

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفرع العلمي والصناعي

الفترة الرابعة

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbyatWattlym

هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

الوحدة

٤

٣	١ - ٤	القطع المكافئ
٦	٢ - ٤	القطع الناقص
٩	٣ - ٤	القطع الزائد
١٢	٤ - ٤	نهاية الاقتران عند نقطة
١٦	٥ - ٤	النهايات والصورة غير المعينة
١٩	٦ - ٤	نهايات الاقترانات الدائرية
٢١	٧ - ٤	نهاية الاقتران عندما $\infty \pm \leftarrow$
٢٣	٨ - ٤	الاتصال

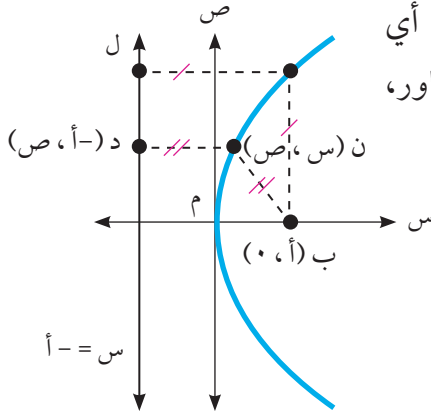
النتائج

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف القطوع المخروطية ومبادئ التفاضل في الحياة العملية من خلال الآتي:

- ١ التعرف على القطع المكافئ، وكتابة معادلته في الوضع القياسي، وتعيين: بؤرتيه، ودليله، ومحور تماثله.
- ٢ التعرف على القطع الناقص، وكتابة معادلته في الوضع القياسي، وتعيين: بؤرتيه، ورأسيه، ومحوريه الأكبر والأصغر، وطوليهما، واختلافه المركزي.
- ٣ التعرف على القطع الزائد، وكتابة معادلته في الوضع القياسي، وتعيين: بؤرتيه، ورأسيه، ومعادلتيه محوريه، والقاطع والمرافق وطوليهما، واختلافه المركزي.
- ٤ تمثيل القطوع المخروطية بيانياً في الوضع القياسي.
- ٥ حل مسائل تطبيقية على القطوع المخروطية.
- ٦ التعرف على النهاية من جهة اليسار، والنهاية من جهة اليمين.
- ٧ إيجاد نهايات الاقتران متعدد القاعدة عند نقاط التحول.
- ٨ إيجاد نهايات الاقترانات الكسرية .
- ٩ التعرف على نهايات الاقترانات الدائرية.
- ١٠ التعرف على اتصال اقتران عند نقطة، البحث في اتصال اقتران على مجاله.
- ١١ تطبيق نظريات الاتصال على اقترانات مختلفة.

القطع المكافئ: هو المحل الهندسي للنقطة ن(س، ص) التي تتحرك في المستوى بشرط أن يكون بُعدها عن نقطة ثابتة ب يساوي بعدها عن مستقيم معلوم ل. تسمى النقطة الثابتة ب البؤرة، ويسمى المستقيم المعلوم ل الدليل.

الحالة الأولى: القطع المكافئ مفتوح لليمين



الرأس (٠ ، ٠) وتقع البؤرة على الجزء الموجب لمحور السينات أي أن إحداثيات البؤرة ب (أ ، ٠)، $٠ < أ$ وبالاتعانة بالشكل المجاور، وحسب تعريف القطع المكافئ فإن:

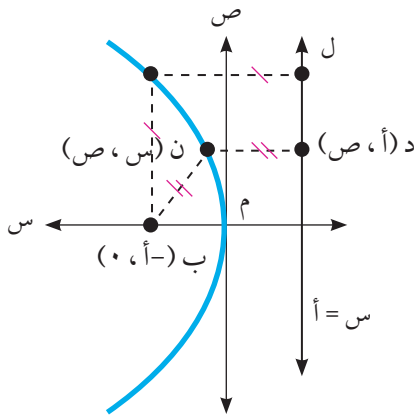
$$ن ب = ن د$$

$$\sqrt{٢(٠) + ٢(أ + س)} = \sqrt{٢(٠ - ص) + ٢(أ - س)}$$

أي أن: $٢(٠) + ٢(أ + س) = ٢(٠ - ص) + ٢(أ - س)$
 إذن معادلة هذا القطع المكافئ: $ص^٢ = ٤أ س$ (لماذا؟)

مثال ١: أكتب معادلة القطع المكافئ القياسي الذي بؤرته (٠، ٣)، ثم أجد معادلة دليله.

الحل: بما أن البؤرة (٠، ٣) فإن القطع مفتوح لليمين. إذن معادلته $ص^٢ = ٤أ س$ وكذلك بما أن البؤرة (٠، ٣) فإن $أ = ٣$ أي أن معادلته هي $ص^٢ = ١٢ س$ معادلة دليله هي $ص = ٣ - س$



الحالة الثانية: القطع المكافئ مفتوح لليسار

الرأس (٠ ، ٠) وتقع البؤرة على الجزء السالب من محور السينات أي أن: ب (٠، -أ)، $٠ < أ$ والمعادلة في هذه الحالة هي: $ص^٢ = -٤أ س$ (لماذا؟)

مثال ٢ :

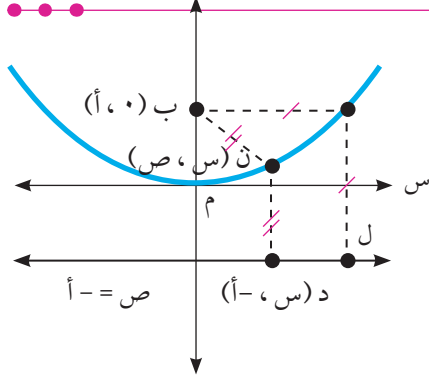
أكتب معادلة القطع المكافئ القياسي الذي معادلته دليله $s = 4$.

الحل :

بما أن القطع المكافئ بالصورة القياسية، إذن رأسه نقطة الأصل.

وبما أن معادلته دليله $s = 4$ إذن القطع المكافئ مفتوح لليسار، $4 = \frac{s}{a}$

إذن معادلة القطع المكافئ هي : $s = -\frac{1}{4}x^2$ إذن $s = -16$ $x = 4$



الحالة الثالثة: القطع المكافئ مفتوح للأعلى

الرأس $(0,0)$ وتقع البؤرة على الجزء الموجب من محور الصادات

أي أن $B(0, a)$ ، $a < 0$

والمعادلة في هذه الحالة هي : $s = \frac{4}{a}x^2$ (لماذا؟)

مثال ٣ :

ما إحداثيات البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ الذي معادلته : $s = 20 = \frac{s}{a}$

الحل :

$s = 20 = \frac{s}{a}$ هي معادلة قطع مكافئ مفتوح للأعلى

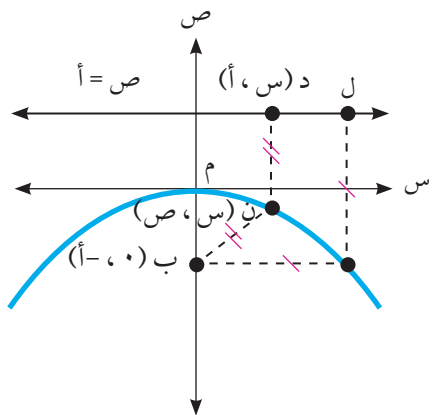
$20 = \frac{s}{a}$ ومنها $a = 5$ ومنها البؤرة $(0, 5)$ ، ومعادلة الدليل $s = 5$

الحالة الرابعة: القطع المكافئ مفتوح للأسفل

الرأس $(0,0)$ وتقع البؤرة على الجزء السالب من محور الصادات

أي أن : $B(0, -a)$ ، $a < 0$

والمعادلة في هذه الحالة هي : $s = -\frac{4}{a}x^2$



مثال ٤ :

قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(0, -3)$

أجد معادلته، ومعادلته دليله.

الحل :

بما أن البؤرة $(0, -3)$

إذن معادلته هي : $s = -\frac{4}{9}x^2$ $a = -9$

وبما أن $a = -9$ فإن $s = -\frac{4}{9}x^2$ ، ومعادلته دليله هي $s = -9$

١ أجد كلاً من: الرأس، و البؤرة، ومعادلة الدليل، ومعادلة محور التماثل، لكل من القطوع المكافئة الآتية:

أ ص $x^2 = 4 - y$

ب ص $x^2 = 8 - y$

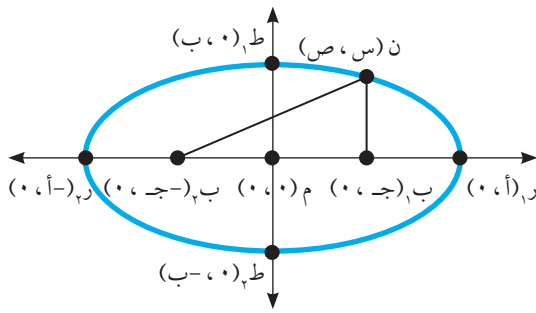
٢ أجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0, 0)$ ويمر بالنقطة $(-3, 6)$ ومحور تماثله محور السينات.

٣ قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ ومفتوح لجهة اليمين، فإذا كانت النقطة $(س, ٦)$ الواقعة عليه تبعد عن بؤرته ١٠ وحدات، أجد معادلة هذا القطع؟

تعريف: القطع الناقص هو المحل الهندسي للنقطة ن (س، ص) والتي تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتاً أكبر من البعد بينهما، تسمى النقطتان الثابتتان بالبؤرتين.

سنقتصر في هذا البند على الوضع القياسي للقطع الناقص وهو الوضع الذي يكون فيه المركز نقطة الأصل (٠، ٠)، ومحوراه ينطبقان على محوري الإحداثيات. وهناك حالتان للقطع الناقص:

الحالة الأولى: القطع الناقص السيني:



الشكل المجاور يمثل قطعاً ناقصاً سينياً، فيه:

- ١ البؤرتان: النقطتان $ب_١(ج، ٠)$ ، $ب_٢(-ج، ٠)$
- ٢ الرأسان: النقطتان $ر_١(أ، ٠)$ ، $ر_٢(٠، -أ)$
- ٣ المحور الأكبر وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين $ر_١$ ، $ر_٢$ وطوله $ن ب_١ + ن ب_٢ = ٢أ$ ، $٠ < أ$
- ٤ المحور الأصغر وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين $ط_١(ب، ٠)$ و $ط_٢(٠، -ب)$ وطوله $٢ب$ ، $ب < ٠$
- ٥ المركز وهي النقطة م (٠، ٠) والتي تقع في منتصف المسافة بين البؤرتين.
- ٦ البعد البؤري وهو البعد بين البؤرتين ويساوي $٢ج$ ($ج < ٠$)
- ٧ الاختلاف المركزي هـ وهو النسبة بين البعد البؤري إلى طول المحور الأكبر ويرمز له بالرمز هـ $= \frac{ج}{أ} > ١$ (لماذا؟) ويبين مدى تفلطح الشكل البيضاوي (الإهليلجي).
- ٨ معادلة هذا القطع هي: $١ = \frac{ص^٢}{ب^٢} + \frac{س^٢}{أ^٢}$ حيث $أ < ب$ ، $ج^٢ = أ^٢ - ب^٢$

مثال ١: تتحرك النقطة و(س، ص) في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين (٠، ٨) و(٠، -٨) يساوي ٢٠ وحدة.

- ١ أكتب معادلة هذا المحل الهندسي.
- ٢ أجد طول كل من محوريه واختلافه المركزي.

١ الحل : المحل الهندسي يمثل قطعاً ناقصاً سينياً لأن النقطتين الثابتين تقعان على محور السينات، فيه:

البؤرتان $(0, 8) = (0, ج - ٨)$ ومنها $ج = ٨$ ، $٢٠ = أ٢$ ومنها $أ = ١٠$ نجد قيمة ب:

$$أ٢ = ب٢ + ج٢ \Rightarrow ١٠٠ = ب٢ + ٦٤ \Rightarrow ب٢ = ٣٦ \Rightarrow ب = ٦.$$

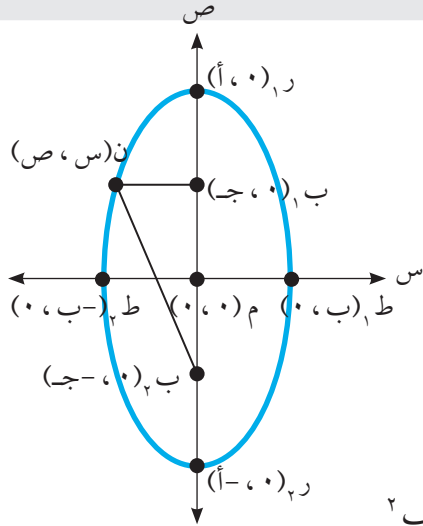
$$\text{معادلة هذا القطع هي: } ١ = \frac{ص٢}{٣٦} + \frac{س٢}{١٠٠} \quad , \quad ١ = \frac{ص٢}{ب٢} + \frac{س٢}{أ٢}$$

٢ طول المحور الأكبر = $أ٢ = ٢٠$

طول المحور الأصغر = $ب٢ = ١٢$

$$\frac{٨}{١٠} = \frac{ج}{أ} = \text{الاختلاف المركزي ه}$$

الحالة الثانية: القطع الناقص الصادي:



الشكل المقابل يمثل قطعاً ناقصاً صادياً:

نشاط ١:

١ مركزه هو

٢ رأساه هما

٣ بؤرتاه هما $(ج - ٨, ٠)$

٤ البعد البؤري =

٥ معادلة محوره الأكبر س = ٠ ، وطوله =

٦ معادلة محوره الأصغر =

٦ الاختلاف المركزي ه =

٨ معادلة هذا القطع هي: $١ = \frac{ص٢}{ب٢} + \frac{س٢}{أ٢}$ ، $أ٢ < ب٢$

جد معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات رأسيه $(١٠ \pm, ٠)$ وإحداثيات بؤرتيه $(٨ \pm, ٠)$.

مثال ٢:

الحل : القطع الناقص هو صادي لأن البؤرتين تقعان على محور الصادات

الحل :

$$١٠ = ج - ٨ \Rightarrow ج = ١٨ \Rightarrow ب٢ = أ٢ - ج٢ = ١٠٠ - ٣٢٤ = -٢٢٤ \Rightarrow ب٢ = ٦$$

$$\text{المعادلة هي } ١ = \frac{ص٢}{ب٢} + \frac{س٢}{أ٢} \quad \text{اذن} \quad ١ = \frac{ص٢}{٦} + \frac{س٢}{١٠٠}$$

مثال ٣ : قطع مخروطي معادلته $١٤٤ - ١٦س٢ - ٩ص٢ = ٠$

١ أحدد نوع هذا القطع ٢ أجد طولي محوريه. ٣ أجد إحداثيات بؤرتيه.

١ الحل :

١٤٤ - ١٦س^٢ - ٩ص^٢ = ٠ ، ومنها ١٤٤ = ٩ص^٢ + ١٦س^٢ بالقسمة على ١٤٤

$$١ = \frac{ص^٢}{٩} + \frac{س^٢}{١٦} ، هذه معادلة قطع ناقص صادي لماذا؟$$

$$٢ \quad ١٦ = ٢أ \Leftrightarrow ٨ = أ ، ٩ = ٢ب \Leftrightarrow ٣ = ب$$

طول المحور الاكبر = ٨ = ٢أ ، طول المحور الأصغر = ٢ = ٢ب

$$٣ \quad ٧ = ٩ - ١٦ = ٢ج \Leftrightarrow ٧ = ج = \sqrt{٧} ، البؤرتان (٠، \pm\sqrt{٧}) ، الرأسان (٠، \pm ٤)$$

تمارين ٤ - ٢

١ أضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ قطع ناقص معادلته $١ = \frac{ص^٢}{٢٥} + \frac{س^٢}{١٦}$ ، ما طول المحور الأكبر؟

أ) ٨ ب) ٥ ج) ١٠ د) ١٦

٢ قطع ناقص سيني مركزه (٠، ٠) وطول محوره الأكبر = ١٠ وحدات

وطول محوره الأصغر = ٦ وحدات ما معادلته؟

أ) $١ = \frac{ص^٢}{٩} + \frac{س^٢}{٢٥}$ ب) $١ = \frac{ص^٢}{٩} + \frac{س^٢}{١٦}$

ج) $١ = \frac{ص^٢}{٢٥} + \frac{س^٢}{٩}$ د) $١ = \frac{ص^٢}{١٦} + \frac{س^٢}{٩}$

٢ قطع مخروطي معادلته $٤س^٢ + ٩ص^٢ = ١$ ، أحدد نوع القطع، وأجد الرأسين والبؤرتين وجد طولي المحورين ومعادلتيهما.

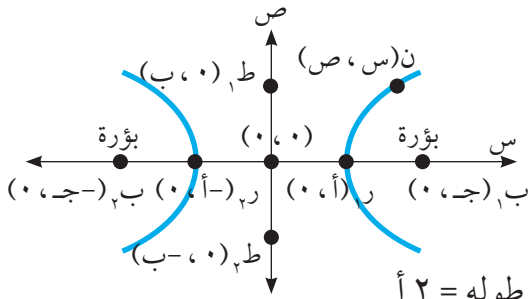
٣ قطع ناقص صادي البعد بين إحدى بؤرتيه والرأس القريب منها يساوي ٢ وحدة طول، والبعد بينها وبين الرأس البعيد منها يساوي ٨. أجد معادلة هذا القطع.

٤ النقطة (س، ص) تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعدها عن النقطتين (٠، ٥) و (٠، ٥) يساوي ١٢ وحدة ما المحل الهندسي للنقطة وما معادلته؟

تعريف: القطع الزائد هو المحل الهندسي للنقطة ن (س، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتاً أصغر من البعد بينهما، وتسمى النقطتان الثابتتان بالبؤرتين.

وسنقتصر في دراستنا هذه الدرس على الوضع القياسي للقطع الزائد وهناك حالتان:

الحالة الأولى: القطع الزائد السيني



يبين المنحنى المجاور قطعاً زائداً سينياً فيه:
البؤرتان $ب_١ (ج، ٠)$ ، $ب_٢ (٠، -ج)$ ، والبعد بينهما يسمى البعد البؤري للقطع الزائد $= ٢ ج$ ،
النقطة م $(٠، ٠)$ المركز.

الرأسان $ر_١ (٠، أ)$ ، $ر_٢ (٠، -أ)$ ، وهما طرفا المحور القاطع وطوله $= ٢ أ$
النقطتان $ط_١ (ب، ٠)$ ، $ط_٢ (٠، -ب)$ ، وهما طرفا المحور المرافق وطوله $= ٢ ب$.
ويشكل محورا القطع الزائد (القاطع والمرافق) محوري تماثل له.

معادلة هذا القطع هي $\frac{ص^٢}{ب^٢} - \frac{س^٢}{أ^٢} = ١$ ، حيث يكون معامل س^٢ موجباً.

الاختلاف المركزي للقطع الزائد $= هـ = \frac{ج}{أ} < ١$ ، $ج^٢ = أ^٢ + ب^٢$
ان $ب_١ - ن = ب_٢ = |أ٢|$ لأي نقطة مثل ن.

مثال ١: تتحرك النقطة ن (س، ص) في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين الثابتتين $(٠، ١٠ \mp)$ يساوي ١٦. أجد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن.

الحل ١: هذا المحل يمثل قطعاً زائداً سينياً فيه: م $(٠، ٠)$ ، $أ٢ = ١٦$ ومنها $أ = ٤$ ،

بؤرتاه $(٠، ١٠ \mp) = (٠، ج \mp)$

$\Leftarrow ج = ١٠$ ، $ج^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ، ومنها $ب = ٦$ معادلته:

$$١ = \frac{ص^٢}{٦^٢} - \frac{س^٢}{٤^٢} \Leftarrow ١ = \frac{ص^٢}{٣٦} - \frac{س^٢}{٦٤}$$

مثال ٢ :

١ قطع مخروطي معادلته $(٢س - ٣ص)(٢س + ٣ص) - ٣٦ = ٠$ أحدد نوع هذا القطع . ٢ أكتب عناصره.

الحل :

١ $(٢س - ٣ص)(٢س + ٣ص) - ٣٦ = ٠$ ، ومنها $٤س^٢ - ٩ص^٢ = ٣٦$ ،

$$وبالقسمة على ٣٦ ينتج ان: $١ = \frac{٢ص^٢}{٩} - \frac{٢س^٢}{٤}$$$

وهذه معادلة قطع زائد سيني (إشارة $س^٢$ موجبة) فيه :

٢ أ = ٣ ، ب = ٢ ، ج = $\sqrt{١٣}$ ، م = (٠ ، ٠) ، بؤرتاه $(٠ ، \mp ج) = (٠ ، \mp \sqrt{١٣})$

الرأسان $(٠ ، \mp أ) = (٠ ، \mp ٣)$. طول المحور القاطع = $٢أ = ٦$.

طول المحور المرافق = $٢ب = ٤$. الاختلاف المركزي = $هـ = \frac{\sqrt{١٣}}{٣} < ١$

الحالة الثانية:- القطع الزائد الصادي

يبين المنحنى المجاور قطعاً زائداً صادياً فيه:

البؤرتان $ب_١(٠ ، ج)$ ، $ب_٢(٠ ، -ج)$

والبعد بينهما يسمى البعد البؤري وطوله = $٢ج$

النقطة م (٠ ، ٠) المركز.

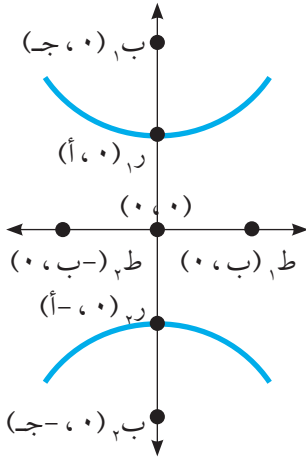
الرأسان $ر_١(٠ ، أ)$ ، $ر_٢(٠ ، -أ)$

وهما طرفا المحور القاطع وطوله = $٢أ$.

النقطتان $ط_١(٠ ، ب)$ ، $ط_٢(٠ ، -ب)$

وهما طرفا المحور المرافق وطوله = $٢ب$.

معادلة هذا القطع هي $١ = \frac{٢ص^٢}{٢ب} - \frac{٢س^٢}{٢أ}$



نشاط ١:

١ أكتب معادلته. ٢ أجد إحداثيات بؤرتيه. قطع مخروطي في وضع قياسي رأساه $(٠, ٦٧)$ ، واختلافه المركزي $= \frac{٥}{٣}$ ،

الرأسان $(٠, ٦٧)$ ، هـ $١ <$ اذن هذا قطع..... لماذا؟

$$\frac{٥}{٣} = \frac{ج}{أ} = هـ، ٦ = أ$$

إذن ج = ١٠، ب = ٨..... لماذا؟

١ معادلته هي:

٢ إحداثيات بؤرتيه هما.....

تمارين ٤ - ٣

١ أجد إحداثيات البؤرتين و الرأسين وطولي المحورين والاختلاف المركزي لكل من القطوع المخروطية التالية ثم أرسم منحنى تقريباً في كل حالة:

أ ٩س^٢ - ص^٢ = ٣٦ ب ٦ص^٢ - ٢س^٢ = ٣ ج ٩س^٢ - ١٦ص^٢ = ١

٢ قطع مخروطي معادلته $١٦س^٢ - ٩ص^٢ = ١٤٤$ = صفر، أجد الفرق المطلق للبعد بين النقطة

$$(٢، \frac{٥\sqrt{٣}}{٢})$$

و بؤرتي القطع.

٣ أجد معادلة القطع الزائد القياسي الذي طول محوره القاطع يساوي ٨ وحدات، واختلافه المركزي

$$هـ = \frac{٥}{٤} \text{ (أكتب جميع الحلول الممكنة).}$$

٤ - ٤ نهاية الاقتران عند نقطة ونظريات في النهايات

تعريف: إذا كان $q(s)$ اقتراناً معرفاً بجوار العدد a^* ، وكانت قيم $q(s)$ تقترب من العدد l كلما اقتربت قيم s من العدد a من جهة اليسار ومن جهة اليمين، فإن نهاية الاقتران $q(s)$ عندما s تقترب من العدد a تساوي l . ويعبر عن ذلك رياضياً على النحو الآتي: نهاية $q(s) = l$.

١) **أتعلم:** نهاية $q(s)$ تعني أن $s \neq a$ وإنما s عدد إما أن يكون أقل من العدد a بمقدار صغير جداً وتسمى النهاية في هذه الحالة النهاية من جهة اليسار، وتكتب رياضياً على النحو: نهاية $q(s)$. أو أن يكون أكبر من العدد a بمقدار صغير جداً، تسمى النهاية في هذه الحالة النهاية من جهة اليمين، وتكتب رياضياً على النحو: نهاية $q(s)$.

٢) حتى تكون نهاية $q(s)$ موجودة يجب أن تكون نهاية $q(s)$ = نهاية $q(s)$.

٣) لإيجاد نهاية $q(s)$ ليس من الضروري أن يكون $q(s)$ معرفاً عند $s = a$ وإنما يجب أن يكون $q(s)$ معرفاً بجوار العدد a .

نظرية (١): • إذا كان $q(s)$ اقتراناً كثير حدود فإن نهاية $q(s) = q(a)$.

• إذا كان $q(s) = \frac{K(s)}{H(s)}$ اقتراناً نسبياً فإن نهاية $q(s) = \frac{K(a)}{H(a)}$ ، $H(a) \neq 0$.

مثال ١: أجد نهاية كل مما يأتي:

١) نهاية $(s^3 - 2s + 5)$ $s \leftarrow 5$

٢) نهاية $\frac{s^3 - s + 4}{s + 3}$ $s \leftarrow 5$

١) نهاية $(s^3 - 2s + 5)$ $s \leftarrow 5$ = $9 = 5 + 4 - 8$

٢) نهاية $\frac{s^3 - s + 4}{s + 3}$ $s \leftarrow 5$ = $\frac{31}{2} = \frac{4 + 5 - 125}{8} = \frac{4 + s - 3}{s + 3}$

الحل:

نشاط ١: إذا كانت نهاية $(As + A^3) = 10$ ، أجد قيمة A .

نهاية $(As + A^3) = 10 = \dots\dots\dots$ $s \leftarrow A$

إذن $A^3 + A^3 - 10 = 0$ ، ومنها $A = \dots\dots\dots$

نظرية (٢): إذا كانت نهاق (س) = ل، نهاه (س) = م، ل، م ∃ ح فإن:

$$\bullet \text{ نهاق (س) } \pm \text{ نهاه (س)} = \text{نهاق (س)} \pm \text{نهاه (س)} = \text{ل} \pm \text{م}$$

$$\bullet \text{ نهاق (س)} = \text{ك نهاق (س)} = \text{ك ل، حيث ك } \exists \text{ ح}$$

$$\bullet \text{ نهاق (س)} \times \text{نهاه (س)} = \text{نهاق (س)} \times \text{نهاه (س)} = \text{ل} \times \text{م}$$

$$\bullet \text{ نهاق (س)} = \frac{\text{نهاق (س)}}{\text{نهاه (س)}} = \frac{\text{ل}}{\text{م}} \neq ٠$$

$$\bullet \text{ نهاق (س)}^{\text{ن}} = (\text{نهاق (س)})^{\text{ن}} = \text{ل}^{\text{ن}} \text{، حيث ن عدد صحيح موجب}$$

$$\bullet \text{ نهاق (س)}^{\frac{1}{\text{ن}}} = (\text{نهاق (س)})^{\frac{1}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ل}} \text{ بشرط أن ل} > ٠ \text{ عندما ن عدد زوجي}$$

مثال ٢: إذا كانت نهاق (س) = ٣، نهاه (س) = ٢- أجد قيمة ما يأتي:

$$١ \text{ نهاق (س)} + \text{نهاه (س)} = ٣ + ٢ = ٥$$

$$٢ \text{ نهاق (س)} = ٢ \times ٣ = ٦$$

$$٣ \text{ نهاق (س)} - \text{نهاه (س)} = ٣ \times ٣ - ٢ = ٩ - ٢ = ٧$$

$$٤ \text{ نهاق (س)} = \frac{\text{نهاق (س)}}{\text{نهاه (س)}} = \frac{٣}{٢}$$

$$٥ \text{ نهاق (س)} = ٣^٣ = ٢٧$$

$$٦ \text{ نهاق (س)} = ٣^٢ = ٩$$

$$٧ \sqrt{\text{نهاق (س)}} = \sqrt{٣} = \sqrt{٦ + ٣}$$

مثال ٣: أجد قيمة ما يأتي: ١ نهاه (س) - ٢ نهاه (س) = ٣ - ٢ = ١

$$٢ \text{ نهاه (س)} = ٢ \times ٣ = ٦$$

$$٣ \text{ نهاه (س)} = ٣^٣ = ٢٧$$

أتعلم: نقاط التحول: وهي النقاط التي تتغير قاعدة الاقتران في جوارها، وفي هذه الحالة نجد النهاية من اليمين ومن اليسار.

نشاط ٢:

إذا كان $ق(س) = [-\frac{1}{3}س + ٢]$ ، $س \in]٢-، ٤[$ ، أجد:

- ١ نهاق(س) $\xrightarrow{س \leftarrow ٢}$ ٢ نهاق(س) $\xrightarrow{س \leftarrow ١}$ ٣ نهاق(س) $\xrightarrow{س \leftarrow ٤}$

أعيد تعريف ق(س) وأكتبه على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

$$ق(س) = \left. \begin{array}{l} ٣ ، س = -٢ \\ ٢ ، ٢- > س \geq ٠ \\ ١ ، ٢ > س \geq ٠ \\ ٠ ، ٢ > س \geq ٤ \end{array} \right\}$$

١ لإيجاد نهاق(س) ألاحظ أن ق(س) يغير قاعدته في جوار $س = ٢$ (نقطة تحول) لذلك

أجد النهاية من اليسار واليمين: نهاق(س) $\xrightarrow{س \leftarrow ١} = ١$ ، بينما نهاق(س) $\xrightarrow{س \leftarrow ٢} = \dots\dots\dots$

بما أن نهاق(س) $\xrightarrow{س \leftarrow ٢} \neq$ نهاق(س) $\xrightarrow{س \leftarrow ١}$ ، إذن نهاق(س) $\xrightarrow{س \leftarrow ٢} = \dots\dots\dots$

٢ نهاق(س) $\xrightarrow{س \leftarrow ١} = \dots\dots\dots$ (ألاحظ أن $س = ١-$ هي نقطة داخلية، وليست نقطة تحول)

٣ نهاق(س) $\xrightarrow{س \leftarrow ٤} = \dots\dots\dots$ (ألاحظ أن $س = ٤$ هي نقطة طرفية)

أتعلم: إذا كان ق(س) = جاس ، فإن نهاق(س) = جا $\xrightarrow{س \leftarrow ١}$

إذا كان ق(س) = جتاس ، فإن نهاق(س) = جتا $\xrightarrow{س \leftarrow ١}$

نشاط ٣:

أجد قيمة ما يأتي:

- ١ نهيا(٥جتاس + ٢جا٢س) $\xrightarrow{س \leftarrow ٠}$ ٢ نهيا(جا٢س - جتا٤س) $\xrightarrow{س \leftarrow \pi}$

١ نهيا(٥جتاس + ٢جا٢س) = ٥جتا + ٢جا(٢ × ٠) = $\dots\dots\dots$ $\xrightarrow{س \leftarrow ٠}$

٢ نهيا(جا٢س - جتا٤س) = $\dots\dots\dots$ $\xrightarrow{س \leftarrow \pi}$

الحل :

١ إذا كانت نهياق (س) = ٢- ، نهيا هـ (س) = ١ أجد قيمة ما يأتي:

- أ نهيا $\frac{س ق (س)}{٢ هـ (س)}$ ب نهيا (ق (س) + ٢ س)°
 ج نهيا $\sqrt[٣]{٣ ق (س) + ١٠}$

٢ أجد قيمة ما يأتي:

- أ نهيا $\frac{س + ٢ س}{٣ + ٢ س}$ ب نهيا $\frac{\sqrt{٣ + ٢ ص}}{١ - ٢ ص}$
 ج نهيا (ع جتا πع + جا ٢ πع) د نهيا |س - ٢ س + ٦ س + ٥|

٣ إذا كان ق (س) = [١ + $\frac{١}{س}$] أجد ما يأتي:

- أ نهياق (س) ب نهيا (ق (س) + ٢ س)

٥ إذا كان ق (س) = أس^٢ + ٣س - ٢ ، نهياق (س) = ١٠ ، أجد نهيا (ق (س) + ٣).

٦ إذا كان ق (س) = $\left. \begin{array}{l} أس^٢ + ٢س + ٣ ، س \geq ٢ \\ أس + ١٠ ، س < ٢ \end{array} \right\}$

أجد قيمة أعلماً بأن نهياق (س) موجودة.

٤ - ٥ النهايات والصورة غير المعينة Limits and Indeterminate Forms

للبحث في نهاية الاقتران $\frac{ك(س)}{هـ(س)} = \frac{ك(س)}{هـ(س)}$ عندما $س$ تقترب من $أ$ ، والذي يعطي بالتعويض المباشر الصورة غير المعينة $\frac{0}{0}$ ، أبسط الاقتران بعدة طرق منها التحليل إلى العوامل أو الضرب بالمرافق، أو توحيد المقامات، ومن ثم أجد قيمة النهاية المطلوبة.

مثال ١ : أجد نها $\frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{0}{0}$ لذلك أبحث عن قيمة هذه النهاية:

$$\frac{س^٢ - ٤}{س + ٢} = \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س + ٢} = \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢} = \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$$

نشاط ١ : أجد: ١) نها $\frac{س^٣ - ٢س^٢}{س - ٣}$ ٢) نها $\frac{س^٢ + ٢س - ٢}{س - ١}$

٣) نها $\frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٨}$ ٤) نها $\frac{س^٤ - ٨١}{س - ٣}$

١) التعويض المباشر يعطي

$$\frac{س^٣ - ٢س^٢}{س - ٣} = \frac{س^٣ - ٢س^٢}{س - ٣} = \dots\dots\dots$$

٢) نها $\frac{س^٢ + ٢س - ٢}{س - ١} = \frac{(س - ١)(س + ٢)}{س - ١} = \dots\dots\dots = ٣$ (لماذا؟)

٣) نها $\frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٨} = \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س + ٢)(س - ٢)} = \dots\dots\dots$

٤) نها $\frac{س^٤ - ٨١}{س - ٣} = \frac{(س - ٣)(س^٣ + ٩س^٢ + ٢٧س + ٢٧)}{س - ٣} = \dots\dots\dots$

نشاط ٢ : أجد نها $\frac{س^٤ - ٤س}{س - ٤}$

$$\frac{س^٤ - ٤س}{س - ٤} = \dots\dots\dots = ٤$$

مثال ٢ : أجد قيمة $\frac{\sqrt{3-2+s}}{\sqrt{7-s}}$ هنا

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{1}{6}$ لذلك أبحث عن قيمة هذه النهاية من خلال الضرب بمرافق البسط

$$\frac{\sqrt{3-2+s}}{\sqrt{7-s}} \times \frac{\sqrt{3+2+s}}{\sqrt{3+2+s}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3+2+s}} \times \frac{\sqrt{9-2+s}}{\sqrt{7-s}} \text{ هنا (لماذا؟)}$$

$$= \frac{1}{6} = \frac{1}{3+3} \times 1 =$$

أتعلم: الضرب بالمرافق التربيعي، يعني جعل المقدار الجبري على صورة فرق بين مربعين.

نشاط ٣: أجد قيمة $\frac{\sqrt{2-2+s}}{\sqrt{1-s}}$ هنا

مرافق $\sqrt{2-2+s}$ هو $\sqrt{2+2+s}$ هو.....

$$\frac{\sqrt{2-2+s}}{\sqrt{1-s}} \times \frac{\sqrt{2+2+s}}{\sqrt{2+2+s}} = \dots\dots\dots$$

إذن $\frac{\sqrt{2-2+s}}{\sqrt{1-s}} = \dots\dots\dots$ (هل هناك طرق أخرى للحل؟)

مثال ٣ : أجد قيمة: $\frac{(\frac{1}{5} - \frac{1}{2+s})}{3-s}$ نها $\frac{1}{3-s}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{0}{3-s}$ لذلك أبحث عن قيمة هذه النهاية.
ألاحظ أن البسط يحتوي على كسر لذلك أوجد المقامات:

$$\frac{1-s}{(5)(2+s)(3-s)} \frac{نها}{3-s} = \frac{2-s-5}{(5)(2+s)(3-s)} \frac{نها}{3-s} = \frac{(\frac{1}{5} - \frac{1}{2+s})}{3-s} \frac{نها}{3-s}$$

$$\frac{1-s}{25} = \frac{1-s}{(5)(5)} = \frac{1-s}{(5)(2+s)} \frac{نها}{3-s}$$

تمارين ومسائل ٤ - ٥

١ أجد كلاً من النهايات الآتية:

أ $\frac{نها}{3-s} = \frac{2s+2}{4-2s}$

ب $\frac{نها}{5-s} = \frac{10+s-7}{s-5}$

ج $\frac{نها}{3-s} = \frac{5s^2+6s}{3-s}$

د $\frac{نها}{5-s} = \frac{\sqrt{2s+6}-4}{10-s}$

٢ إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{2s^2+2s-8}{2-s} \\ \frac{أس^2+س-4}{س^2+1} \end{array} \right\}$ ، س > ٢ ،
س < ٢ ،

أجد قيمة أ التي تجعل نها ق(س) موجودة.

٤ - ٦ نهايات الاقترانات الدائرية Limits Of Trigonometric Functions

نظرية: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ (حيث $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ بالتقدير الدائري)

أتعلم: ١) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، ٢) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ (حيث $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ بالتقدير الدائري)

مثال ١: أجد قيمة ما يأتي:

$$\text{١) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x} \quad \text{٢) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin 5x} \quad \text{٣) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin 5x}$$

$$\text{١) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x} = \frac{1}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \frac{5}{7}$$

$$\text{٢) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin 5x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{٣) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 3x)^2}{\sin 5x} = \frac{0^2}{0} = \frac{0}{0}$$

أجد ما يأتي:

$$\text{١) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 5x}{\sin 3x} \quad \text{٢) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin^2 3x}{\sin 3x + \sin^2 3x}$$

$$\text{١) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 5x}{\sin 3x} = \frac{0 - 0}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\text{تصبح النهاية على الصورة } \frac{0}{0} = \dots = \dots = \frac{1}{5}$$

$$\text{٢) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin^2 3x}{\sin 3x + \sin^2 3x} = \frac{0 + 0}{0 + 0} = \frac{0}{0}$$

$$\text{تصبح النهاية على الصورة } \frac{0}{0} = \dots = \dots = \frac{4}{10}$$

مثال ٢: أجد ما يأتي: ١) $\frac{1 - \text{جتا } 5 \text{ س}}{\text{س}^2}$

الحل: ١) $\frac{1 - \text{جتا } 5 \text{ س}}{\text{س}^2}$ ، أضرب كلا من البسط والمقام بمرافق البسط (١ + جتا ٥ س)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1 + \text{جتا } 5 \text{ س}} \times \frac{1 - \text{جتا } 5 \text{ س}}{\text{س}^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\text{جا}^2 5 \text{ س}}{\text{س}^2} = \frac{1}{2} \times \frac{25}{\text{س}^2} \\ &= \frac{1}{2} \times 25 \left(\frac{\text{جا } 5 \text{ س}}{\text{س}} \right)^2 \\ &= \frac{25}{2} = \frac{1}{2} \times 25 = \end{aligned}$$

تمارين ومسائل ٤ - ٦

١) أجد ما يأتي، وأتحقق:

ب) $\frac{1}{\text{س}^2 \text{ ظتا }^2 \pi \text{ س}}$

أ) $\frac{\text{نها } \text{ظا}^2 3 \text{ س}}{\text{جا}^2 7 \text{ س}}$

د) $\frac{3 - \text{جا } \text{س}}{5 \text{ ظتا } 3 \text{ س}}$

ج) $\frac{\text{نها } \text{ظا } \text{س} \text{ جا } 5 \text{ س}}{\text{س}^3}$

٢) إذا كان ق(س) = $\frac{\sqrt{\text{جا } \text{س}}}{\text{س}}$ ، أجد نها ق(س).

٣) إذا كانت نها أ - جتا ب س = $\frac{9}{4}$ ، أجد قيم أ، ب.

- نظرية: ١ إذا كان ق (س) = $\frac{أ}{س}$ ، س $\neq ٠$ فإن نها ق (س) = ٠
 ٢ إذا كان ق (س) = ج فإن نها ق (س) = ج

مثال ١ : أجد ما يأتي:

١ نها $\frac{٥-}{س}$ ● ٢ نها $\frac{٧}{س}$

الحل : ١ نها $\frac{٥-}{س} = ٠$ ● ٢ نها $\frac{٧}{س} = ٧$

مثال ٢ : أجد نها (س^٣ - ٢س + ٥)

الحل : نها (س^٣ - ٢س + ٥) = نها (س^٣ + ٠ - ٢س + ٥) = $\frac{٥}{س} + \frac{٢}{س} - ١ + ٥ = ٤ - ١ = ٣$

مثال ٣ : أجد ما يأتي:

١ نها $\frac{٥س^٢ + ٣س + ٥}{س^٢ + ٣}$ ● ٢ نها $\frac{س^٣ + ٢س - ٢}{س^٢ - ١}$

٣ نها $\frac{س^٢ + ٨ - س}{س^٣ + ٢س - ٥}$

الحل : ١ نها $\frac{٥س^٢ + ٣س + ٥}{س^٢ + ٣} = \frac{٥ + \frac{٣}{س} + \frac{٥}{س^٢}}{١ + \frac{٣}{س^٢}} = \frac{٥ + ٠ + ٠}{١ + ٠} = ٥$

٢ نها $\frac{س^٣ + ٢س - ٢}{س^٢ - ١} = \frac{٢ - \frac{٢}{س} + ١}{١ - \frac{١}{س^٢}} = \frac{٢ - ٠ + ١}{١ - ٠} = ٣$ (لماذا؟)

٣ نها $\frac{س^٢ + ٨ - س}{س^٣ + ٢س - ٥} = \frac{٨ - س + ١}{\frac{٥}{س} - \frac{٢}{س} + ١} = \frac{٨ - س + ١}{٣ - ٢ + ١} = ٠$ صفر

١ أجد ما يأتي :

ب) نهيا $\frac{(س+٥)(٣+٢س)}{٢(٣+٢س)}$ $\leftarrow \infty$

أ) نهيا $(س-٤)(١٥+س)$ $\leftarrow \infty$

د) نهيا $\left(\frac{٢-٢س}{٥-٢س+٢س٣}\right)$ $\leftarrow \infty$

ج) نهيا $\left(\frac{٢+س}{١+س} - \frac{٢-٢س}{١-س}\right)$ $\leftarrow \infty$

هـ) نهيا $\left(\frac{|٥-٢س٣|}{٣+٢س٣}\right)$ $\leftarrow \infty$

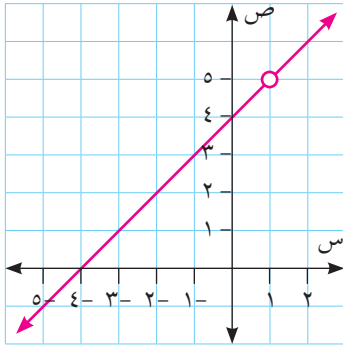
٢ إذا كانت نهيا $\left(\frac{(٢-أ)س+٤س٣+٢س٢-١}{٣+٢س٣+٢س}\right) = ١$ ، أجد قيم أ ، ب .

تعريف: إذا كان ق(س) اقتراناً، أ عدداً حقيقياً ينتمي لمجال ق(س)، فإن ق(س) اقتران متصل عند س = أ إذا كان:

- ١ ق(س) معرفاً عند س = أ
- ٢ نهـاق ق(س) موجودة كعدد حقيقي.
- ٣ نهـاق ق(س) = ق(أ)

مثال ١: إذا كان ق(س) = $\frac{س^٢ + ٣س - ٤}{س - ١}$ ، أبحث في اتصال ق(س) عند س = ٣، س = ١

الحل: عندما س = ٣، ق(٣) = $\frac{٤ - (٣)٣ + ٢(٣)}{١ - ٣} = ٧$ ، نهـاق ق(س) = $\frac{٤ - (٣)٣ + ٢(٣)}{١ - ٣}$



نهـاق ق(س) = ق(٣)، إذن ق(س) متصل عند س = ٣

ق(س) غير معرف عند س = ١

إذن ق(س) غير متصل عند س = ١
(ألاحظ أن نهـاق ق(س) موجودة).

مثال ٢: إذا كان ق(س) = $\frac{س^٢ + ٣س - ٥}{س^٢ - ٣س + ١}$ ، أبحث في اتصال ق(س) عند س = ٥، س = ٣، س = ٢، س = ١، س = ٠

أبحث في اتصال ق(س) عند س = ٥، س = ٣، س = ٢، س = ١، س = ٠

الحل: ١ عندما س = ٠، ق(٠) = ٠ + ٠ - ٥ = -٥، س = ٣ - ٥ = -٢

نهـاق ق(س) = نهـاق (س + ٣ - ٥) = -٢

ق(٠) = نهـاق ق(س)، إذن ق(س) متصل عند س = ٠

٢ عندما س = ١ (ألاحظ أن س = ١ نقطة تحول)،

$$ق(1) = \sqrt[3]{1 + 1 - 1} = 1$$

$$ق(س) = \sqrt[3]{س + 2 - 3} = 1 - س$$

$$ق(س) = \sqrt[3]{س - 3 + 1} = 1 - س$$

$$ق(س) \neq ق(س)$$

$$ق(س) \text{ غير موجودة، إذن } ق(س) \text{ منفصل عند } س = 1$$

٣ عند س = ٢

$$ق(2) = \sqrt[3]{1 + 2 - 2} = 1$$

$$ق(س) = \sqrt[3]{س + 2 - 2} = س$$

$$ق(2) = ق(س) = 2 \text{، إذن } ق(س) \text{ متصل عند } س = 2$$

٤ عند س = ٣ (ألاحظ أنه عند س = ٣ يوجد نقطة تحول)

$$ق(3) = \sqrt[3]{1 + 3 - 3} = 1$$

$$ق(س) = \sqrt[3]{س - 3 + 1} = 1 - س$$

$$ق(س) = ق(س) = 5 \text{، إذن } ق(س) \text{ متصل عند } س = 5$$

$$ق(س) = ق(س) = 3 \text{، إذن } ق(س) \text{ متصل عند } س = 3$$

٥ عندما س = ٥

$$ق(5) = ق(س) = 5 \text{، } ق(س) = 5$$

$$ق(5) = ق(س) = 5 \text{، إذن } ق(س) \text{ متصل عند } س = 5$$

أتعلم: إذا كان ق(س) اقتراناً متعدد القاعدة، ويغير قاعدته عند س = أ

فإن ق(س) متصل عند س = أ، إذا كان ق(س) = ق(س) = ق(أ)

إذا كان ق(س) = $\frac{|س - 2|}{س - 2}$ ، س ≠ ٢، أبحث في اتصال ق(س) عندما س = ٢
أعيد تعريف ق(س) وأكتبه على صورة اقتربان متعدد القاعدة على النحو الآتي:

نشاط ١

$$\dots\dots\dots = \text{ق(س)}$$

$$\dots\dots\dots = \text{ق(٢)}$$

$$\text{نهماق(س)} = \dots\dots\dots \text{، نهماق(س)} = \dots\dots\dots \text{، إذن نهماق(س)} \dots\dots\dots$$

$$\text{ق(٢)} \dots\dots\dots \text{نهماق(س)} \text{، ومنها} \dots\dots\dots$$

$$\text{إذا كان ق(س)} = \text{س} + \left[\frac{\text{س}}{٢}\right] \text{، س} \in [٢-، ٤] \text{ أبحث في اتصال ق(س)}$$

$$\text{عند س} = ١-، ٢.$$

مثال ٣:

الحل: أعيد تعريف ق(س)، وأكتب ق(س) على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} - ١ ، \text{س} \geq ٢- \\ \text{س} ، \text{س} \geq ٠ \\ \text{س} + ١ ، \text{س} \geq ٢ \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$

$$\text{عندما س} = ١- \quad \text{①}$$

$$\text{ق(١-)} = ١- - ١- = ٢- ، \text{نهماق(س)} = \text{نهماق(س-١)}$$

$$\text{ق(١-)} = \text{نهماق(س-١)} \text{، إذن ق(س) متصل عند س} = ١-$$

$$\text{عندما س} = ٢ \text{ (ألاحظ أن س} = ٢ \text{ نقطة تحول)} \quad \text{②}$$

$$\text{ق(٢)} = ١ + ٢ = ٣$$

$$\text{نهماق(س)} = \text{نهماق(س-٢)} \text{، إذن ق(س) منفصل عند س} = ٢ \text{ (لماذا؟)}$$

ماذا ألاحظ في سلوك الإقتران عند س = ٢؟

نظرية: إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = أ، فإن كلا من الاقترانات الآتية:

متصلة عند س = أ:

- ① $\text{ق} \pm \text{هـ(س)}$
- ② $\text{ق} \times \text{هـ(س)}$
- ③ $\text{ك} \times \text{ق(س)}$ ، حيث ك عدد ثابت.
- ④ $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)$ (س)، بشرط أن هـ(أ) $\neq ٠$
- ⑤ $\sqrt[n]{\text{ق(س)}}$: بشرط أن ق(أ) > ٠ ، إذا كانت زوجية (لماذا؟)

- أتعلم: ١ إذا كان ق (س) اقتراناً كثير حدود فإن ق (س) اقتران متصل \forall س \exists ح.
- ٢ إذا كان ق (س) اقتراناً نسبياً فإن ق (س) اقتران متصل \forall س \exists ح - {أصفار المقام}.
- ٣ إذا كان ق (س) اقتراناً متصلاً \forall س \exists ح فإن ق (س) اقتران متصل \forall س \exists ح ، ن عدد صحيح موجب.
- ٤ إذا كان ق (س) = جاس فإن ق (س) اقتران متصل \forall س \exists ح.
- ٥ إذا كان ق (س) = جتاس فإن ق (س) اقتران متصل \forall س \exists ح.
- ٦ إذا كان ق (س) = |هـ(س)|، فإن ق (س) اقتران متصل \forall س \exists ح ، عندما هـ(س) متصل.

مثال ٤ :

أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية:

١ ق (س) = س^٢جتاس - $(\frac{٣+س}{٤+٢س})$

٢ ك(س) = |س^٢ - ١٢| + ٥

١ الحل : ق (س) = س^٢جتاس - $(\frac{٣+س}{٤+٢س})$ متصل \forall س \exists ح لأنه حاصل طرح اقرانين متصلين. س^٢جتاس متصل لأنه حاصل ضرب اقرانين متصلين، $(\frac{٣+س}{٤+٢س})$ متصل \forall س \exists ح لأنه اقتران نسبي والمقام لا يساوي صفراً.

٢ ك(س) = |س^٢ - ١٢| + ٥ متصل \forall س \exists ح لأنه حاصل جمع اقرانين متصلين. (٥ اقتران متصل \forall س \exists ح لأنه اقتران ثابت، |س^٢ - ١٢| اقتران متصل \forall س \exists ح لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران كثير حدود متصل \forall س \exists ح)

أتعلم: إذا كان ق (س) اقتراناً معرفاً على [أ، ب] فإن:

ق (س) اقتران متصل \forall س \exists [أ، ب] إذا كان:

- ق (س) اقتراناً متصلاً عند كل نقطة في [أ، ب]
- ق (س) متصلاً عند س = أ من جهة اليمين.
- ق (س) متصلاً عند س = ب من جهة اليسار.

مثال ٥ : إذا كان ق (س) = $\left. \begin{array}{l} س^٢ - ١ ، ١ - س \geq ٠ > ٠ \\ جتا(٢\pi س) ، ٠ \geq س > ٢ \\ ١٠ ، س = ٢ \end{array} \right\}$

أبحث في اتصال ق (س) في [-١، ٢]

الحل :

١ عندما $1 \geq s > 0$ ، ق(س) = $s^2 - 1$ متصل لأنه كثير حدود.

$0 < s < 2$ ، ق(س) = جتا($2\pi s$) متصل لأنه اقتران جتا س.

٢ عندما $s = 2$ ، (نقطة طرفية) : ق(2) = 10

نهاق ق(س) = 1 ، ومنها ق(2) \neq نهاق ق(س)
 $_{-2 \leftarrow s}$ $_{-2 \leftarrow s}$

ومنها ق(س) منفصل عند $s = 2$ من جهة اليسار.

٣ عندما $s = 0$ ، (نقطة تحول) : ق(0) = 1 ، نهاق ق(س) = نهاق جتا($2\pi s$) = 1
 $_{+0 \leftarrow s}$ $_{+0 \leftarrow s}$

نهاق ق(س) = نهاق (س) = 1 - 1 = 0 ، ومنها ق(س) منفصل عند $s = 0$ = صفر

إذن ق(س) متصل $\forall s \in]-1, 2[$ ، $]-2, 1[$ - {صفر} (ق(س) غير متصل على $]-2, 1[$)

تمارين ومسائل ٤ - ٨

١ أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية عند النقطة المطلوبة:

أ ق(س) = $|s^2 + 2s - 8|$ ، عندما $s = 2$

ب ق(س) = $s^2 \times [s - 2, 0]$ ، عندما $s = 8, 0$

٢ إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} s \neq 3 , \frac{\sqrt{5s - 1} - s}{3 - s} \\ s = 3 , 2 \end{array} \right\}$ ، أبحث في اتصال ق(س) عندما $s = 3$.

٣ أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية على مجالها:

أ ق(س) = $|3s - 3| + 2s$ ، $s \in \mathbb{R}$.

ب ق(س) = $[1 - \frac{s}{3}]$ ، $s \in]-3, 5[$.

٤ إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} s^2 + 3 , 1 - s \geq 1 > 1 \\ 2 + s , 1 \geq s > 3 \\ 2 + s , 3 \geq s > 5 \\ 1 + s \end{array} \right\}$

أجد قيم أ ، ب التي تجعل ق(س) متصلاً على مجاله.

- ١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:
 - ١ ما معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(٠, ٠)$ وبؤرته $(٢, -٠)$?
 - أ) $س^٢ = ٨$ ص (ب) $س^٢ = ٨ -$ ص (ج) $س^٢ = ٨$ ص (د) $س^٢ = ٨ -$ ص
 - ٢ ما معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله $س = ٥, ٢$?
 - أ) $س^٢ = ١٠$ ص (ب) $س^٢ = ١٠ -$ ص
 - ج) $س^٢ = ١٠$ ص (د) $س^٢ = ١٠ -$ ص
 - ٣ إذا كان القطع المكافئ $س^٢ = ٤$ أس يمر بالنقطة $(١, ٢)$ فما معادلة دليل هذا القطع؟
 - أ) $س = ١ -$ ص (ب) $س = ١$ ص (ج) $س = ١ -$ ص (د) $س = ١$ ص
 - ٤ ما نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $س^٢ = \frac{ص^٢}{١٦} + \frac{س^٢}{٩}$?
 - أ) قطع ناقص صادي (ب) قطع ناقص سيني
 - ج) قطع زائد سيني (د) قطع زائد صادي
 - ٥ ما البعد البؤري للقطع $٣٦ س^٢ + ١٠٠ ص^٢ = ٣٦٠٠$?
 - أ) ١٢ وحدة (ب) $\sqrt{١٣٦}$ وحدة (ج) ٨ وحدات (د) ١٦ وحدة
 - ٦ إذا كانت $نها (٣ ق س) = ٢ - (س)$ ، ما قيمة $نها (س)$?
 - أ) ٢ - (ب) ١ - (ج) ١ (د) ٢
 - ٧ إذا كان $ق (٢ -) = ٣$ ، $نها (س) = ٥ -$ ، ما قيمة $نها (٣ ق س)$?
 - أ) ١٥ - (ب) ٦ - (ج) ٣ (د) ٩
 - ٨ إذا كان $ق (س) = س^٢ - ١$ ، $هـ (س) = \frac{١}{١ - س}$ ، ما قيمة $نها (ق \times هـ)$ (س)?
 - أ) كمية غير معرفة (ب) ١ - (ج) ٢ (د) ٥
 - ٩ ما قيمة $نها \frac{٢}{\pi}$ جا $\frac{\pi}{٢}$?
 - أ) ١ - (ب) π (ج) $\frac{١}{\pi}$ (د) ١

١٠ ما قيمة نها $\frac{5-3^3}{3+3^3}$ $\lim_{s \rightarrow \infty}$ ؟

أ) $-\infty$ ب) ٣

ج) ٥ د) ∞

٢ إذا كان ق(س) = $\frac{s^2 - (3-2)s - 6}{s-3}$ ، $s \neq 3$ ،
 ، $s = 3$ ، $\frac{11}{11}$ }

اقتراناً متصلاً على ح أجد قيمة/ قيم ب.

٣ إذا كانت نها $\frac{(s+1)^2}{s^2(1+s)}$ $\lim_{s \rightarrow \infty}$ $-\frac{2}{n}$ ، أجد قيم كل من أ، ن .

٤ المعادلتان $s = 2n^2$ ، $s = 6n$ حيث $n \leq 0$ ، تحددان موقع جسم على منحنى في اللحظة ن، أكتب معادلة المنحنى الذي يتحرك عليه الجسم على صورة $s = ق(ص)$ ، وأعين نوع المنحنى.



٥ تشتهر المباني الفلسطينية القديمة بأقواسها، إذا كان طول قاعدة أحد الأقواس في سجن عكا على شكل قطع مكافئ يساوي ٨م، وبعد أعلى نقطة في القوس عن قاعدته يساوي ٣م، أكتب معادلة هذا القوس (علماً أنه في الوضع القياسي).

ورقة عمل (٤)

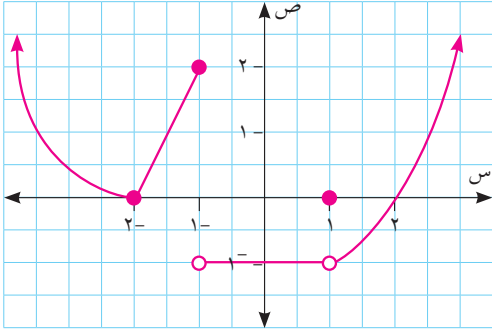
١ قطع مكافئ قياسي يمر بالنقطة (٢، ٨). أكتب معادلته (أكتب جميع الحالات الممكنة).

٢ أجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره القاطع ينطبق على محور الصادات ويمر بالنقطتين (٤، ٦)، (١، -٣)؟

٣ أجد بؤرتي القطع الزائد $1 = \frac{ص^2}{١٦-د} - \frac{ص^2}{د-٢٥}$

٤ جسر على شكل نصف قطع ناقص، محوره الأكبر أفقي، إذا كان طول قاعدة القوس ٢٤ م، وتبعد أعلى نقطة في القوس فوق الطريق الأفقية ٦ م، أجد ارتفاع القوس على بعد ٤ م من مركز القاعدة.

٥ إذا كانت نها $\frac{ص(١+ص^٢)}{ص(١+ص)^٢}$ أس ∞ ، أجد قيم كل من أ، ن.



٦ يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران

ق(س) المعروف على ح، بالاعتماد

عليه أجب عن الأسئلة الآتية:

أ أجد الإحداثيات السينية لنقاط انفصال ق(س).

ب هل ق(س) متصل على $[-٢، ١-]$ ، ولماذا؟

ج هل ق(س) متصل $[-١، \infty]$ ، ولماذا؟

د هل ق(س) متصل $[-\infty، ٢-]$ ، ولماذا؟

هـ هل ق(س) متصل على مجاله، ولماذا؟

٧ أجد ما يأتي:

ب نها $\frac{١-جتا٥س}{سجتا٥س}$ أس ∞

أ نها $\frac{جتا٣س-جتا٥س}{١-جتا٧س}$ أس ∞

نموذج امتحان الفصل الثاني



س١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١. معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠، ٠) وبؤرته (٠، ٥) هي:

(أ) ص $٢٠ - = ٢$ س. (ب) ص $٢٠ = ٢$ س. (ج) ص $٢٠ = ٢$ ص. (د) ص $٢٠ - = ٢$ ص.

٢. المعادلة $\frac{٢س}{ك-٢} + \frac{ص}{ك} = ١$ ، ك < ٥ تمثل معادلة قطع:

(أ) زائد سيني. (ب) زائد صادي. (ج) ناقص سيني. (د) ناقص صادي.

٣. إذا كان ٥ (س) اقتراناً متصلاً على ٤ ، وكانت $٥(٥ + س - ٢) - ٢ = ٨١$ فإن ٥ (س) تساوي:

(أ) ٨، ٤. (ب) ٢٠. (ج) ٤. (د) ٢، ٣.

٤. الاقتران ٥ (س) = $[٤، ٥ + س]$ متصل عند س تساوي:

(أ) صفر. (ب) ٦، ٥. (ج) ٦، ١. (د) ٤، ٥.

٥. $\frac{٢س - ٢}{٣س - ٤} = \frac{٣ + س}{٣س - ٤}$ يساوي:

(أ) ٥، ٥. (ب) ٥، ٥. (ج) ∞ . (د) صفر.

٦. $\frac{|٩ - ٢س|}{٣س - ٣}$:

(أ) ٦. (ب) -٦. (ج) صفر. (د) غير موجودة.

٧. $\frac{٣س - ٣}{٤س - ٢} = \frac{٣س - ٣}{٤س - ٢}$ تساوي:

(أ) ١. (ب) ١. (ج) $\frac{١}{٢}$. (د) $\frac{٣}{٢}$.

٨. قطع ناقص معادلته $٨س + ٩ص = ٧٢$ ، ما طول محوره الأكبر؟

(أ) ٦. (ب) ٣. (ج) $٢\sqrt{٤}$. (د) ٢.

س٢: أبحث في اتصال كل من الاقتارات الآتية على مجالها:

أ. ق(س) = جا٢س + جا٣س - |٣ - س| ، س ∈ ح.

ب. ق(س) = [١ - $\frac{س}{٣}$] ، س ∈ [-٣، ٥].

س٣: أ) جد معادلة منحنى القطع الزائد الذي مركزه (٠، ٠)، والبعد بين بؤرتيه ١٠، واختلافه المركزي $\frac{٥}{٣}$ ، ومحوره القاطع ينطبق على محور السينات، ثم ارسم منحناه.

$$\left. \begin{array}{l} ١ < س ، \quad \frac{\sqrt{٢ - ٣ + س}}{١ - س} \\ ١ = س ، \quad ٢ \\ ١ > س ، \quad س + ٢ \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان } \text{ب}$$

متصلاً على ح، جد قيم الثابتين أ، ب.

س٤: أ) جد: ١- $\frac{٦٤ - ٦(١ + س)}{س - ٢}$ ٢- $\frac{٦٤ - ٦(١ + س)}{س - ٢}$ ٣- $\frac{٦٤ - ٦(١ + س)}{س - ٢}$

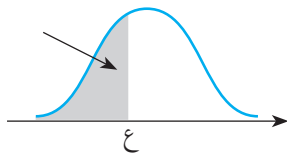
ب) تتحرك النقطة ه (س، ص) في المستوى، بحيث يكون مجموع بعدها عن النقطتين (٤، ٠)، (٠، ٤) يساوي ١٠ وحدات دائرياً.

أوجد معادلة المحل الهندسي لهذه النقطة.

ملحق قوانین ریاضیة:

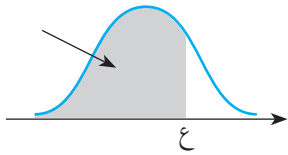
- ۱ • $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- ۲ • $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$
- ۳ • $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
- ۴ • $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$
- ۵ • $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$

$$\left. \begin{array}{l} \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ 1 - 2\sin^2 \theta \\ 2\cos^2 \theta - 1 \end{array} \right\} = \cos 2\theta$$



ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

٠,٠٩	٠,٠٨	٠,٠٧	٠,٠٦	٠,٠٥	٠,٠٤	٠,٠٣	٠,٠٢	٠,٠١	٠,٠٠	ε
٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٣,٧-
٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٣,٦-
٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٣,٥-
٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٣,٤-
٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٣,٣-
٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٣,٢-
٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠١٠	٣,١-
٠,٠٠١٠	٠,٠٠١٠	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٣,٠-
٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٧	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٩	٢,٩-
٠,٠٠١٩	٠,٠٠٢٠	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢٢	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٤	٠,٠٠٢٥	٠,٠٠٢٦	٢,٨-
٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٢٧	٠,٠٠٢٨	٠,٠٠٢٩	٠,٠٠٣٠	٠,٠٠٣١	٠,٠٠٣٢	٠,٠٠٣٣	٠,٠٠٣٤	٠,٠٠٣٥	٢,٧-
٠,٠٠٣٦	٠,٠٠٣٧	٠,٠٠٣٨	٠,٠٠٣٩	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٤١	٠,٠٠٤٣	٠,٠٠٤٤	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٤٧	٢,٦-
٠,٠٠٤٨	٠,٠٠٤٩	٠,٠٠٥١	٠,٠٠٥٢	٠,٠٠٥٤	٠,٠٠٥٥	٠,٠٠٥٧	٠,٠٠٥٩	٠,٠٠٦٠	٠,٠٠٦٢	٢,٥-
٠,٠٠٦٤	٠,٠٠٦٦	٠,٠٠٦٨	٠,٠٠٦٩	٠,٠٠٧١	٠,٠٠٧٣	٠,٠٠٧٥	٠,٠٠٧٨	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٨٢	٢,٤-
٠,٠٠٨٤	٠,٠٠٨٧	٠,٠٠٨٩	٠,٠٠٩١	٠,٠٠٩٤	٠,٠٠٩٦	٠,٠٠٩٩	٠,٠١٠٢	٠,٠١٠٤	٠,٠١٠٧	٢,٣-
٠,٠١١٠	٠,٠١١٣	٠,٠١١٦	٠,٠١١٩	٠,٠١٢٢	٠,٠١٢٥	٠,٠١٢٩	٠,٠١٣٢	٠,٠١٣٦	٠,٠١٣٩	٢,٢-
٠,٠١٤٣	٠,٠١٤٦	٠,٠١٥٠	٠,٠١٥٤	٠,٠١٥٨	٠,٠١٦٢	٠,٠١٦٦	٠,٠١٧٠	٠,٠١٧٤	٠,٠١٧٩	٢,١-
٠,٠١٨٣	٠,٠١٨٨	٠,٠١٩٢	٠,٠١٩٧	٠,٠٢٠٢	٠,٠٢٠٧	٠,٠٢١٢	٠,٠٢١٧	٠,٠٢٢٢	٠,٠٢٢٨	٢,٠-
٠,٠٢٣٣	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٤٤	٠,٠٢٥٠	٠,٠٢٥٦	٠,٠٢٦٢	٠,٠٢٦٨	٠,٠٢٧٤	٠,٠٢٨١	٠,٠٢٨٧	١,٩-
٠,٠٢٩٤	٠,٠٣٠١	٠,٠٣٠٧	٠,٠٣١٤	٠,٠٣٢٢	٠,٠٣٢٩	٠,٠٣٣٦	٠,٠٣٤٤	٠,٠٣٥١	٠,٠٣٥٩	١,٨-
٠,٠٣٦٧	٠,٠٣٧٥	٠,٠٣٨٤	٠,٠٣٩٢	٠,٠٤٠١	٠,٠٤٠٩	٠,٠٤١٨	٠,٠٤٢٧	٠,٠٤٣٦	٠,٠٤٤٦	١,٧-
٠,٠٤٥٥	٠,٠٤٦٥	٠,٠٤٧٥	٠,٠٤٨٥	٠,٠٤٩٥	٠,٠٥٠٥	٠,٠٥١٦	٠,٠٥٢٦	٠,٠٥٣٧	٠,٠٥٤٨	١,٦-
٠,٠٥٥٩	٠,٠٥٧١	٠,٠٥٨٢	٠,٠٥٩٤	٠,٠٦٠٦	٠,٠٦١٨	٠,٠٦٣٠	٠,٠٦٤٣	٠,٠٦٥٥	٠,٠٦٦٨	١,٥-
٠,٠٦٨١	٠,٠٦٩٤	٠,٠٧٠٨	٠,٠٧٢١	٠,٠٧٣٥	٠,٠٧٤٩	٠,٠٧٦٤	٠,٠٧٧٨	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٠٨	١,٤-
٠,٠٨٢٣	٠,٠٨٣٨	٠,٠٨٥٣	٠,٠٨٦٩	٠,٠٨٨٥	٠,٠٩٠١	٠,٠٩١٨	٠,٠٩٣٤	٠,٠٩٥١	٠,٠٩٦٨	١,٣-
٠,٠٩٨٥	٠,١٠٠٣	٠,١٠٢٠	٠,١٠٣٨	٠,١٠٥٦	٠,١٠٧٥	٠,١٠٩٣	٠,١١١٢	٠,١١٣١	٠,١١٥١	١,٢-
٠,١١٧٠	٠,١١٩٠	٠,١٢١٠	٠,١٢٣٠	٠,١٢٥١	٠,١٢٧١	٠,١٢٩٢	٠,١٣١٤	٠,١٣٣٥	٠,١٣٥٧	١,١-
٠,١٣٧٩	٠,١٤٠١	٠,١٤٢٣	٠,١٤٤٦	٠,١٤٦٩	٠,١٤٩٢	٠,١٥١٥	٠,١٥٣٩	٠,١٥٦٢	٠,١٥٨٧	١,٠-
٠,١٦١١	٠,١٦٣٥	٠,١٦٦٠	٠,١٦٨٥	٠,١٧١١	٠,١٧٣٦	٠,١٧٦٢	٠,١٧٨٨	٠,١٨١٤	٠,١٨٤١	٠,٩-
٠,١٨٦٧	٠,١٨٩٤	٠,١٩٢٢	٠,١٩٤٩	٠,١٩٧٧	٠,٢٠٠٥	٠,٢٠٣٣	٠,٢٠٦١	٠,٢٠٩٠	٠,٢١١٩	٠,٨-
٠,٢١٤٨	٠,٢١٧٧	٠,٢٢٠٦	٠,٢٢٣٦	٠,٢٢٦٦	٠,٢٢٩٦	٠,٢٣٢٧	٠,٢٣٥٨	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٠	٠,٧-
٠,٢٤٥١	٠,٢٤٨٣	٠,٢٥١٤	٠,٢٥٤٦	٠,٢٥٧٨	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٣	٠,٢٦٧٦	٠,٢٧٠٩	٠,٢٧٤٣	٠,٦-
٠,٢٧٧٦	٠,٢٨١٠	٠,٢٨٤٣	٠,٢٨٧٧	٠,٢٩١٢	٠,٢٩٤٦	٠,٢٩٨١	٠,٣٠١٥	٠,٣٠٥٠	٠,٣٠٨٥	٠,٥-
٠,٣١٢١	٠,٣١٥٦	٠,٣١٩٢	٠,٣٢٢٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٣٠٠	٠,٣٣٣٦	٠,٣٣٧٢	٠,٣٤٠٩	٠,٣٤٤٦	٠,٤-
٠,٣٤٨٣	٠,٣٥٢٠	٠,٣٥٥٧	٠,٣٥٩٤	٠,٣٦٣٢	٠,٣٦٦٩	٠,٣٧٠٧	٠,٣٧٤٥	٠,٣٧٨٣	٠,٣٨٢١	٠,٣-
٠,٣٨٥٩	٠,٣٨٩٧	٠,٣٩٣٦	٠,٣٩٧٤	٠,٤٠١٣	٠,٤٠٥٢	٠,٤٠٩٠	٠,٤١٢٩	٠,٤١٦٨	٠,٤٢٠٧	٠,٢-
٠,٤٢٤٧	٠,٤٢٨٦	٠,٤٣٢٥	٠,٤٣٦٤	٠,٤٤٠٤	٠,٤٤٤٣	٠,٤٤٨٣	٠,٤٥٢٢	٠,٤٥٦٢	٠,٤٦٠٢	٠,١-
٠,٤٦٤١	٠,٤٦٨١	٠,٤٧٢١	٠,٤٧٦١	٠,٤٨٠١	٠,٤٨٤٠	٠,٤٨٨٠	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٦٠	٠,٥٠٠٠	٠,٠



تابع جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

٠,٠٩	٠,٠٨	٠,٠٧	٠,٠٦	٠,٠٥	٠,٠٤	٠,٠٣	٠,٠٢	٠,٠١	٠,٠٠	ع
٠,٥٣٥٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥١٩٩	٠,٥١٦٠	٠,٥١٢٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٠٠	٠,٠
٠,٥٧٥٣	٠,٥٧١٤	٠,٥٦٧٥	٠,٥٦٣٦	٠,٥٥٩٦	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥١٧	٠,٥٤٧٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٣٩٨	٠,١
٠,٦١٤١	٠,٦١٠٣	٠,٦٠٦٤	٠,٦٠٢٦	٠,٥٩٨٧	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩١٠	٠,٥٨٧١	٠,٥٨٣٢	٠,٥٧٩٣	٠,٢
٠,٦٥١٧	٠,٦٤٨٠	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٠٦	٠,٦٣٦٨	٠,٦٣٣١	٠,٦٢٩٣	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢١٧	٠,٦١٧٩	٠,٣
٠,٦٨٧٩	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٠٨	٠,٦٧٧٢	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٠٠	٠,٦٦٦٤	٠,٦٦٢٨	٠,٦٥٩١	٠,٦٥٥٤	٠,٤
٠,٧٢٢٤	٠,٧١٩٠	٠,٧١٥٧	٠,٧١٢٣	٠,٧٠٨٨	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠١٩	٠,٦٩٨٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩١٥	٠,٥
٠,٧٥٤٩	٠,٧٥١٧	٠,٧٤٨٦	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٢٢	٠,٧٣٨٩	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٢٤	٠,٧٢٩١	٠,٧٢٥٧	٠,٦
٠,٧٨٥٢	٠,٧٨٢٣	٠,٧٧٩٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٠٤	٠,٧٦٧٣	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦١١	٠,٧٥٨٠	٠,٧
٠,٨١٣٣	٠,٨١٠٦	٠,٨٠٧٨	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٢٣	٠,٧٩٩٥	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩١٠	٠,٧٨٨١	٠,٨
٠,٨٣٨٩	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣١٥	٠,٨٢٨٩	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢١٢	٠,٨١٨٦	٠,٨١٥٩	٠,٩
٠,٨٦٢١	٠,٨٥٩٩	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٠٨	٠,٨٤٨٥	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤١٣	١,٠
٠,٨٨٣٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٠٨	٠,٨٦٨٦	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٤٣	١,١
٠,٩٠١٥	٠,٨٩٩٧	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٠٧	٠,٨٨٨٨	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٤٩	١,٢
٠,٩١٧٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٤٧	٠,٩١٣١	٠,٩١١٥	٠,٩٠٩٩	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٣٢	١,٣
٠,٩٣١٩	٠,٩٣٠٦	٠,٩٢٩٢	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩١٩٢	١,٤
٠,٩٤٤١	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٠٦	٠,٩٣٩٤	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٣٢	١,٥
٠,٩٥٤٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٤٩٥	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٥٢	١,٦
٠,٩٦٣٣	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٠٨	٠,٩٥٩٩	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٥٤	١,٧
٠,٩٧٠٦	٠,٩٦٩٩	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٤١	١,٨
٠,٩٧٦٧	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧١٩	٠,٩٧١٣	١,٩
٠,٩٨١٧	٠,٩٨١٢	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٧٢	٢,٠
٠,٩٨٥٧	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٢١	٢,١
٠,٩٨٩٠	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦١	٢,٢
٠,٩٩١٦	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١١	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠١	٠,٩٨٩٨	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٣	٢,٣
٠,٩٩٣٦	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩١٨	٢,٤
٠,٩٩٥٢	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٣٨	٢,٥
٠,٩٩٦٤	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٣	٢,٦
٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٥	٢,٧
٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٤	٢,٨
٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨١	٢,٩
٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٣,٠
٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٠	٣,١
٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٣,٢
٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٣,٣
٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٣,٤
٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٣,٥
٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٣,٦
٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٣,٧