بالرمز ل(س).

ويكتب التوزيع الاحتمالي على صورة مجموعة من الأزواج المرتبة: $\{(س_١، ل(س_١))، (س_٢، ل(س_٢))، ...، (س_٧، ل(س_٧))\}$ أو على صورة جدول، يسمى جدول التوزيع الاحتمالي:

س _٧	...	س _٢	س _١	س _٧
ل(س _٧)	...	ل(س _٢)	ل(س _١)	ل(س _٧)

يلعب سامر اللعبة الآتية: يرمي حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، ويلاحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة، فإذا ظهر عددان متساويان يكسب ١٠ نقاط، وإذا ظهر عددان مجموعهما ١١ يكسب ٥ نقاط وخلاف ذلك يخسر ٤ نقاط.
فإذا دلّ المتغير العشوائي ع على عدد النقاط التي يكسبها سامر:

مثال ١:

١ أكتب مدى المتغير العشوائي ع

٢ أكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير ع

٣ أكون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير ع

١ الحل : مدى ع = $\{٤-، ٥، ١٠\}$

$$ل(١٠) = \frac{٦}{٣٦}، ل(٥) = \frac{٢}{٣٦}، ل(٤-) = \frac{٢٨}{٣٦} \text{ (لماذا؟)}$$

٢ التوزيع الاحتمالي = $\{(٢٨، ٤-)، (٢، ٥)، (٦، ١٠)\}$

٣ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع

٤-	٥	١٠	س _٧
$\frac{٢٨}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	ل(س _٧)

أتعلم: (١) $0 \leq l(s_r) \leq 1$ $r = 1, 2, \dots, n$

$$(2) \sum_{r=1}^n l(s_r) = 1 \quad \text{حيث } n \text{ عدد قيم } s_r$$

مثال ٢: إذا كان ق متغيراً عشوائياً منفصلاً توزيعه الاحتمالي:
 $\{(0, 2, 4), (8, s), (12, s^3)\}$ أجد قيمة s

الحل: $\sum_{r=1}^3 l(s_r) = 1$ ، $0, 2, s + s^3 = 1$
 ومنها $s = 0, 2$

تعريف: إذا كان ق متغيراً عشوائياً منفصلاً مداه $\{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$

$$\text{فإن توقع المتغير العشوائي ق هو: } t(q) = \sum_{r=1}^n s_r \times l(s_r)$$

أتعلم: يمثل التوقع الوسط الحسابي للقيم التي يأخذها المتغير العشوائي، مع الأخذ بعين الاعتبار احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي، إذا كررت التجربة عدد كبير من المرات.

مثال ٣: يربح بائع مرطبات ١٠ دنانير في اليوم الحارّ، و ٦ دنانير في اليوم المعتدل، و يخسر ديناراً واحداً في اليوم البارد. فإذا كان احتمال أن يكون الجو حارّاً في أحد الأيام يساوي ٠, ٥ واحتمال أن يكون معتدلاً ٠, ٣، اخترنا أحد الأيام عشوائياً، ودل المتغير العشوائي ق على المبلغ الذي يكسبه البائع في اليوم الواحد. أجد: ١- مدى ق ٢- جدول التوزيع الاحتمالي ٣- توقع ق.

١ الحل: $s = \{1, 6, 10\}$

١-	٦	١٠	s_r
٠, ٢	٠, ٣	٠, ٥	$l(s_r)$

٢ $t(q) = \sum_{r=1}^3 s_r \times l(s_r)$

$$= 10 \times 0, 5 + 6 \times 0, 3 + 1 \times 0, 2 = 6, 6 \text{ ديناراً}$$

- ١ في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين ومتمايزين، إذا دل المتغير العشوائي Q على الفرق المطلق بين العددين الظاهريين على الوجهين العلويين، أكتب مدى Q ، التوزيع الاحتمالي، ثم أجد التوقع.
- ٢ إذا كان Q متغيراً عشوائياً مداه مجموعة قيم $S = \{-2, 3, 4\}$ وكان $L (S = 3) = 1, 0$ ، $T (Q) = 5, 1$ ، أجد $L (S = 4)$.
- ٣ صندوق فيه ٣ كرات حمراء، و ٥ كرات بيضاء متجانسة، قام ماجد بسحب عدد من الكرات على التوالي دون إرجاع، على أن يتوقف عن السحب عند ظهور أول كرة بيضاء. فإذا كان المتغير العشوائي E يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة، أكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي E .

العلامة الخام: هي البيانات التي نقوم بجمعها حول ظاهرة ما قبل معالجتها إحصائياً.

العلامة المعيارية: هي عدد الانحرافات المعيارية للمشاهدة س عن الوسط الحسابي. ويرمز لها بالرمز ع ،

$$\text{حيث } ع = \frac{\mu - س}{\sigma}$$

والآن إذا علمت أن الوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف في اختبار الرياضيات ٨٥ ، والانحراف المعياري ٥ ، والوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف في اختبار اللغة الانجليزية ٧٤ وانحراف معياري قدره ٣ . وبعد معرفتك مفهوم العلامة المعيارية وطريقة إيجادها، هل يمكنك مساعدة الأب في معرفة أي المادتين كان تحصيل الابن فيها أفضل؟

مثال ١ : إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة قيم توزيع ما هو ٧٠ ، والانحراف المعياري لها ٤ ، ما العلامة المعيارية المقابلة للقيمة ٦٢ ؟

$$\text{الحل : } ع = \frac{\mu - س}{\sigma} = \frac{٧٠ - ٦٢}{٤} = ٢$$

أتعلم: أن مجموع العلامات المعيارية لتوزيع ما يساوي صفر، ووسطها الحسابي يساوي صفر، وانحرافها المعياري يساوي ١ .

مثال ٢ : كانت جميع العلامات المعيارية لتوزيع ما كما يأتي: صفر ، ٠,٥ ، ل ، -١,٥ ، -٠,٥ ما قيمة ل؟

$$\text{الحل : } \begin{aligned} &\text{مجموع العلامات المعيارية للتوزيع} = \text{صفر} \\ \therefore &\text{صفر} = ٠,٥ + ل + -١,٥ + -٠,٥ \\ \Leftrightarrow &١,٥ = ل \end{aligned}$$

مثال ٣ : إذا كانت علامتا طالبين في امتحان العلوم ٩٠ ، ٥٠ وكانت العلامتان المعياريتان المناظرتان -٢ ، ٢ على الترتيب. أجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعلامتهما في الامتحان.

$$\text{الحل : } ع = \frac{\mu - س}{\sigma}$$

$$(1) \dots\dots\dots \sigma^2 = \mu - 50 \Leftrightarrow \frac{\mu - 50}{\sigma} = 2 -$$

$$(2) \dots\dots\dots \sigma^2 = \mu - 90 \Leftrightarrow \frac{\mu - 90}{\sigma} = 2$$

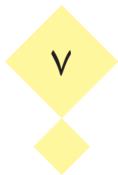
بحل المعادلتين:

$$70 = \mu, 10 = \sigma \text{ (أتحقق من ذلك).}$$



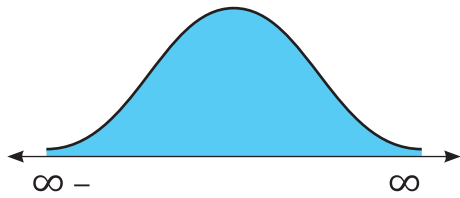
تمارين ٢ - ٣

- ١ في امتحان الرياضيات كان الوسط الحسابي للعلامات يساوي ٦٥ والانحراف المعياري يساوي ٨، ما العلامتان المعياريتان لطالين حصلا على العلامتين ٥٧، ٩١؟
- ٢ إذا حُوّلت مفردات توزيع ما إلى علامات معيارية، فكانت كالاتي:
صفر، -٥، ٠، ل، -١، ٥، ٣، ل، فما قيمة ل؟



التوزيع الطبيعي:

تشير الدراسات الإحصائية لكثير من الظواهر الطبيعية والاجتماعية التي تتضمن مجموعة كبيرة من المفردات، إلى اقتراب المنحنيات الخاصة بتوزيعات هذه الظواهر من التوزيع الطبيعي، وهو أحد صور التوزيعات التكرارية وأهمها، ويمتاز بأنه متماثل حول الوسط الحسابي، ويأخذ شكل منحناه شكل الجرس، ويسمى توزيع جاوس نسبة للعالم الألماني جاوس الذي طوره في القرن السابع عشر، ومن الأمثلة عليه: توزيعات الأطوال والكتل، ودرجات الحرارة، ومعاملات الذكاء وغيرها. ويوصف التوزيع الطبيعي بمعادلة رياضية تحدد منحناه، وهي تتعين بمعرفة التوقع (الوسط الحسابي) μ والانحراف المعياري σ .



خصائص المنحنى الطبيعي:

١. متماثل حول الوسط الحسابي μ .
٢. الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
٣. له قمة واحدة وطرفاه يمتدان إلى $-\infty$ ، ∞ (لا يقطع محور السينات).

التوزيع الطبيعي المعياري:

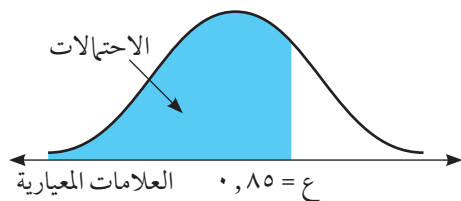
عند تحويل القيم الخام الخاصة بتوزيع طبيعي إلى علامات معيارية، وتمثيل هذه العلامات المعيارية بيانياً، فإنها تتمثل بمنحنى طبيعي يسمى المنحنى الطبيعي المعياري، وهو توزيع وسطه الحسابي يساوي صفرًا وتباينه ١، وتكون المساحة تحته = ١

نظرية: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي μ ، وانحرافه المعياري σ فإن $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ هو توزيع طبيعي معياري وسطه الحسابي = صفر، وانحرافه المعياري = ١.

جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

قام العلماء ببناء جدول خاص بالتوزيع الطبيعي، يربط بين العلامات المعيارية وأجزاء المساحة المناظرة لها تحت المنحنى، وهناك عدة أنماط لجدول التوزيع الطبيعي المعياري، وسنستخدم الجدول الذي يعطي المساحة على يسار قيمة معيارية مثل z . وبالنظر إلى الجدول (١) الوارد في نهاية الكتاب، فإن الهامش الرأسي في

يمين الجدول يمثل العدد الصحيح والجزء العشري الأول، بينما يمثل الهامش الأفقي في أعلى الجدول الجزء العشري الثاني (جزء من مائة). أما الأعداد في داخل الجدول فهي تمثل احتمالات وقوع المتغير في الفترة $(-\infty, 0)$ أي المساحة تحت المنحنى على يسار أ.

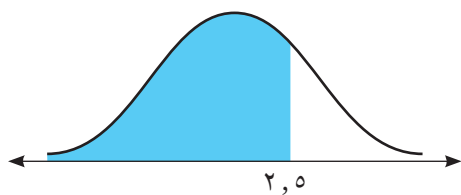


ولإيجاد ل $(0, 85 > ع)$ أي مساحة المنطقة المظللة تحت القيمة المعيارية $0, 85$ ، نبحث عن العدد الذي يمثل تقاطع الصف البادئ ب $0, 8$ (في الهامش الرأسى) والعمود البادئ ب $0, 05$ في الهامش الأفقى وهو $0, 8023$.

مثال ١: إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري. أجد:

١ ل $(ع ≥ ٢, ٥)$

٢ ل $(ع ≤ ١, ٤)$



الحل:

١ ل $(ع ≥ ٢, ٥) = 0, 9938$

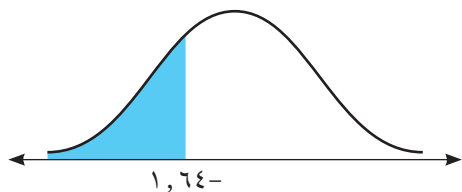
٢ ل $(ع ≤ ١, ٤) = 1 - ل(ع > ١, ٤)$

$= 0, 8008 = 0, 9192 - 1 =$

مثال ٢: إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري. أجد:

١ ل $(ع ≥ ١, ٦٤)$

٢ ل $(ع ≤ ١, ٧)$



الحل:

١ ل $(ع ≥ ١, ٦٤) = 0, 0505$

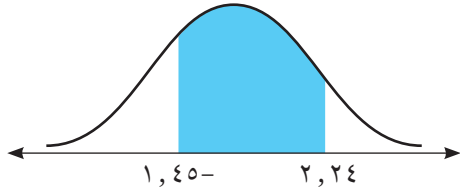
٢ ل $(ع ≤ ١, ٧) = ل(ع ≥ ١, ٧)$ (لماذا؟)

$= 0, 9504$

هل يوجد حلّ آخر؟

نشاط ١:

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد: ل($1,45 \leq C \leq 2,24$)



١ أجد ل($C \geq 1,45$) =

٢ أجد ل($C \geq 2,24$) =

٣ أجد ل($1,45 \leq C \leq 2,24$) =

مثال ٣:

إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً، بوسط حسابي $\mu = 72$ ، وانحراف معياري $\sigma = 2,5$.

أجد أ بحيث ل($S \geq A$) = $0,7881$

الحل:

ع المقابلة لهذه المساحة = $0,8$

لكن $C = \frac{\mu - A}{\sigma}$ ، $0,8 = \frac{72 - A}{2,5}$ ومنها $A = 74$

**نشاط ٢:**

إذا كان المتغير العشوائي س يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = 15$ وانحرافه المعياري

$\sigma = 5$ ، أجد ل($18 > S > 21$).

أجد القيمة المعيارية المناظرة لكل من 21، 18 بالتعويض في العلاقة: $C = \frac{\mu - S}{\sigma}$

عندما $S_1 = 18$ ، $C_1 = 0,6$

عندما $S_2 = 21$ ، $C_2 = 1,2$

\therefore ل($18 > S > 21$) = ل($C_1 > C_2$) = ل($0,6 > 1,2$)

= ل($C > 1,2$) - ل($C > 0,6$) = $0,1092$

- ١ إذا كان E متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أجد:
- أ ل $(E \geq 1, 25)$ ب ل $(E \leq 2, 48)$
- ج ل $(E \leq 1, 46)$ د ل $(-2, 37 \leq E \leq 1, 7)$
- ٢ إذا كان E متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أجد القيمة المعيارية K بحيث:
- أ ل $(E \geq K) = 0, 9909$ ب ل $(E < K) = 0, 9495$
- ج ل $(E \geq K) = 0, 1977$ د ل $(2, 1 \geq E \geq 2, 1) = 0, 2906$
- ٣ إذا كان E متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، وكان ل $(E \geq K) = 0, 1736$ ، أجد ل $(K \geq E \geq 1, 7)$.
- ٤ إذا كان S متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي وسطه الحسابي 60 وانحرافه المعياري 5 ، أجد:
- أ ل $(S \geq 50)$ ب ل $(55 \leq S \leq 75)$
- ٥ إذا كان S متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري يساوي 2 وكان ل $(S < 78) = 0, 0228$ ، أجد الوسط الحسابي للتوزيع.
- ٦ إذا كان S متغيراً عشوائياً طبيعياً، وسطه $\mu = 8$ وانحرافه المعياري $\sigma = 2$ وكان ل $(E \leq K) = 0, 1056$ ، أجد:
- أ قيمة K ب ل $(S \geq 12)$.

بيّننا سابقا أهمية التوزيع الطبيعي، وذلك لارتباطه بكثير من التطبيقات الحياتية، والظواهر التربوية والاقتصادية، وسنقوم بعرض أمثلة ومسائل تطبيقية في هذا المجال:

مثال ١ : تقدم ٢٠٠٠ شخص لاختبار الذكاء (IQ) والذي كانت نتائجه قريبة من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي $\mu = 100$ ، وانحراف معياري $\sigma = 15$.

أ ما نسبة الأشخاص الذين تقع معاملات ذكائهم بين ٨٠ و ١٢٠؟

ب ما عدد الأفراد الذين تزيد معاملات ذكائهم عن ٨٠؟

أ لنفترض أن: س متغير عشوائي طبيعي يعبر عن معامل الذكاء.

المطلوب إيجاد $P(80 < S < 120)$

ومنها $P(80 < S < 120) = P(-1,33 < Z < 1,33)$ (لماذا؟)

$$= P(ع > 1,33 - 1) - P(ع > 1,33 - 1)$$

$$= 0,9082 - 0,0918 =$$

$$0,8164 =$$

أي أن حوالي ٨١,٦٤٪ من الأشخاص لديهم معامل ذكاء يقع بين ٨٠، ١٢٠

ب $P(S < 80) = P(ع < 1,33 - 1)$

$$= 0,0918 =$$

عدد الأفراد الذين تزيد معاملات ذكائهم عن ٨٠

$$= 0,0918 \times 2000 =$$

$$181,64 =$$

≈ ١٨١٦ فرداً

مثال ٢ : إذا كانت علامات الطلبة في امتحان الثانوية العامة قريبة من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٦٥،

وانحراف معياري ٧، وقررت وزارة التربية والتعليم العالي قبول الطلبة الذين تكون علاماتهم ضمن

أعلى ٢٠٪ من العلامات في الجامعات الحكومية، فما أدنى علامة تقبل في الجامعات الحكومية؟

الحل : نفرض أن أقل علامة تحصل على قبول في الجامعات الحكومية هي س، والعلامة المعيارية المقابلة لها

$$P(ع \leq \frac{س - 65}{7}) = 0,2 \text{ (لماذا؟)}$$

$$\Leftrightarrow P(ع > \frac{س - 65}{7}) = 0,8 \approx 0,7995 =$$

ومن الجدول قيمة $ع = 0,84$ ومنها $س = 70,88$ (لماذا؟)

تمارين ٣ - ٤

- ١ مثلت علامات ١٠٠٠ طالب توزيعاً طبيعياً، وتم حساب العلامات المعيارية لهم، ومثلت على توزيع طبيعي معياري. أجد عدد الطلبة الذين تقل علاماتهم المعيارية عن - ١,٥، ٢
- ٢ إذا علم أن علامات الطلبة في اختبار القدرات في مادة الرياضيات، يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٦٩ وانحراف معياري ٤ أجد ما يأتي:
 - أ احتمال أن تكون علامة الطالب أكبر من ٧٥
 - ب احتمال أن تكون علامة الطالب بين ٦٠، ٧٠
 - ج نسبة الطلاب الذين حصلوا على علامة أقل من ٦٩

تمارين عامة

- ١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:
 - ١ إذا كان الوسط الحسابي لعلامات ٣٠ طالباً يساوي ٧٥ والانحراف المعياري يساوي ٥، فإن العلامة المعيارية المناظرة للعلامة ٦٥ تساوي:
 - أ) -٢
 - ب) ٢
 - ج) ٧
 - د) ٩
 - ٢ في توزيع طبيعي وسطه الحسابي ٥٠ وانحرافه المعياري ١٠ تكون نسبة المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين ٤٠، ٧٠ تساوي:
 - أ) ١٣٪
 - ب) ٣٤٪
 - ج) ٦٨٪
 - د) ٨٢٪
 - ٣ حجر نرد منتظم عليه الأرقام ١، ١، ١، ٢، ٢، ٥، تم رميه ٣٠ مرة، كم مرة تتوقع أن يظهر الرقم ١؟
 - أ) ٢٠
 - ب) ١٥
 - ج) ١٠
 - د) ٥
- ٢ إذا كان جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق هو:

س	٣	٨	٩	١٢	١٥
ل(س)	أ	ب	٠,٣	٣ب	أ٢

أحسب توقع المتغير العشوائي ق .
- ٣ تتخذ علامات (٥٠٠٠) طالب في امتحان الثانوية العامة شكلاً قريباً من التوزيع الطبيعي وسطه الحسابي ٧٦ وانحرافه المعياري ٩، فإذا كانت نسبة الطلبة الذين تقل علاماتهم عن علامة القبول في كلية الهندسة هي ٨٦٤٣، ٠، أجد علامة القبول.

تعريف: المتتالية هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) ، أو مجموعة جزئية منها على صورة $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ، ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية (ح).
وتقسم المتتاليات إلى نوعين: منتهية عندما يكون فيها المجال مجموعة جزئية من ط على الصورة $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ، وغير منتهية عندما يكون المجال ط.
ويرمز للحدّ الأول بالرمز $ح_١$ والحدّ الثاني بالرمز $ح_٢$ وهكذا...
يرمز للحدّ الذي ترتيبه n بالرمز $ح_n$ ويسمى الحدّ العام (الحدّ النوني).

إذا كان الحدّ العام للمتتالية $ح_n = 1 + 3^n$

مثال ١:

١ أكتب الحدود الخمسة الأولى من هذه المتتالية.

٢ أكتب الحدّ العاشر من المتتالية.

١ بتعويض قيم $n = 1, 2, 3, 4, 5$ في الحدّ العام نحصل على:

$$ح_١ = 1 + 3^1 = ٤ ، ح_٢ = 1 + 3^2 = ١٠ ، ح_٣ = 1 + 3^3 = ٢٨ ، ح_٤ = 1 + 3^4 = ٨٢ ، ح_٥ = 1 + 3^5 = ٢٤٤$$

$$٢ ح_١٠ = 1 + 3^{10} = ٥٩٠٤٩$$

الحل :

أجد الحدّ العام للمتتاليات.

نشاط ١:

$$١ \dots, 3, 7, 11, \dots$$

$$٢ \dots, 1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \dots$$

$$٣ 11, 101, 1001, \dots$$

بالربط بين قيمة كل حدّ وترتيبه، أجد:

$$١ ح_١ = 3 = 1 - (1 \times 4)$$

$$ح_٢ = 7 = 1 - (2 \times 4)$$

$$ح_٣ = 11 = 1 - (3 \times 4)$$

$$فيكون ح_n = 1 - 4n$$

$$\textcircled{2} \quad \text{ح}_1 = 1 = \frac{1}{1}, \quad \text{ح}_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{ح}_3 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \quad \dots = \frac{1}{n} = \text{ح}_n$$

فيكون $\text{ح}_n = \dots$

$$\textcircled{3} \quad \text{ح}_n = \dots$$

مثال ٢: أكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية التي فيها:

$$\text{ح}_1 = 1, \quad \text{ح}_2 = 2, \quad \text{ح}_3 = 3, \quad \text{ح}_n \times \text{ح}_{n+1} = \text{ح}_{n+2}$$

الحل: $\text{ح}_1 = 1, \quad \text{ح}_2 = 2, \quad \text{ح}_3 = 3$ معطى

$$\text{عندما } n = 1, \quad \text{ح}_2 = \text{ح}_1 \times \text{ح}_3 = 1 \times 3 = 3$$

$$\text{وعندما } n = 2, \quad \text{ح}_4 = \text{ح}_2 \times \text{ح}_3 = 2 \times 3 = 6$$



تمارين و مسائل ٣-٥

١ أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات الآتية:

أ $\text{ح}_n = 5n - 2$

ب $\text{ح}_1 = 3, \quad \text{ح}_2 = -1, \quad \text{ح}_n \times \text{ح}_{n+1} = \text{ح}_{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

٢ أكتب الحدّ العام لكل من المتتاليات الآتية:

أ $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$

ب $2, 9, 28, \dots$

ج $4, -8, 16, -32, \dots, -128$

٣ في المتتالية التي حدّها العام هو $\text{ح}_n = 3 \times 2^{(n-5)}$ ، أبين أن:

$$\text{ح}_8 = 2 \times \text{ح}_2$$

نشاط ١:

تعتبر الحديقة المنزلية جزءاً من حياة المواطن الفلسطيني، ولتعميق قيم حب الأرض والانتماء لها، طلب أبو حسن من ابنه حسن استثمار وقته في العطلة الصيفية بزراعتها بأنواع الخضراوات المختلفة، على أن يكافئه بثلاثة دنانير في اليوم الأول، و ٥ دنانير في اليوم الثاني، و ٧ دنانير في اليوم الثالث وهكذا لمدة أسبوع. يمكن كتابة المبالغ على شكل متتالية، وهي

أما الحدّ العام للمبالغ $ح_n = \dots\dots\dots$

وبعد أن أنهى حسن مهمته، قام بكتابة مبالغ المكافآت التي حصل عليها بالصورة الآتية:

$$٣ + ٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣ + ١٥، \text{ إن كتابة هذه المكافآت بهذه الصورة يسمى متسلسلة.}$$

ويمكن كتابة هذا المجموع باستخدام الرمز \sum ويقرأ (مجموع) حيث يمكننا كتابة هذه

$$\text{المتسلسلة على الصورة الآتية } \sum_{r=1}^7 (١ + ٢r)$$

ألاحظ أن هذه المتسلسلة منتهية، وعدد عناصرها ٧.

ويمكن التعبير عن المتسلسلة $١ - ٦ + ٢٥ + ٦٢ + \dots$ على الصورة

$$\sum_{r=1}^{\infty} (٢ - ٣r) \text{ حيث } r \exists ط، \text{ وهي متسلسلة غير منتهية.}$$

$$\text{أجد مفكوك المتسلسلة الآتية } \sum_{r=1}^4 (١ + ٣r):$$

مثال ١:

$$\text{عندما } r = ١، ح_١ = ١ + ١ \times ٣ = ٤$$

$$\text{عندما } r = ٢، ح_٢ = ١ + ٢ \times ٣ = ٧ \text{ وهكذا}$$

$$\sum_{r=1}^4 (١ + ٣r) = ٤ + ٧ + ١٠ + ١٣$$

الحل:

أكتب كلاً من المتسلسلات الآتية باستخدام الرمز \sum

نشاط ٢:

$$١ \quad ٥ + ١٠ + ١٥ + \dots + ١٥٠$$

$$٢ \quad ٢ + ١٦ + ٥٤ + ١٢٨ + ٢٥٠$$

$$٣ \quad ١ \times ٢ + ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + \dots$$

- ١ $30 \times 5 + \dots + 3 \times 5 + 2 \times 5 + 1 \times 5$ $\sum_{r=1}^{30} 5r$ فتكون المتسلسلة $5 = r$ ، $30 = n$ ألاحظ أن
- ٢ $5 = n$ ، $30 = r$ فتكون المتسلسلة $5 = r$ ، $30 = n$
- ٣ $5 = n$ ، $30 = r$ فتكون المتسلسلة $5 = r$ ، $30 = n$

مثال ٢: أجد مجموع المتسلسلة $\sum_{r=1}^n (1 + 2r^2)$

الحل: $51 + 33 + 19 + 9 + 3 = \sum_{r=1}^5 (1 + 2r^2)$
ومنها مجموع المتسلسلة = 115

خصائص المجموع \sum

١ $\sum_{r=1}^n A = nA$ ، $\exists A \in \mathbb{R}$

٢ $\sum_{r=1}^n A = \sum_{r=1}^n A$ ، $\exists A \in \mathbb{R}$

٣ $\sum_{r=1}^n (A \pm B) = \sum_{r=1}^n A \pm \sum_{r=1}^n B$

أتعلم: ١ $\sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}$

٢ $\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

مثال ٣: إذا كان $\sum_{r=1}^{10} (7 - Ar + r^2) = 425$ ، أجد قيمة أ.

الحل: باستخدام خصائص المجموع (\sum)

$$425 = 7 \sum_{r=1}^{10} 1 - r \sum_{r=1}^{10} r + \sum_{r=1}^{10} r^2 = (7 - Ar + r^2) \sum_{r=1}^{10} 1$$

$$425 = 7 \times 10 - \frac{(1+10)10}{2} \times A + \frac{(1+10)(1+10)}{6} =$$

بتعويض $n=10$ ينتج:

$$425 = 10 \times 7 - \frac{(1+10)10}{2} \times A + \frac{(1+10)(1+10)}{6} \times 10$$

$$425 = 70 - 55A + 385 \leftarrow$$

$$2 = A, 110 = 55A \leftarrow$$

تمارين و مسائل ٣ - ٦

١ أكتب كلا من المتسلسلات الآتية، باستخدام رمز المجموع (\sum)

أ $3k + 6k + 9k + \dots$ ب $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{100}{101}$

٢ أجد مجموع المتسلسلات الآتية:

أ $\sum_{r=1}^3 (5 + r + r^2)$ ب $\sum_{r=1}^{85} (1-r)$

ج $\frac{\sum_{r=1}^{40} r^2}{\sum_{r=1}^{40} r}$ د $\sum_{r=1}^{40} \frac{r}{2}$

تعريف: المتتالية الحسابية: هي المتتالية التي يكون فيها الفرق بين أي حدّ والحد السابق له مباشرة، يساوي مقداراً ثابتاً، يسمى أساس المتتالية الحسابية، ويرمز له بالرمز (د).

نشاط ١: أميز المتتاليات الحسابية من غيرها فيما يأتي:

١ ١١، ٩، ٧، ٥، ٣

٢ ١، ٢، ٤، ٨

٣ ١، ١-، ١، ١-، ١

٤ المتتالية التي حدّها النوني ح_ن = ٣ن + ١

١ المتتالية حسابية، لأن ٥ - ٣ = ٧ - ٥ = ٩ - ٧ = ٢ = د

٢ ليست حسابية، لأن ٤ - ٢ ≠ ٨ - ٤

٣ ليست حسابية، لأن

٤ حدود المتتالية، هي:،،، وهي متتالية

الحدّ العام للمتتالية الحسابية:

الحدّ العام للمتتالية الحسابية هو: ح_ن = أ + (ن-١)د، حيث أ: الحدّ الأول، د: الأساس

مثال ١: أجد الحدّ العاشر في المتتالية الحسابية التي حدّها الأول = ٥ وأساسها = ٢

الحل: أ = ٥ ، د = ٢

ح_ن = أ + (ن - ١)د

ح_{١٠} = أ + ٩د

٢٣ = ٢ × ٩ + ٥ =

مثال ٢ :

متتالية حسابية حدّها الثالث يساوي ٥ وحدّها التاسع يساوي ١٧
١ أكتب حدود هذه المتتالية.

٢ هل العدد ٣٠٠ أحد حدود هذه المتتالية؟

الحل :

١ ح_٣ = ٥ ⇔ أ + ٢د = ٥ (١)

ح_٩ = ١٧ ⇔ أ + ٨د = ١٧ (٢)

ب طرح المعادلتين (١)، (٢) ينتج أن ١٢ = ٦د ومنها د = ٢

بالتعويض في المعادلة (١) عن قيمة (د) ينتج أن أ = ١

∴ المتتالية هي ١، ٣، ٥،
أفكر بطرق أخرى للحل.

٢ أفرض أن ح_ن = أ + (ن - ١)د = ٣٠٠

٣٠٠ = ١ + (ن - ١) × ٢

٣٠١ = ٢ن ⇔ ٣٠٠ = ٢ - ٢ن + ١

ن = $\frac{1}{2} \times 301 = 150.5$ ، ألاحظ أن ن ∉ ط ، ومنها ٣٠٠ ليست أحد حدود المتتالية.

تعريف: الوسط الحسابي للعددين أ، ب هو $\frac{أ+ب}{٢}$

ألاحظ أن الأعداد أ، $\frac{أ+ب}{٢}$ ، ب تشكل متتالية حسابية.

بوجه عام: إذا أدخلنا أوساطاً حسابية س_١، س_٢، ...، س_ن بين العددين أ، ب

فإن الأعداد: أ، س_١، س_٢، ...، س_ن، ب تشكل متتالية حسابية عدد حدودها (ن + ٢)

مثال ٣ :

أدخل ٤ أوساط حسابية بين العددين ١٧، ١٠٧

الحل :

عند إدخال ٤ أوساط حسابية بين العددين ١٧، ١٠٧ تتكون المتتالية الحسابية:

١٧، س_١، س_٢، س_٣، س_٤، ١٠٧

أ = ١٧، ح_٦ = ١٠٧

ح_٦ = ١٠٧ = ١٧ + ٥د ⇔ ١٠٧ = ١٧ + ٥د ⇔ ٩٠ = ٥د ومنها د = ١٨

المتتالية هي: ١٧، ٣٥، ٥٣، ٧١، ٨٩، ١٠٧

الأوساط الحسابية هي: ٣٥، ٥٣، ٧١، ٨٩

- ١ متتالية حسابية فيها ح؛ $-33 =$ ، ح $= -13$ ،
 أجد: أ حدود المتتالية.
 ب رتبة أول حدّ موجب فيها.
- ٢ متتالية حسابية مجموع حدّها الثاني والثالث ١٥٢ وحدّها السادس يزيد عن حدّها الثامن بمقدار ٨،
 أكتب حدود هذه المتتالية الحسابية.
- ٣ إذا كوّنت الأعداد ٧، س، ...، ١٠، س + ٩، ١٢٣ متتالية حسابية، أجد:
 أ قيمة س
 ب عدد حدود هذه المتتالية.

أتعلم: مجموع أول n حد من حدود المتسلسلة الحسابية التي حدّها الأول (أ) وحدّها الأخير (ل)

$$\text{هو } ج_n = \frac{n}{2} (أ + ل)$$

ويمكن استنتاج صورة أخرى للمجموع، وذلك بوضع $ل = أ + (ن - ١)د$

$$ج_n = \frac{n}{2} [أ + (ن - ١)د]$$

مثال ١: أجد مجموع أول ١٥ حدًا من المتسلسلة $٢٠ + ١٦ + ١٢ + \dots$

الحل: $أ = ٢٠$ ، $د = ٢٠ - ١٦ = -٤$ ، $ن = ١٥$

$$ج_n = \frac{n}{2} (أ + (ن - ١)د)$$

$$= \frac{١٥}{2} (٢٠ + (-٤) \times ١٤) = ١٢٠$$

مثال ٢: أجد قيمة $\sum_{r=1}^{60} (r - ١٠)$

الحل: المجموع $= (١ - ١٠) + (٢ - ١٠) + (٣ - ١٠) + \dots + (٦٠ - ١٠)$

$$= ٩ + ٨ + ٧ + \dots + (-١٠) =$$

$$أ = ٩$$
، $ل = -١٠$ ، $ن = ٦٠$

$$ج_n = \frac{n}{2} (أ + ل)$$

$$= \frac{٦٠}{2} (٩ - ١٠) = -٣٠ = ١٢٣٠$$

مثال ٣: إذا كان مجموع أول n حدٍّ من حدود متسلسلة حسابية يعطى بالعلاقة $ج_n = n \times (n + 1)$ أجد هذه المتسلسلة.

الحل: $ج_1 = 1 = (1 + 2) \times 1 = 3$ (لماذا؟)

$$ج_2 = 2 = 2 \times 3 = 6$$

$$ج_3 = 3 = 3 \times 4 = 12$$

المتسلسلة، هي: $3 + 7 + 11 + \dots$

تمارين ومسائل ٣ - ٨

- ١ أجد مجموع أول ٢٠ حدٍّ من المتسلسلة $30 + 27 + 24 + \dots$
- ٢ متسلسلة حسابية حدّها الأول ٧ و حدّها الأخير (-١٢) و مجموع حدودها (-٥٠) أجد المتسلسلة.
- ٣ متسلسلة حسابية تتكون من ٢٥ حدًّا، حدّها الأوسط يساوي ٣٨، و مجموع الحدود الثلاثة الأخيرة منها يساوي ٢١٣. أجد المتسلسلة، وأجد مجموعها.

تعريف: تسمى المتتالية متتالية هندسية، إذا كانت النسبة بين كل حدّ والحدّ السابق له مباشرة، تساوي مقداراً ثابتاً، ويسمى المقدار الثابت أساس المتتالية الهندسية، ويرمز له بالرمز (ر).
ويمكن كتابة حدود المتتالية الهندسية التي حدّها الأول (أ) وأساسها (ر) على الصورة
أ، أر، أر^٢، أر^٣، ...، وعليه، فإن الحدّ العام يعطى بالقاعدة: $ح_n = أر^{n-1}$

نشاط ١: أميز المتتالية الهندسية عن غيرها من المتتاليات الآتية، ثم أكتب الحدّ العام للمتتالية الهندسية منها:

١ ٠٠٠٠٠٠، ١٨، ٦، ٢

٢ ٠٠٠٠٠٠، ٢، ٨، ٣٢

٣ ٠٠٠٠٠٠، ٦، ٤، ١

٤ س، س^٣، س^٥، ... : س $\neq ٠$

١ ألاحظ أن $\frac{٦}{٢} = \frac{١٨}{٦} = ٣$ إذن المتتالية هندسية، الحد العام ح_n =

٢، الحد العام ح_n =

٣ ألاحظ أن $\frac{٤}{١} \neq \frac{٦}{٤}$ المتتالية ليست هندسية.

٤

مثال ١: أجد الحدّ السادس من المتتالية الهندسية ٥، ١٠، ٢٠،

الحل: $٥ = أ$ ، $٢ = ر$ ، $\frac{١٠}{٥} = ر = \frac{٢٠}{١٠}$ ، $١٦٠ = ح_٦ = ٥ \times ٢^٥$

مثال ٢: إذا كان ١٥٣٦ هو أحد حدود المتتالية الهندسية: ٣، ٦، ١٢، ... فما رتبة هذا الحدّ؟

الحل: $٣ = أ$ ، $٢ = ر$ ، $\frac{٦}{٣} = ر = \frac{١٢}{٦}$ ، $١٥٣٦ = ح_n = ٣ \times ٢^{n-1}$ ، $٩٢ = ح_n = ٣ \times ٢^{n-1}$

$١٥٣٦ = ٣ \times ٢^{n-1} \Leftrightarrow ٥١٢ = ٢^{n-1} \therefore ٩٢ = ٢^{n-1}$

ومنها $٩ = ٢^{n-1} \therefore ١٠ = ن$

مثال ٣: إذا كانت $s + 3$ ، 4 ، $s - 3$ تكون متتالية هندسية: فما قيمة / قيم s ؟

الحل: $16 = (s + 3)(s - 3) \Leftrightarrow \frac{s - 3}{4} = \frac{4}{s + 3}$

$s^2 - 9 = 16 \Leftrightarrow s^2 = 25$ ، $s = \pm 5$

تمارين ومسائل ٣ - ٩

- ١ أجد الحد السابع من المتتالية الهندسية 3 ، -9 ، 27 ،
- ٢ متتالية هندسية مجموع حديها الأول والثاني 12 ، ومجموع حديها الثالث والرابع يساوي 108 . أجد هذه المتتالية.
- ٣ ثلاثة أعداد تكون متتالية هندسية مجموعها 35 ، إذا أضيف إلى العدد الثاني 6 وإلى العدد الثالث 7 تكونت متتالية حسابية، أجد هذه الأعداد.

أتعلم: مجموع أول n حد من حدود متسلسلة هندسية حدها الأول a ، وأساسها r يعطى بالقاعدة:

$$ج_n = \frac{a - ar^n}{r - 1}, \text{ حيث } l \text{ الحد الأخير.}$$

ألاحظ أنه يمكن كتابة: $ج_n = \frac{a(1 - r^n)}{r - 1}$ ، $r \neq 1$ بالصورة الآتية:

$$ج_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ (لماذا؟) } r \neq 1$$

مثال ١: أجد مجموع أول ٨ حدود من حدود المتتالية الهندسية: ٢، ٦، ١٨،

الحل: $a = 2, r = 3, n = 8$ $ج_8 = \frac{(2^3 - 1) \times 2}{3 - 1} = 6560$

مثال ٢: متتالية هندسية حدها الخامس ١٦، وحدها الثامن ١٢٨، أجد:

١ المتتالية. ٢ مجموع الحدود السبعة الأولى منها.

١ ح_٥ = ١٦، أر^٤ = ١٦ (١)

ح_٨ = ١٢٨ ومنها أر^٧ = ١٢٨ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) ينتج أن: $\frac{أر^٧}{أر^٤} = \frac{١٢٨}{١٦} \Leftrightarrow ر^٣ = ٨$ ومنها $ر = ٢$

بالتعويض في المعادلة (١) ينتج أن $١٦ = أ \cdot ٢^٤$ ومنها $أ = ١$
المتتالية هي ١، ٢، ٤،

٢ $ج_٧ = \frac{(٢^٧ - ١) \times ١}{٢ - ١} = \frac{(١٢٨ - ١) \times ١}{١} = ١٢٧$

تمارين ومسائل ١٠ - ٣

١ إذا كان الحد الأول من متسلسلة هندسية = ١، والحد الأخير = ٦٤، ومجموع حدودها = ٨٥، أجد أساسها.

٢ أجد $\sum_{r=1}^n ٨^{-r}$

٣ تسقط كرة من ارتفاع ٨ م بحيث كلما تصطم بالأرض في كل مرة يقل ارتفاعها بمقدار ربع ارتفاعها

السابق، أجد: أ ارتفاع الكرة بعد الصدمة السادسة.

ب بعد كم صدمة يكون مجموع ارتفاعاتها يساوي $\frac{٧٨١}{٣٢}$ م.

تمارين عامة

- ١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:
- ١ ما الحدّ العام للمتتالية ١، ١-، ١، ١-، ١، ١-، ... ؟
- (أ) $ح_n = (1-n)^n$ (ب) $ح_n = (1-n)^{1+n}$
- (ج) $ح_n = n^n$ (د) $ح_n = (-n)^n$
- ٢ ما قيمة $ح_{101}$ في المتتالية التي حدّها العام $ح_n = جا\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ ؟
- (أ) ١- (ب) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ج) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (د) $\frac{1}{2}$
- ٣ ما مجموع المتسلسلة $\sum_{r=1}^{175} (1-r)^{r+1}$ ؟
- (أ) ١- (ب) ٠ (ج) ١ (د) ٢
- ٤ ما قيمة $\frac{\sum_{r=1}^{100} r^2}{\sum_{r=1}^{100} r}$ ؟
- (أ) ٦٧ (ب) ٧٠ (ج) ٨٠ (د) ١٠٠
- ٥ ما رتبة الحدّ الذي قيمته -٣٢ في المتتالية ٤، ٢، ٠، ...
- (أ) ١٨ (ب) ١٩ (ج) ٢٠ (د) ٢١
- ٦ في المتتالية الهندسية: ٢، ٤، ٨، ... أجد مجموع ثمانية حدود ابتداءً من الحد الخامس.
- ٧ إذا كان مجموع الحدود الستة الأولى من متتالية هندسية يساوي ٩ أمثال مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها، وإذا كان حدّها العاشر = ٦٤ فما المتتالية؟
- ٨ خزان ماء سعته ٥، ٦٢ م^٣، يضح منه خمس كمية الموجودة فيه يومياً، أجد كمية الماء التي تبقى في الخزان بعد ستة أيام.

ورقة عمل (١)

١ قطعة نقود غير منتظمة، احتمال ظهور الصورة على وجهها العلوي عند إلقائها يساوي مثلي احتمال ظهور الكتابة، تم إلقاؤها مع قطعة نقد منتظمة مرة واحدة، فإذا كان المتغير العشوائي ق يمثل عدد الصور الظاهرة على الوجه العلوي.

أ أحسب التوقع للمتغير العشوائي ق .

ب أحسب التوقع للمتغير العشوائي ق إذا كررت التجربة ١٠ مرات.

٢ إذا كانت أطوال الطلاب في جامعة بيرزيت تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي μ وانحرافه المعياري ٨سم، أجد قيمة μ إذا كانت العلامة المعيارية لطالب طوله ١٨٠سم هي ٢٥، ١.

٣ زرعت ندين ٣ بذور متجانسة في النوع والصلاحية في حديقة المنزل، وكان احتمال إنبات البذرة الواحدة يساوي $\frac{2}{3}$ ودل المتغير العشوائي ق على عدد البذور التي ستنبت من البذور الأربعة.
١- اكتب مدى ق. ٢- أجد التوزيع الاحتمالي. ٣- أجد توقع ق.

٤ أجد أساس المتتالية الهندسية التي حدّها الأول = ٣، وحدّها الأخير ١٥٣٦ و مجموع حدودها ٣٠٦٩

٥ إذا كان ب هو الوسط الحسابي للعددين أ، ج أثبت أن:

$$\varepsilon = \frac{ب + ٢ - ج}{أ - ب} + \frac{أ + ٢ - ب}{ب - ج}$$

٦ أجد مجموع ٢٥ حداً الأولى من المتتالية التي حدّها العام ح =

$$\left\{ \begin{array}{l} ١ + ٢ن ، \exists \{ ١، ٣، ٥، \dots \} \\ ١ + ٥ن ، \exists \{ ٢، ٤، ٦، \dots \} \end{array} \right.$$

اختبار الوحدة

س١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠، ٠) وبؤرته (٠، ٥) هي:

(أ) ص $20 - = 2$ س. (ب) ص $20 = 2$ س. (ج) ص $20 = 2$ س. (د) ص $20 - = 2$ س.

ما عدد حدود المتتالية الهندسية: ٨١، ٢٧، ٩،، $\frac{1}{81}$ ؟

(أ) ٨. (ب) ٩. (ج) ١٠. (د) ١٧.

إذا كان $ج = (٧٢ + ٢٧)$ يمثل مجموع ٧ حداً الأولى في متتالية حسابية، فإن قيمة الحد الخامس عشر تساوي:

(أ) ٢٥٥. (ب) ٣٣. (ج) ٣١. (د) ٢٢٤.

إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم هو ٦٥، والانحراف المعياري $\sigma = ٥$ فما العلامة المعيارية المقابلة للقيمة ٥٥ ؟

(أ) ٢. (ب) ٠,٥. (ج) -٢. (د) -٠,٥.

ما الحد العام للمتتالية ١، ١-، ١، ١-، ١، ١-، ؟

(أ) $١ + ٧(١ -) = ٧٢$. (ب) $٧٧ = ٧٢$. (ج) $٧(٧ -) = ٧٢$. (د) $٧(١ -) = ٧٢$.

س٢: قطعة نقود غير منتظمة، احتمال ظهور الصورة على وجهها العلوي عند إلقائها يساوي ثلاثة أمثال

احتمال ظهور الكتابة، تم إلقاؤها مع قطعة نقد منتظمة مرةً واحدةً، فإذا كان المتغير العشوائي $ق$ يمثل

عدد الصور الظاهرة على الوجه العلوي، أحسب التوقع للمتغير العشوائي $ق$.

س٣: إذا كوّنت الأعداد ٧، س،، ١٠، س + ٩، ١٢٣ متتالية حسابية، أجد:

(أ) قيمة س (ب) عدد حدود هذه المتتالية.

س٤: إذا كان س متغيراً عشوائياً، مداه = {٠، ١، ٢، ٣، ٤} وكان ل(٠) = ل(٤) = $\frac{1}{6}$ ،
ل(١) = ل(٣) = $\frac{1}{4}$.

١- اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.
٢- احسب توقع س.

س٥:

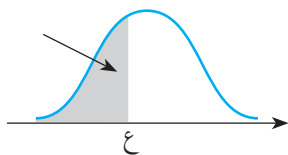
أ) متتالية هندسية مجموع حديها الأول والثاني ١٢، ومجموع حديها الثالث والرابع يساوي ١٠٨.
أجد هذه المتتالية.

ب) أجد $\sum_{r=1}^{10} 3^{r-8}$

س٦:

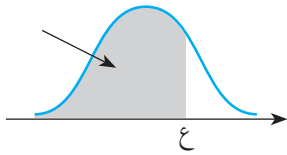
إذا كان الدخل الشهري لعدد ١٠٠٠ أسرة في إحدى المدن هو متغير عشوائي وسطه الحسابي ١٧٠ ديناراً، وانحرافه المعياري ٢٠ ديناراً. إذ اختيرت أسرة عشوائياً من هذه الأسر فأوجد:
١- احتمال أن يكون دخلها ينحصر بين ١٦٠ ديناراً، ٢٠٠ دينار.
٢- عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠ ديناراً.

١,٥	١	٠,٥	٠,٥-	١-	١,٥-	ع
٠,٩٣٣٢	٠,٨٤١٣	٠,٦٩١٥	٠,٣٠٨٥	٠,١٥٨٧	٠,٠٦٦٨	المساحة



ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

٠,٠٩	٠,٠٨	٠,٠٧	٠,٠٦	٠,٠٥	٠,٠٤	٠,٠٣	٠,٠٢	٠,٠١	٠,٠٠	ع
٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٣,٧-
٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٣,٦-
٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٣,٥-
٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٣,٤-
٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٣,٣-
٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٣,٢-
٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠١٠	٣,١-
٠,٠٠١٠	٠,٠٠١٠	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٣,٠-
٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٧	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٩	٢,٩-
٠,٠٠١٩	٠,٠٠٢٠	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢٢	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٤	٠,٠٠٢٥	٠,٠٠٢٦	٢,٨-
٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٢٧	٠,٠٠٢٨	٠,٠٠٢٩	٠,٠٠٣٠	٠,٠٠٣١	٠,٠٠٣٢	٠,٠٠٣٣	٠,٠٠٣٤	٠,٠٠٣٥	٢,٧-
٠,٠٠٣٦	٠,٠٠٣٧	٠,٠٠٣٨	٠,٠٠٣٩	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٤١	٠,٠٠٤٣	٠,٠٠٤٤	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٤٧	٢,٦-
٠,٠٠٤٨	٠,٠٠٤٩	٠,٠٠٥١	٠,٠٠٥٢	٠,٠٠٥٤	٠,٠٠٥٥	٠,٠٠٥٧	٠,٠٠٥٩	٠,٠٠٦٠	٠,٠٠٦٢	٢,٥-
٠,٠٠٦٤	٠,٠٠٦٦	٠,٠٠٦٨	٠,٠٠٦٩	٠,٠٠٧١	٠,٠٠٧٣	٠,٠٠٧٥	٠,٠٠٧٨	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٨٢	٢,٤-
٠,٠٠٨٤	٠,٠٠٨٧	٠,٠٠٨٩	٠,٠٠٩١	٠,٠٠٩٤	٠,٠٠٩٦	٠,٠٠٩٩	٠,٠١٠٢	٠,٠١٠٤	٠,٠١٠٧	٢,٣-
٠,٠١١٠	٠,٠١١٣	٠,٠١١٦	٠,٠١١٩	٠,٠١٢٢	٠,٠١٢٥	٠,٠١٢٩	٠,٠١٣٢	٠,٠١٣٦	٠,٠١٣٩	٢,٢-
٠,٠١٤٣	٠,٠١٤٦	٠,٠١٥٠	٠,٠١٥٤	٠,٠١٥٨	٠,٠١٦٢	٠,٠١٦٦	٠,٠١٧٠	٠,٠١٧٤	٠,٠١٧٩	٢,١-
٠,٠١٨٣	٠,٠١٨٨	٠,٠١٩٢	٠,٠١٩٧	٠,٠٢٠٢	٠,٠٢٠٧	٠,٠٢١٢	٠,٠٢١٧	٠,٠٢٢٢	٠,٠٢٢٨	٢,٠-
٠,٠٢٣٣	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٤٤	٠,٠٢٥٠	٠,٠٢٥٦	٠,٠٢٦٢	٠,٠٢٦٨	٠,٠٢٧٤	٠,٠٢٨١	٠,٠٢٨٧	١,٩-
٠,٠٢٩٤	٠,٠٣٠١	٠,٠٣٠٧	٠,٠٣١٤	٠,٠٣٢٢	٠,٠٣٢٩	٠,٠٣٣٦	٠,٠٣٤٤	٠,٠٣٥١	٠,٠٣٥٩	١,٨-
٠,٠٣٦٧	٠,٠٣٧٥	٠,٠٣٨٤	٠,٠٣٩٢	٠,٠٤٠١	٠,٠٤٠٩	٠,٠٤١٨	٠,٠٤٢٧	٠,٠٤٣٦	٠,٠٤٤٦	١,٧-
٠,٠٤٥٥	٠,٠٤٦٥	٠,٠٤٧٥	٠,٠٤٨٥	٠,٠٤٩٥	٠,٠٥٠٥	٠,٠٥١٦	٠,٠٥٢٦	٠,٠٥٣٧	٠,٠٥٤٨	١,٦-
٠,٠٥٥٩	٠,٠٥٧١	٠,٠٥٨٢	٠,٠٥٩٤	٠,٠٦٠٦	٠,٠٦١٨	٠,٠٦٣٠	٠,٠٦٤٣	٠,٠٦٥٥	٠,٠٦٦٨	١,٥-
٠,٠٦٨١	٠,٠٦٩٤	٠,٠٧٠٨	٠,٠٧٢١	٠,٠٧٣٥	٠,٠٧٤٩	٠,٠٧٦٤	٠,٠٧٧٨	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٠٨	١,٤-
٠,٠٨٢٣	٠,٠٨٣٨	٠,٠٨٥٣	٠,٠٨٦٩	٠,٠٨٨٥	٠,٠٩٠١	٠,٠٩١٨	٠,٠٩٣٤	٠,٠٩٥١	٠,٠٩٦٨	١,٣-
٠,٠٩٨٥	٠,١٠٠٣	٠,١٠٢٠	٠,١٠٣٨	٠,١٠٥٦	٠,١٠٧٥	٠,١٠٩٣	٠,١١١٢	٠,١١٣١	٠,١١٥١	١,٢-
٠,١١٧٠	٠,١١٩٠	٠,١٢١٠	٠,١٢٣٠	٠,١٢٥١	٠,١٢٧١	٠,١٢٩٢	٠,١٣١٤	٠,١٣٣٥	٠,١٣٥٧	١,١-
٠,١٣٧٩	٠,١٤٠١	٠,١٤٢٣	٠,١٤٤٦	٠,١٤٦٩	٠,١٤٩٢	٠,١٥١٥	٠,١٥٣٩	٠,١٥٦٢	٠,١٥٨٧	١,٠-
٠,١٦١١	٠,١٦٣٥	٠,١٦٦٠	٠,١٦٨٥	٠,١٧١١	٠,١٧٣٦	٠,١٧٦٢	٠,١٧٨٨	٠,١٨١٤	٠,١٨٤١	٠,٩-
٠,١٨٦٧	٠,١٨٩٤	٠,١٩٢٢	٠,١٩٤٩	٠,١٩٧٧	٠,٢٠٠٥	٠,٢٠٣٣	٠,٢٠٦١	٠,٢٠٩٠	٠,٢١١٩	٠,٨-
٠,٢١٤٨	٠,٢١٧٧	٠,٢٢٠٦	٠,٢٢٣٦	٠,٢٢٦٦	٠,٢٢٩٦	٠,٢٣٢٧	٠,٢٣٥٨	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٠	٠,٧-
٠,٢٤٥١	٠,٢٤٨٣	٠,٢٥١٤	٠,٢٥٤٦	٠,٢٥٧٨	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٣	٠,٢٦٧٦	٠,٢٧٠٩	٠,٢٧٤٣	٠,٦-
٠,٢٧٧٦	٠,٢٨١٠	٠,٢٨٤٣	٠,٢٨٧٧	٠,٢٩١٢	٠,٢٩٤٦	٠,٢٩٨١	٠,٣٠١٥	٠,٣٠٥٠	٠,٣٠٨٥	٠,٥-
٠,٣١٢١	٠,٣١٥٦	٠,٣١٩٢	٠,٣٢٢٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٣٠٠	٠,٣٣٣٦	٠,٣٣٧٢	٠,٣٤٠٩	٠,٣٤٤٦	٠,٤-
٠,٣٤٨٣	٠,٣٥٢٠	٠,٣٥٥٧	٠,٣٥٩٤	٠,٣٦٣٢	٠,٣٦٦٩	٠,٣٧٠٧	٠,٣٧٤٥	٠,٣٧٨٣	٠,٣٨٢١	٠,٣-
٠,٣٨٥٩	٠,٣٨٩٧	٠,٣٩٣٦	٠,٣٩٧٤	٠,٤٠١٣	٠,٤٠٥٢	٠,٤٠٩٠	٠,٤١٢٩	٠,٤١٦٨	٠,٤٢٠٧	٠,٢-
٠,٤٢٤٧	٠,٤٢٨٦	٠,٤٣٢٥	٠,٤٣٦٤	٠,٤٤٠٤	٠,٤٤٤٣	٠,٤٤٨٣	٠,٤٥٢٢	٠,٤٥٦٢	٠,٤٦٠٢	٠,١-
٠,٤٦٤١	٠,٤٦٨١	٠,٤٧٢١	٠,٤٧٦١	٠,٤٨٠١	٠,٤٨٤٠	٠,٤٨٨٠	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٦٠	٠,٥٠٠٠	٠,٠



تابع جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

٠,٠٩	٠,٠٨	٠,٠٧	٠,٠٦	٠,٠٥	٠,٠٤	٠,٠٣	٠,٠٢	٠,٠١	٠,٠٠	ε
٠,٥٣٥٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥١٩٩	٠,٥١٦٠	٠,٥١٢٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٠٠	٠,٠
٠,٥٧٥٣	٠,٥٧١٤	٠,٥٦٧٥	٠,٥٦٣٦	٠,٥٥٩٦	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥١٧	٠,٥٤٧٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٣٩٨	٠,١
٠,٦١٤١	٠,٦١٠٣	٠,٦٠٦٤	٠,٦٠٢٦	٠,٥٩٨٧	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩١٠	٠,٥٨٧١	٠,٥٨٣٢	٠,٥٧٩٣	٠,٢
٠,٦٥١٧	٠,٦٤٨٠	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٠٦	٠,٦٣٦٨	٠,٦٣٣١	٠,٦٢٩٣	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢١٧	٠,٦١٧٩	٠,٣
٠,٦٨٧٩	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٠٨	٠,٦٧٧٢	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٠٠	٠,٦٦٦٤	٠,٦٦٢٨	٠,٦٥٩١	٠,٦٥٥٤	٠,٤
٠,٧٢٢٤	٠,٧١٩٠	٠,٧١٥٧	٠,٧١٢٣	٠,٧٠٨٨	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠١٩	٠,٦٩٨٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩١٥	٠,٥
٠,٧٥٤٩	٠,٧٥١٧	٠,٧٤٨٦	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٢٢	٠,٧٣٨٩	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٢٤	٠,٧٢٩١	٠,٧٢٥٧	٠,٦
٠,٧٨٥٢	٠,٧٨٢٣	٠,٧٧٩٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٠٤	٠,٧٦٧٣	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦١١	٠,٧٥٨٠	٠,٧
٠,٨١٣٣	٠,٨١٠٦	٠,٨٠٧٨	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٢٣	٠,٧٩٩٥	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩١٠	٠,٧٨٨١	٠,٨
٠,٨٣٨٩	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣١٥	٠,٨٢٨٩	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢١٢	٠,٨١٨٦	٠,٨١٥٩	٠,٩
٠,٨٦٢١	٠,٨٥٩٩	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٠٨	٠,٨٤٨٥	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤١٣	١,٠
٠,٨٨٣٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٠٨	٠,٨٦٨٦	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٤٣	١,١
٠,٩٠١٥	٠,٨٩٩٧	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٠٧	٠,٨٨٨٨	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٤٩	١,٢
٠,٩١٧٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٤٧	٠,٩١٣١	٠,٩١١٥	٠,٩٠٩٩	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٣٢	١,٣
٠,٩٣١٩	٠,٩٣٠٦	٠,٩٢٩٢	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩١٩٢	١,٤
٠,٩٤٤١	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٠٦	٠,٩٣٩٤	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٣٢	١,٥
٠,٩٥٤٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٤٩٥	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٥٢	١,٦
٠,٩٦٣٣	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٠٨	٠,٩٥٩٩	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٥٤	١,٧
٠,٩٧٠٦	٠,٩٦٩٩	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٤١	١,٨
٠,٩٧٦٧	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧١٩	٠,٩٧١٣	١,٩
٠,٩٨١٧	٠,٩٨١٢	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٧٢	٢,٠
٠,٩٨٥٧	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٢١	٢,١
٠,٩٨٩٠	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦١	٢,٢
٠,٩٩١٦	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١١	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠١	٠,٩٨٩٨	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٣	٢,٣
٠,٩٩٣٦	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩١٨	٢,٤
٠,٩٩٥٢	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٣٨	٢,٥
٠,٩٩٦٤	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٣	٢,٦
٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٥	٢,٧
٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٤	٢,٨
٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨١	٢,٩
٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٣,٠
٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٠	٣,١
٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٣,٢
٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٣,٣
٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٣,٤
٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٣,٥
٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٣,٦
٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٣,٧