١٠

بسم الله الرحمن الرحيم

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

المهني

فريق التأليف:

د. تحسين المغربي (منسقًا)
أ. أحلام صلاح
أ. سرين أبو عيشة
أ. نايف الطيطي
أ. وهبة ثابت
أ. مؤيد الحنجوري

مركز المناهج

أ. قيس شبانة
أ. نسرين دويكات

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين

تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧/ ٢٠١٨ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائرة الفنية:	الإشراف الإداري	كمال فحماوي
	التصميم الفني	منال رمضان

التحكيم العلمي:	د. عمر غنام
التحرير اللغوي:	أ. وفاء جيوسي
الرسومات:	أ. سالم نعيم
المتابعة للمحافظات الجنوبية:	د. سمية النخالة

الطبعة الثالثة

٢٠٢٠ م / ١٤٤١ هـ

دولة فلسطين

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 – رام الله – فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

+970-2-2969350 هاتف | +970-2-2969377 فاكس

تقديم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقرّرة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٧

مقدمة

تُعدّ مرحلة التمكين مرحلة تعليمية مهمة؛ كونها تأتي محصلة للمعارف والمفاهيم التي اكتسبها الطلبة من مرحلة التهيئة، وهي مرحلة تبدأ من الصف الخامس، وتنتهي بالصف العاشر، يميل الطلبة خلال هذه المرحلة إلى الاستقلالية في التفكير، والبحث، والاستقصاء؛ لذا ما ينبغي مراعاته إشراكهم في المناقشة، وحل المشكلات المطروحة التي يتمّ من خلالها بناء شخصية الطالب القادر على مجاراة التطور العلمي والتكنولوجي الهائل، في عالم مليء بالتغيرات التي تتطلب منه اكتساب روح المبادرة، والتكيف مع مستجدات العصر المتسارعة، بما يضمن له استكشاف المعارف، وفي هذه المرحلة أيضًا، يتمّ تقديم المحتوى التعليمي بقالب عصري؛ ليكونَ امتدادًا للمحتوى الرياضي الذي تمّ في مرحلة التأسيس، ويستمرّ المنهاج المبني على الأنشطة أصلًا في ربط التعلم بالسياقات الحياتية بطريقة جاذبة محببة؛ لتكوين طالب متفاعل نشط، ينفّذ الأنشطة والتمارين المتنوعة المطلوبة منه.

تشكّل العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة الركيزة الأساسية في تمكين الطالب من المفاهيم والمعارف والمهارات، وتوظيفها ضمن سياقات مناسبة، تقوم على حل مشكلات حياتية، ولا يكون ذلك إلا بالقيام بأنشطة محفّزة، ومثيرة للتفكير، تحاكي البيئة الفلسطينية في المجالات الاجتماعية، والاقتصادية، وغيرها، كما تمّ توظيف التكنولوجيا في تنفيذ هذه الأنشطة بطريقة سلسة جذابة، مع الأخذ بعين الاعتبار التدرج في مستوى الأنشطة، بما يتناسب ومستوياتِ الطلبة، والتعامل مع كل مستوى بما يضمن علاج الضعف، وصولًا لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.

تكوّن هذا الكتاب من أربع وحدات تعليمية، تناولت الوحدة الأولى منه الاقترانات وتمثيلاتها البيانية، وبعض التحويلات الهندسية عليها، أمّا الوحدة الثانية فتناولت الإنشاءات الهندسية، وتناولت الوحدة الثالثة الزوايا في أوضاعها المختلفة والاقترانات المثلثية والمعادلات المثلثية، وتناولت الوحدة الرابعة مفاهيم أساسية في الإحصاء والاحتمالات، كمعادلة خطّ الانحدار، ومبدأ العد.

أملُنا بهذا العمل، وقد حققنا مطالب العملية التعليمية التعلمية كافة، من خلال منهاج فلسطينيّ واقعيّ منظّم، وإننا إذ نضع بين أيديكم ثمرة جهد متواصل، وكلنا ثقة بكم معلمين ومشرفين تربويين ومديري مدارس، وأولياء أمور، وخبراء ذوي علاقة في رفد هذا الكتاب بمقترحاتكم، وتغذيتكم الراجعة، بما يعمل على تجويده وتحسينه؛ لما فيه مصلحة الطلبة قادة المستقبل.

فريق التأليف

المحتويات

الوحدة الأولى ١

الاقترانات ورسومها البيانية
(Functions and Their Graphs)

مطرزات فلسطينية

تشتهرُ فِلسطينُ بِمطرّزاتِها التي قد تظهرُ فيها رسوماتٌ تشبه مُنحنياتٍ لاقتراناتٍ متعددة، أتأمّلُ اللوحةَ، وأصفُ جمالَ المُطرّزاتِ.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاقترانات بأنواعها المختلفة في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- استخدام التحويلات الهندسيّة في رسم منحنى اقترانٍ ما، في المستوى الديكارتي.
- تحديد إشارةِ بعض الاقترانات.
- تمثيل اقترانٍ متعددِ القاعدة بيانيّاً.
- حلّ معادلات أسّية ولوغاريتمية.
- تمثيل الاقترانات الأسّيَة وخواصها.
- تمثيل الاقترانات اللوغاريتمية وخواصها.
- توظيف الاقترانات بأنواعها المختلفة في حل مشكلات حياتية.

(١ - ١) تمثيل الاقترانات باستخدام الإنسحاب (Translation)

نشاط ١

شاركتْ فِلَسطينُ في بطولة العالم للشّطرنجِ في النرويج مع ١٧٨ دولةً، حيث انتقلت فلسطينُ من المرتبة رقم ١٦٣ إلى المرتبة ١٠٣ على مستوى العالم؛ إذْ تفوّقتْ على دولٍ عربيّةٍ متميّزةٍ في هذه اللعبة، وحصلتْ على مكانةٍ دَوْليّة فيها.

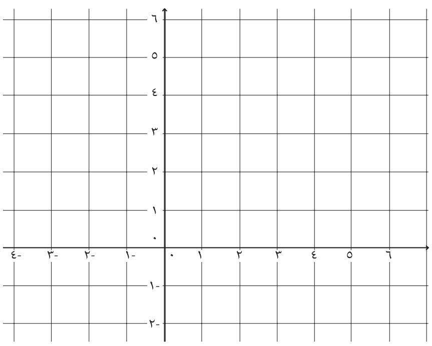
تتحركُ أحجارُ الشّطرنجِ وَفْقَ قواعد محدّدة.

- يتحرّكُ الملكُ بمقدار وحدةٍ واحدةٍ في جميع الاتجاهات.
- يتحركُ الفيلُ ....
- تتحركُ القلعةُ ....
- يتحركُ الوزيرُ ....

تُسمَّى مثلُ هذه الحركاتِ في المستوى تحويلاتٍ هندسيّةً.

نشاط ٢

أُعيّنُ النّقاط: أ (٢ ،١)، ب (-٣، -١)، جـ (-٥، ٢)، ثمّ أرسمُ المثلث أ ب جـ في المستوى الديكارتي.

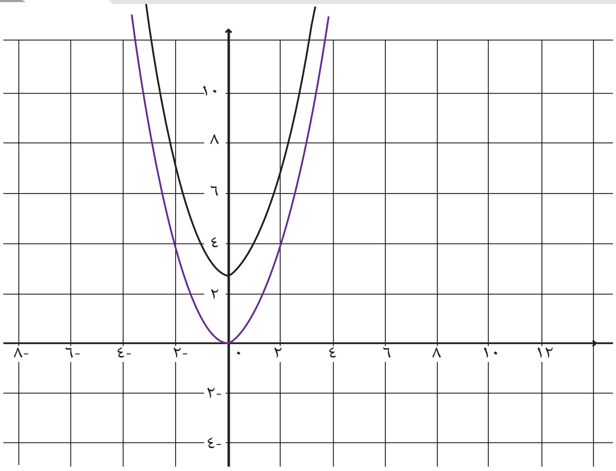


- صورة النقطة أ (٢،١) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى الأعلى هي: أَ (٢،٤).
- صورة النقطة ب (-٣، -١) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى الأعلى هي: بَ (.....، .....).
- صورة النقطة جـ (-٥، ٢) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى الأعلى هي: جـَ (.......، ....).
- أرسمُ المثلثَ أَ بَ جـَ في المستوى الديكارتي.

ألاحظُ أنّ: النقطةَ(س،ص) بعد انسحابها ٣ وحدات إلى الأعلى هي: النقطة (س،ص+٣).

نشاط ٣

في الشكل المجاور ، أنظرُ إلى منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢}$، $س \in ح$، ومنحنى الاقتران $ل(س) = س^{٢} + ٣$



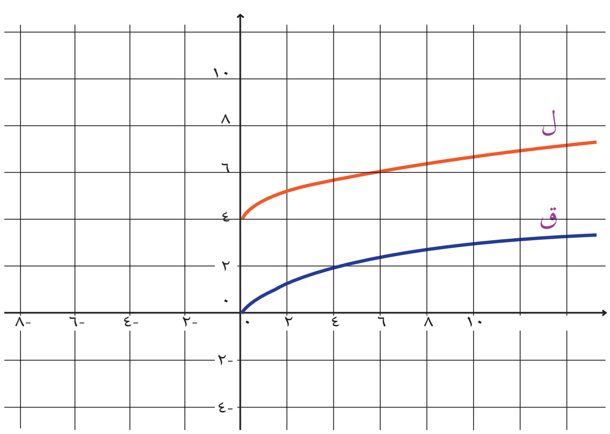
ألاحظ أنّ: منحنى ل(س) هو انسحاب لمنحنى ق(س) بمقدار .... للأعلى.

- أمثِّلُ بيانيّاً منحنى الاقتران: $هـ(س) = س^{٢} - ٤$.

أتعلّمُ: منحنى الاقتران ل(س) = ق(س) + جـ هو انسحاب لمنحنى الاقتران ق(س) بمقدار جـ وحدة إلى الأعلى إذا كانت جـ > صفر ، وانسحاب بمقدار | جـ | وحدة إلى الأسفل إذا كانت جـ < صفر.

نشاط ٤

أنظرُ إلى منحنى الاقتران: $ق(س) = \sqrt{س}$ ، $س \geq$ صفر ومنحنى ل في الشكل الآتي:



منحنى الاقتران ل هو انسحاب لمنحنى الاقتران ق بمقدار ......

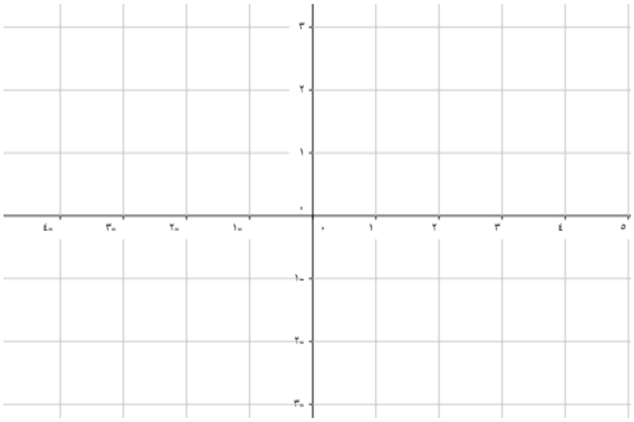
- قاعدة الاقتران ل هي: ....

أمثّلُ بيانيّاً منحنيات الاقترانات الآتية:

- $ك(س) = \sqrt{س} - ٢$
- $هـ(س) = \sqrt{س} + ١$

نشاط ٥

أعيّنُ النقاط: ﻣ(٣ ، ١)، ب(-١ ، -١)، جـ(-٢ ، ٠)، د(٢ ، ٢)، وأرسمُ الشكل الرباعي ﻣ ب جـ د في المستوى الديكارتي:



- صورة النقطة ﻣ (٣ ، ١) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: ﻣَ(٦ ، ١).
- صورة النقطة ب (-١ ، -١) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: بَ(....، ....).
- صورة النقطة جـ (-٢ ، ٠) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: جـَ(...... ، .....).
- صورة النقطة د (٢ ، ٢) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: دَ(..... ، ....).
- أرسمُ الشكل الرباعي ﻣَ بَ جـَ دَ في المستوى الديكارتي.
- ألاحظ أن النقطة(س،ص) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي النقطة: (س+٣،ص).

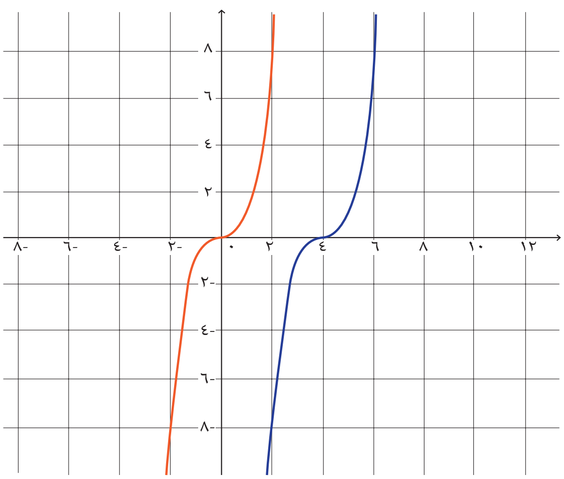
نشاط ٦

اعتماداً على منحنى

ق(س) = س^{٣} ، س $\in$ ح

ومنحنى الاقتران:

ل(س)= (س − ٤)^{٣}



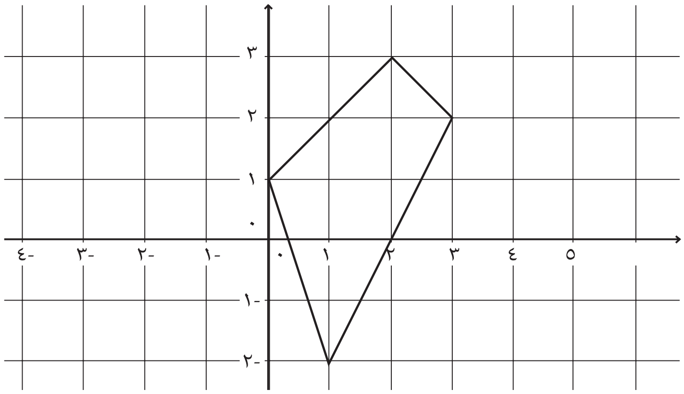
منحنى الاقتران ل هو انسحاب لِ ..... بمقدار ...... وحدات.

أمثّلُ منحنيات الاقترانات: هـ(س)=(س + ٥)^{٣} ، ك(س)=(س + ٣)^{٣} − ٢، في المستوى الديكارتي.

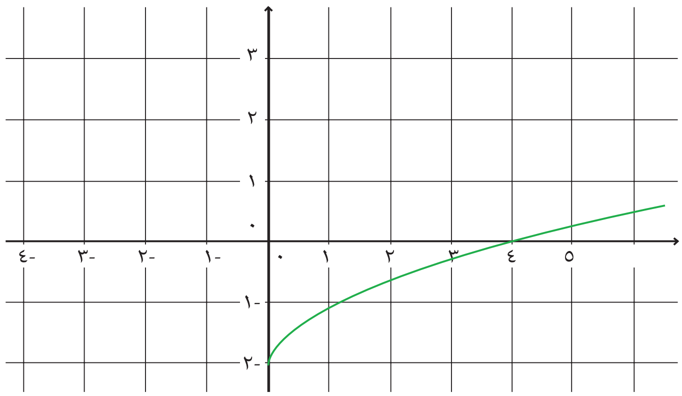
أتعلّمُ: منحنى الاقتران ق(س + جـ) هو انسحاب إلى اليسار لمنحنى الاقتران ق(س) بمقدار جـ وحدة، إذا كانت جـ > صفر ، وانسحاب الى اليمين بمقدار | جـ | وحدة، اذا كانت جـ < صفر.

تمارين ومسائل:

(١) أرسمُ الشكلَ الرباعيّ المرسومَ في المستوى الديكارتي بعد انسحابه وَحدتين إلى اليسار، ومن ثم ٣ وَحداتٍ إلى الاسفل.



(٢) بالاعتماد على منحنى ص = ق(س) ، س ≤ ٠ الممثّلِ في المستوى الديكارتي، أمثل منحنى كل من الاقترانات الآتية في المستوى نفسه



أ) هـ(س) = ق(س) − ٥

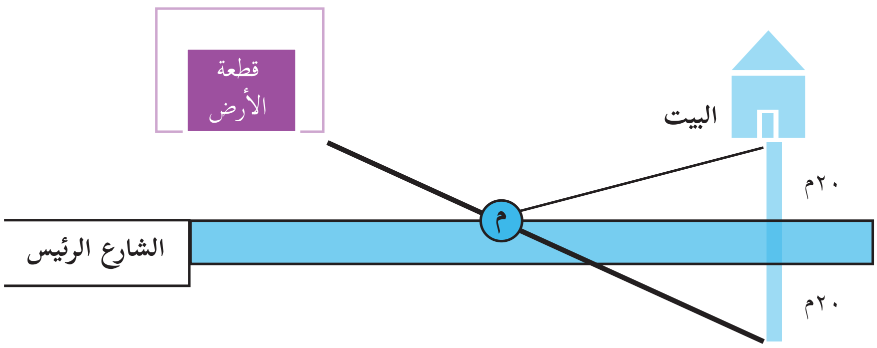
ب) ل(س) = ق(س + ٤)

جـ) د(س) = ق(س − ١) + ٣

(١ - ٢) تمثيل الاقترانات باستخدام الإنعكاس (Reflection)

نشاط ١

تهتمُّ وزارةُ الزراعةِ بشقِّ طُرقٍ زراعيّةٍ في القرى الفِلسطينيّةِ؛ لزيادة الاهْتمام بالأراضي والثروة الزراعيّة. طلب مُزارعٌ من الوزارة مساعدتَه في شقِّ طريقٍ بين بيته وقطعة الأرض التي يملكُها ويربطه مع الشارع الرئيس، فذهب مهندسُ البلديّة لمُعاينةِ الموقع، وارتأى أنْ تُشَقَّ الطريقُ، كالمخطّط الذي يظهرُ في الشكل.

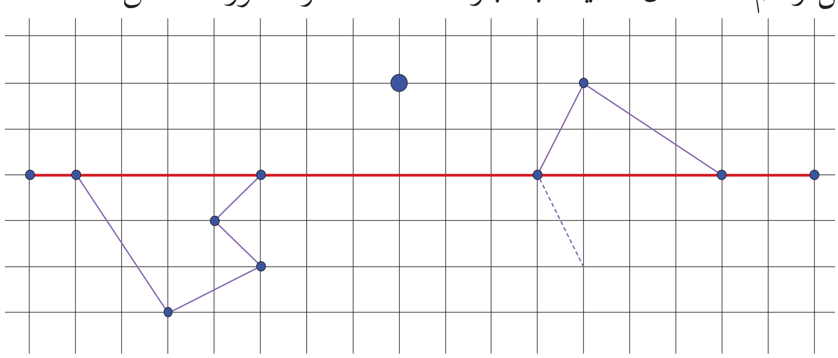


أناقش المخطّطَ الذي رسمه المهندس.

أفكر لماذا أصبحت التكاليفُ أقلَّ ما يمكنُ، عند تحديد موقع النقطة م على الشارع،كما تراه في المخطط؟

نشاط ٢

أُكملُ رسمَ الأشكال الآتية، باعتبار الخطِّ الأحمر محورَ انعكاس:



أتذكّرُ انعكاس النقطة أ (س،ص) في محور السينات هي النقطة أَ (س،-ص).

أُكملُ الجدول الآتي:

نشاط ٣

س	٢	١	٠	-١	-٢
ق(س) = $س^٣$ + ١			١		-٧
- ق(س) = - ($س^٣$ + ١)	-٩				

- أُعيّنُ النّقاطَ من الجدول في المستوى الديكارتي، وأمثّلُ منحنى الاقتران ق(س).
- أُعيّنُ النّقاطَ من الجدول في المستوى نفسه، وأمثّلُ منحنى الاقتران -ق(س).

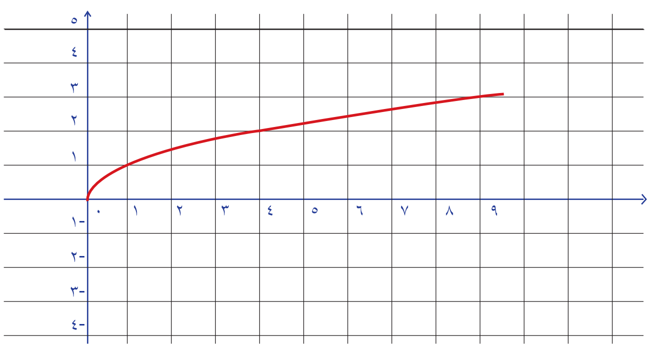
أُلاحظُ أنّ:...............................

أتعلّمُ: منحنى الاقتران -ق(س) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) في محور السينات.

نشاط ٤

يُمثّلُ الشكلُ الآتي منحنى الاقتران:

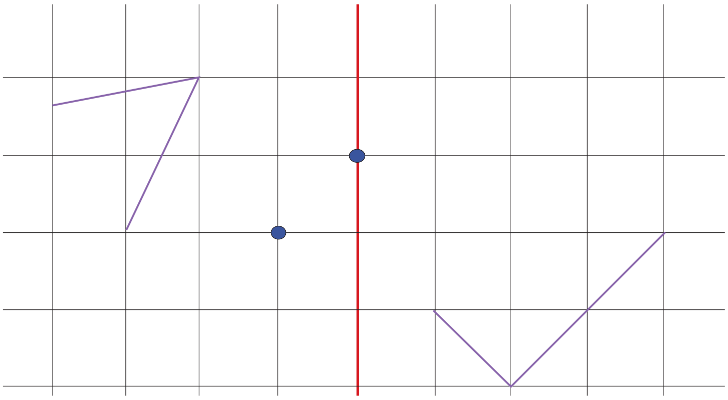
ق(س) = $\sqrt{س}$ ، س ≥ صفر .



أُمثّلُ منحنى الاقتران ل(س) = $-\sqrt{س}$ على المستوى نفسه.

نشاط ٥

أُكملُ رسمَ الأشكالِ الآتية، باعتبار الخطِّ الأحمرِ محورَ انْعكاس:



أتذكّرُ انعكاس النقطة م (س،ص) في محور الصادات هي النقطة مَ (-س،ص).

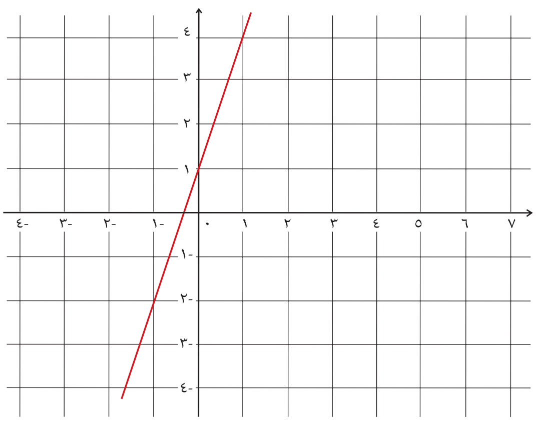
نشاط ٦

يُمثّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقتران

ق(س) = ٣س + ١

أُكملُ: بالاعتماد على القاعدة، يكون

ق(-س) = ٣(-س) + ١ = ...



س	٣	٠	-١
ق(-س)		١	

بالاعتماد على الجدول، أمثّلُ منحنى الاقتران ق(-س) في المستوى الديكارتي.

أتعلّمُ: منحنى الاقتران ق(-س) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) في محور الصادات.

تمارين ومسائل:

(١) أكتبُ الزوجَ المرتّبَ الذي يمثّلُ التحويلات الهندسيّةِ على النقطة (٣، -٤)، في الحالات الآتية:

أ) انعكاس في محور الصادات.

ب) انعكاس في محور السينات.

(٢) أصِفُ بالكلمات التحويلاتِ الهندسيّة الآتية على منحنى ق(س):

أ) ق(-س)

ب) -ق(س) + ١

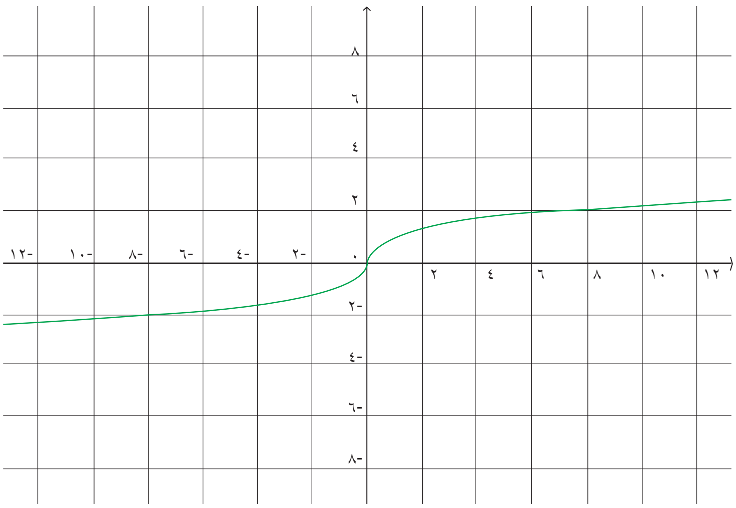
جـ) ق(س – ٢) + ٣

(٣) اعتماداً على منحنى ق(س) المرسوم، أرسمُ منحنيات الاقترانات الآتية:

أ) ق(-س) – ١

ب) -ق(س) + ١

جـ) -ق(-س)



(١ - ٣) إشارة الاقتران (Sign of a Function)

نشاط ١

تهتمُّ وِزارةُ التجارةِ والصناعةِ بتحسين الوضع الاقتصادي، ودعم التجارة في فِلسطينَ.
أبو ياسين تاجرُ أحذيةٍ، ينال خصميّاتٍ على المستحقات المترتبة عليه؛ نظراً لالتزامه بواجباته تجاه الوزارة، طلب أبو ياسين من محاسب المَحالِّ التجاريّة تزويدَه بالوضع الماليّ لإحداها خلال السنة السابقة، فقدّم له المحاسبُ الوضعَ الماليّ كما في الجدول الآتي:

الشهر	كانون ثاني	شباط	آذار	نيسان	أيار	حزيران	تموز	آب	أيلول	تشرين أول	تشرين ثاني	كانون أول
الوضع المالي	−	+	+	+	٠	−	−	+	+	+	٠	−

- الأشهر التي ربح المحلّ فيها هي: ....
- الأشهر التي خسر فيها المحلّ هي: ....
- ماذا نستنتج عن الوضع المالي في شهريّ: أيار، تشرين ثاني ؟

أناقش هل الجدول يعطي صورة شاملة عن الوضع المالي للمحلّ ؟

أولاً: إشارة الاقتران الثابت

نشاط ٢

أُعطي أمثلةً على اقترانات ثابتة.

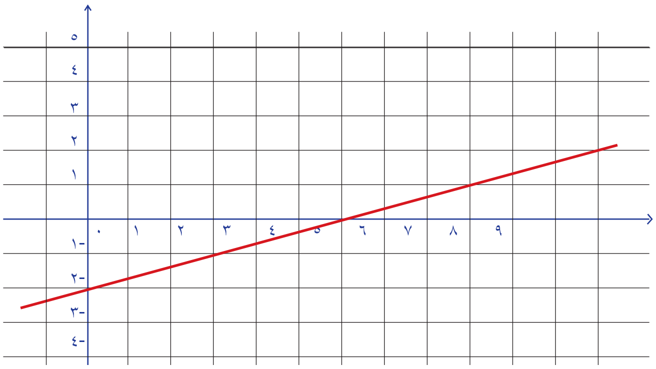
- ق(س)= ١٢، وإشارته موجبة.
- ق(س)= -π، وإشارته سالبة.   • ل(س)= -٢٣، وإشارته ......
- ك(س)= ....، وإشارته موجبة.   • هـ(س)= ....، وإشارته ....

أتعلّمُ: إشارة الاقتران الثابت ق(س) = جـ ، جـ $\in$ ح، هي إشارة جـ نفسها.

ثانياً: إشارة الاقتران الخطّي

نشاط ٣

يبين الشكل المجاور منحنى اقتران خطي ، قاعدته ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س − ٢



- نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات هي: (.....،.....).
- صفر الاقتران هو: ....
- الفترة التي وقع فيها المنحنى فوق محور السينات هي: ....، وتكونُ إشارتُه ....
- الفترة التي وقع فيها المنحنى تحت محور السينات هي: .... ، وتكونُ إشارتُه ....
- أعيّنُ إشارة الاقتران على خط الأعداد:

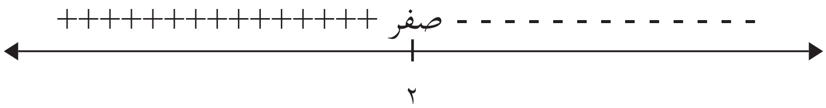
أتعلم: إشارة الاقتران الخطي ق(س) = أس + ب ، س ∈ ح، أ ≠ صفر هي نفس إشارة معامل س ، لكلّ س أكبر من صفر الاقتران، وعكس إشارة معامل س، لكلّ س أصغر من صفر الاقتران.

يُمكنُ توضيحُ ذلك على خط الأعداد:

مثال(١): أعيّنُ إشارة الاقتران ق(س) = ٤ − ٢س

الحلّ: صفر الاقتران = ٢، إذن: يقطعُ منحنى الاقتران محورَ السينات في النقطة (٢، ٠).

- إشارة الاقتران (+) موجبة "عكس إشارة معامل س"، لكلّ س < ٢.
- إشارة الاقتران (−) سالبة "إشارة معامل س نفسها"، لكلّ س > ٢.
- أعيّنُ الإشارة على خط الأعداد الآتي:



- يُمكنُ كتابةُ الحلّ بالصورة: ق(س) > صفر (موجبا)، في الفترة] -∞، ٢[

  ق(س) < صفر (سالبا)، في الفترة]٢، ∞[

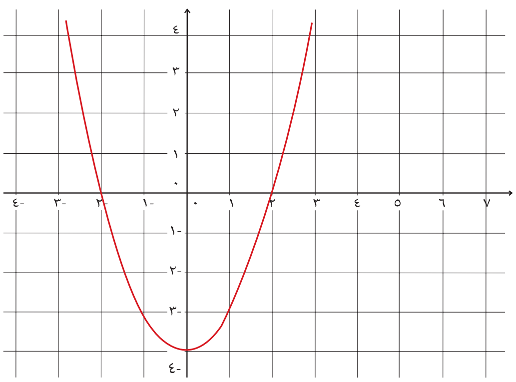
  ق(س) = صفر ،عندما س= ٢.

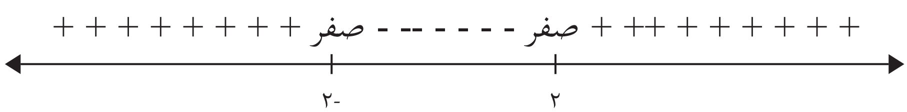
ثالثا: إشارة الاقترانِ التربيعيّ

نشاط ٤

أتأمل منحنى الاقتران المرسوم ق(س) = س^{٢} − ٤،

وإشارة الاقتران الموضّحة على خط الأعداد:





- يقطع المنحنى محور السينات في النقطتين: (......،......) ، (........،.......)
- يقع منحنى الاقتران تحت محور السينات في الفترة ....
- يقع منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة ....
- إشارة الاقتران موجبة في الفترة ....، بينما إشارته سالبة في الفترة ....
- أصفار الاقتران هي: ....

نشاط ٥

أعيّنُ إشارة الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = س^{٢} + ٣س − ١٠

- أصفار الاقتران هي: ....
- أرسم خط الأعداد، وأعيّنُ عليه أصفار الاقتران.

- ق(-٦) = ٣٦ + -١٨ − ١٠= ٨ > صفر (قيمة موجبة).

ق(-٧) = ...

ق(-٣) = ٩ + -٩ − ١٠ = -١٠ < صفر (قيمة سالبة).

ق(١) = ...

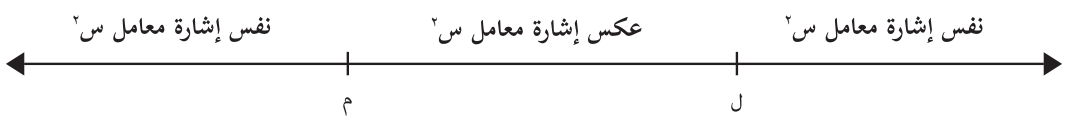
ق(٤) = ١٦ + ١٢ − ١٠ = ١٨ > صفر (قيمة موجبة).

ق(٦) = ...

- أعيّنُ إشارةَ الاقتران على خط الأعداد.
- أكتبُ الفتراتِ التي فيها يكون ق(س) موجباً، والفترات التي يكون فيها الاقتران سالباً.

أتعلّمُ: إشارة الاقتران التربيعيّ تكون عكس إشارة معامل س^{٢} بين صفريّ الاقتران، وما عدا ذلك فهي إشارة معامل س^{٢}.

ويُمكنُ توضيحُ ذلك بالشكل؛ حيث ل،م هما صِفرا الاقتران ق ، ل > م :



نشاط ٦

أعيّنُ إشارةَ الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = ١ − س^{٢}

- أصفار الاقتران هي: ....
- إشارة معامل س^{٢} هي: ....
- إشارة الاقتران موجبة (عكس إشارة معامل س^{٢}) في الفترة ....
- إشارة الاقتران سالبة (نفس إشارة معامل س^{٢}) في الفترة ....

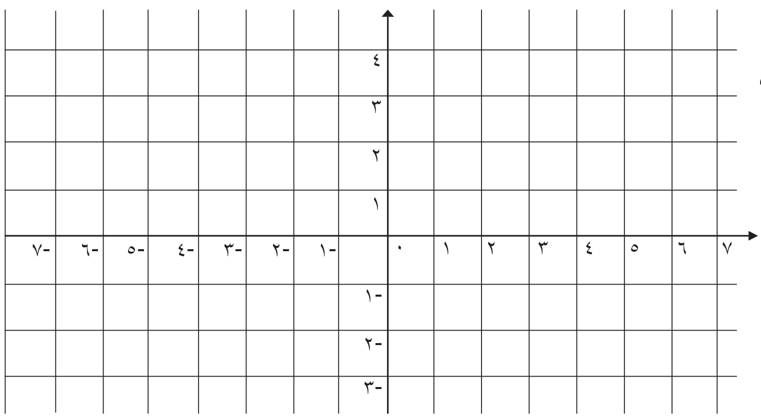
- أرسمُ خطّ الأعداد، وأعيّنُ عليه إشارة الاقتران:

- يقعُ منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة ....
- يقعُ منحنى الاقتران تحت محور السينات في الفترة ....

نشاط ٧

أرسمُ منحنى الاقتران:

ق(س) = س^{٢} + ٦ س + ٩

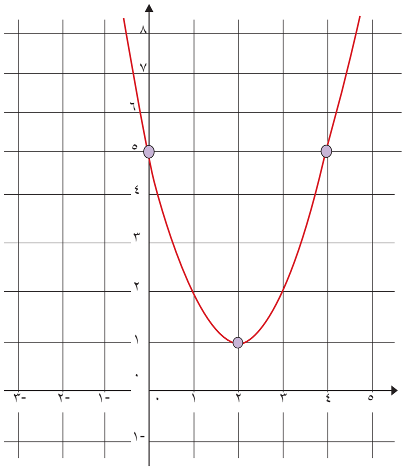


- أصفار الاقتران هي: ....
- إشارة معامل س^{٢} هي: ....
- أُعيّنُ إشارة الاقتران على خط الأعداد.
- يقعُ منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة ....

أتعلّمُ: إشارة الاقتران التربيعيّ: هي إشارة معامل س^{٢} ، إلّا عند صفر الاقتران، إذا كان له صفر واحد فقط.

نشاط ٨

أتأمّلُ منحنى الاقتران في الشكل المجاور ، ثمّ أُجيبُ عن الأسئلة التي تليه:



- هل قطع المنحنى محور السينات ؟
- يقع منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة..............
- أعيّنُ إشارة ق(س) على خط الأعداد وأكتب قاعدته.......................

أتعلّمُ: إشارة الاقتران التربيعيّ هي إشارة معامل $س^٢$، إذا لم يقطعْ منحناهُ محورَ السينات.

أفكر

ما العلاقةُ بين مُميّز العبارة التربيعية ($ب^٢ - ٤ ﻫ ج$) المرافقة للاقتران التربيعي وإشارته ؟

رابعا: إشارة الاقتران النسبيّ

يُسمّى الاقترانُ ق اقتراناً نسبيّاً إذا كانت قاعدتُه على الصورة الآتية:

$$ق(س) = \frac{ل(س)}{م(س)}$$ حيث ل،م كثيرا حدود ، م(س) $\neq$ صفر.

نشاط ٩

أعيّنُ إشارة الاقتران: $ق(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٢س - ٣}$ ، س $\neq$ ٣ ، -١

أعيّنُ إشارة البسطِ (س + ٣)، كاقترانٍ خطيّ على خطّ الأعداد:

أعيّنُ إشارة المقامِ ($س^٢ - ٢س - ٣$)، كاقترانٍ تربيعيّ على خطّ الأعداد

أُعيّنُ إشارة الاقترانِ النسبيّ ق على خطّ الأعداد:

نشاط ١٠

أْعيّنُ إشارةَ الاقترانِ ق الذي قاعدته: ق(س)= $\frac{٥}{١ + س}$ ، س ≠ -١

- إشارة البسط هي ....
- أُعيّنُ إشارةَ البسط على خطّ الأعداد:
- أُعيّنُ إشارةَ المقام (س+١) على خط الأعداد:
- أُعيّنُ إشارةَ الاقتران النسبي ق على خط الأعداد:

تمارين ومسائل:

(١) أُعيّنُ إشارةَ كلٍّ من الاقترانات الآتية:

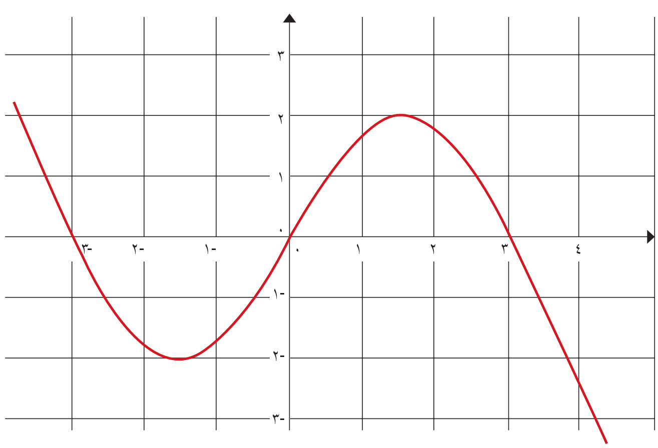
أ) هـ (س) = ٤ – س

ب) ع (س) = -٤ – ٤س – $س^{٢}$

جـ) م (س) = $\frac{-١}{س}$ ، س ≠ صفر

د) ك (س) = $\frac{س^{٢} + ٦س + ٥}{س - ٤}$ ، س ≠ ٤

(٢) أُعيّنُ إشارةَ الاقتران ق على الفترة [-٣ ، ٤]:



(١ - ٤) حلُّ المُتباينات (Solving Inequalities)

نشاط ١

السياحةُ الداخليّةُ في فلسطينَ من مصادر الدخل. عرضتْ شركةُ سياحةٍ وسفرٍ عُروضاً للسفر في الصيف، في العَرْضِ الأوّل، يدفعُ الشخصُ مبلغَ ٧٠ ديناراً، و٢٠ ديناراً، عن كلّ ليلةٍ يبيتُها في الفندق. وفي العَرضِ الثّاني يدفعُ الشخصُ مبلغَ ١٠٠ دينارٍ، و١٥ ديناراً، عن كلّ ليلةٍ يبيتُها في الفندق.

درسَ أمينٌ العرضيْن، واختارَ العرضَ الثّاني:

- إذا أقامَ أمينٌ في الفندق ليلتيْن، فإنّهُ يدفعُ: ١٣٠ ديناراً
- إذا أقامَ أمينٌ في الفندق ٥ ليالٍ، فإنّهُ يدفعُ: ....دينار
- إذا أقامَ أمينٌ في الفندق ٩ ليالٍ، هل كان العرض الذي اختاره أفضل من العرض الأول ؟
- ما أقل عدد ممكن من الليالي يقيم أمينٌ في الفندق؛ ليكونَ العرضُ الذي اختاره أقلَّ تكلفةً ؟

نشاط ٢ أَحلُّ المُتبايِنَةَ: ٢(س – ١) > ٣، وأُمثِّلُ مجموعةَ الحلّ على خطّ الأعداد.

- أُطبقُ خواص التباين: ٢س – ٢ > ٣ .
- أَحلُّ المتباينة: ٢س > .... اذن س > ....
- مجموعةُ الحلّ هي: ....
- أُمثّلُ مجموعةَ الحلّ على خطّ الأعداد:
- الفترةُ التي تُمثّلُ مجموعةَ الحلّ هي: ....

نشاط ٣ لَدى مُزارعٍ حديقةٌ منزليّةٌ مِساحتُها ٣٥٠ م^{٢}، ولَديْهِ سياجٌ من الأسلاك طولُهُ ٦٠ م.
استخدمَ المَزارعُ كاملَ هذا السياجَ لتسييجِ جزءٍ مستطيلِ الشكلِ من حديقتِهِ، لا تقِلُّ مِساحتُه عن ٢٠٠ م^{٢}، أُكملُ:

محيط المستطيل= ٢س + ٢ص ، حيث: س = طول المستطيل ، ص = عرض المستطيل.

إذن: ..... + ... = ٦٠

ص= (٣٠ – س)

مِساحة المستطيل= س × ص

أحلُّ المتباينة: س (٣٠ – س) ≥ ......

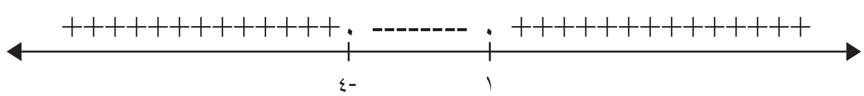
الأبعادُ المُمْكنةُ للجزء الذي تمّ تسييجُهُ من الحديقة:

س: ....

ص: ....

مثال(١): ما مجموعةُ حلّ المتباينة: س^{٢} + ٣س > ٤ ؟

- س^{٢} + ٣س – ٤ > صفر (لماذا)
- س^{٢} + ٣س – ٤= (س – ١) (س + ٤)



مجموعةُ حلّ المتباينة هي:] -٤ ، ١ [، ويمكنُ كتابتُها: -٤ > س > ١

أتعلّمُ: يُمكنُ كتابةُ مجموعةِ الحلّ على شكل فترة، أو باستخدام علاقات الترتيب > أو <

نشاط ٤

أحلُّ المتباينة: $س^{٢} + س - ١٢ \geq$ صفر .

أُحدِّدُ إشارةَ العبارة: $س^{٢} + س - ١٢$، وأُعيّنُ ذلك على خطّ الأعداد:

مجموعةُ حلِّ المتباينةِ وَفقَ إشارتها ($\geq$ صفر) هي: ....

أكتبُ مجموعةُ الحلّ بطريقة أخرى: ....

نشاط ٥

أحلُّ المتباينةَ: $س^{٢} - ٦س + ٩ >$ صفر.

أُعيّنُ إشارةَ العبارة: $س^{٢} - ٦س + ٩$، وأعيّنُ ذلك على خطّ الأعداد:

مجموعة حلّ المتباينةِ وفقَ إشارتها ($>$ صفر) هي: ....

أكتبُ مجموعةُ الحلّ بطريقة أخرى: ....

تمارين ومسائل:

(١) ما مجموعةُ حلّ المتبايناتِ الآتية؟

أ) $٢ (س + ١) \geq ٣ (س - ١)$

ب) $س^{٢} + س + ١ >$ صفر

(٢) ما هي الأعداد التي مربعُ كل منها أصغرُ من العدد نفسه ؟

(٣) أكتبُ المتباينةَ من الدرجة الثانية التي تظهرُ مجموعةُ حلّها على خطّ الأعداد الآتي:

(٤) محلٌ لبيعِ الفطائر حدّدَ ربحَهُ بالعلاقة:

الربح = $-١٠٠ (س - ١,٧٥)^{٢} + ٣٠٠$ ، حيثُ س سعرُ بيعِ الفطيرةِ الواحدة، فكم ديناراً يربحُ صاحبُ المحلّ (يزيد الربح كلما كان سعر الفطيرة أقل):

أ) إذا باع الفطيرة بسعر ١,٥ دينار.

ب) إذا باع الفطيرة بسعر ٣,٧٥ دينار.

جـ) ما السعرُ الذي يُمكنُ أنْ يبيعَ به الفطيرةَ؛ ليكونَ ربحُه أكثرَ من ٢٧٥ ديناراً ؟

(١ - ٥) الاقترانات متعدّدةُ القاعدة (Piecewise Functions)

نشاط ١

تُشجّعُ وزارةُ التربيةِ والتعليمِ الرّحْلاتِ الترفيهيّةِ والعلميّةِ، ليقومَ الطلبةُ بزيارة الأماكنِ الأثريّةِ، والتعليميّةَ، والترفيهيّةِ في فلسطينَ، ومن الأماكنِ الترفيهيّةِ التي يزورُها الطلبةُ مدنَ الملاهي، التي تعملُ على اجتذاب الزائرين، بإعلان خصميّات على سعر تذاكر الدخول. عمدَتْ إحدى مدن الملاهي إلى نشر الإعلان الآتي للزائرين:

مجموع سعر التذاكر (بالدينار)	عدد الأفراد
عدد الأفراد × ١٠	١ ≤ عدد الأفراد < ٥
(عدد الأفراد × ٥) + ٢٠	٥ ≤ عدد الأفراد < ١٠
(عدد الأفراد × ٣) + ٤٠	١٠ ≤ عدد الأفراد < ٤٠
١٥٠	٤٠ ≤ عدد الأفراد

- المبلغُ الذي تدفعُهُ عائلةٌ مكوّنةٌ من ٤ أفراد = ...
- المبلغُ الذي تدفعُه عائلةٌ مكونةٌ من ٨ أفراد = ...
- المبلُغ الذي تدفعُه مجموعةٌ مكوّنةٌ من ١٨ طالباً = ...
- المبلغُ الذي يدفعُهُ ٥٥ طالباً = ...
- المبلغُ الذي تدفعُه كلُّ مجموعةٍ من الأشخاص يتغيّرُ بتغيُّرِ ....

تُسمى مثل هذه العلاقة اقتراناً متعدد القاعدة

نشاط ٢

من الأمثلة على الاقترانات متعددة القاعدة:

١) $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} + ١ & ، \text{س} \geq ١ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} < ١ \end{cases}$

٢) $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} & ، \text{س} \leq -٥ \\ ٤ & ، -٥ < \text{س} < ٥ \\ \text{س} - ٣ & ، \text{س} \geq ٥ \end{cases}$

٣) أعطِ مثالاً لاقتران متعدد القاعدة

تمثيلُ الاقترانات متعددة القاعدة بيانيّاً:

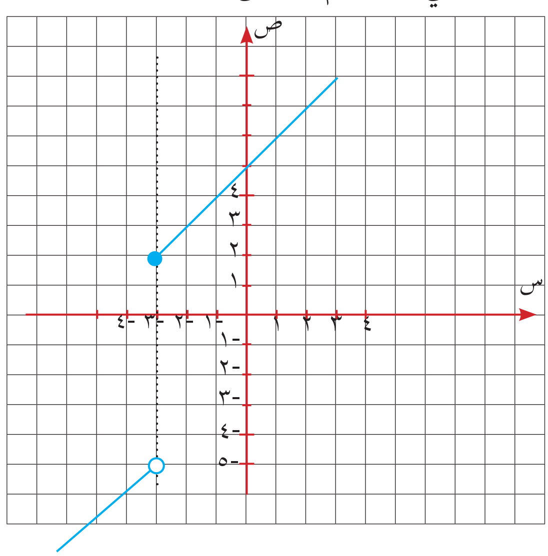
نشاط ٣

أمثّلُ بيانيّاً الاقترانَ الذي قاعدتُه: $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} - ٢ & ، \text{س} < -٣ \\ \text{س} + ٥ & ، \text{س} \geq -٣ \end{cases}$

أُكملُ الجدولَ الآتي:

س	-٨	-٦	-٤	-٣	-٢	-١	٠	٣	٥
ص		-٨		٢			٥		

• أعيّنُ النقاطَ في المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران.



نشاط ٤

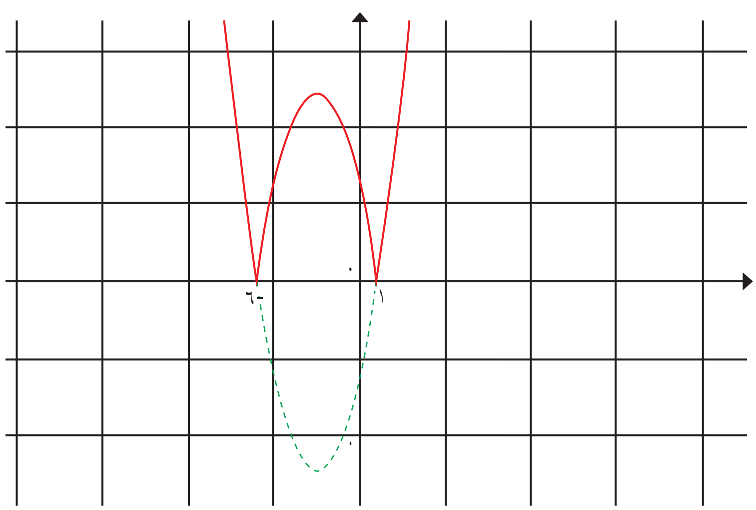
أمثّلُ بيانيّاً الاقترانَ الذي قاعدتُه: ق(س) =
- ٢س + ٥ ، س ≤ -٣ *
- ٢س ، -٣ < س < ١
- س^{٢} ، س ≥ ١

أكملُ الجدولَ الآتي:

س	-٨	-٦	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص		-٧		-١		-٢		١				

أعيّنُ النقاط في المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران:

مثال: أُمثّلُ بيانياً الاقتران ق(س) =
- س^{٢} + ٥س − ٦ ، س ≤ -٦
- -(س^{٢} + ٥س − ٦) ، -٦ < س < ١
- س^{٢} + ٥س − ٦ ، س ≥ ١



* عند التمثيل البياني لاقتران متعدد القاعدة يتم تعويض نقطة التحول في القاعدتين ونضع دائرة مفتوحة عند القاعدة التي لا تنتمي إليها النقطة.

تمارين ومسائل:

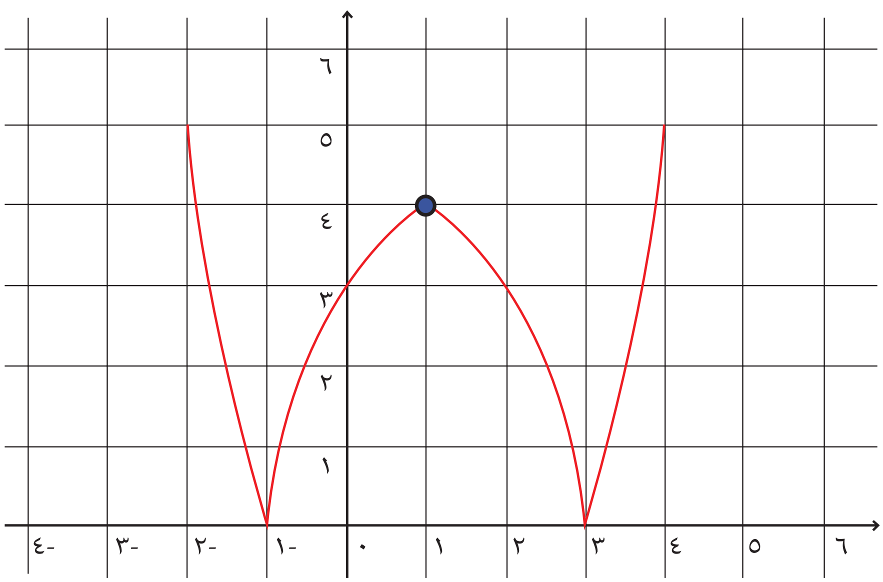
(١) أرسمُ منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية:

$$ق(س) = \begin{cases} ٣ &، \quad س < -٤ \\ س &، \quad -٤ \leq س \leq ٢ \\ -س + ٦ &، \quad س > ٢ \end{cases}$$

$$ق\ (س) = \begin{cases} ٢س + ١ &، \quad س < صفر \\ س^٢ &، \quad س \geq صفر \end{cases}$$

(٢) للاقتران الذي يظهرُ منحناه في المستوى الديكارتي أدناه:

- ما إحداثيّاتُ نقطةِ الرأس؟ وما معادلةُ محور تماثُل المنحنى؟



(١ - ٦) اقتران القيمة المُطْلقة* (Absolute Value)

نشاط ١

المحافظة على جسمٍ سليمٍ تساعد في بناء عقلٍ سليم، والكتلة عند أبناء الجيل الواحد تكون متقاربةً بالمعدل، فكانت كتلة ليلى (٦٠كغم)، وكتلة مها (٥٥كغم)، وعند إيجاد الفرق بين كتلتيْهما يكون الفرق المطلق يساوي:

|٦٠ − ٥٥| = |٥٥ − ٦٠| = ...

هناك كميّاتٌ لا يمكن أنْ تكون إلّا على صورةٍ واحدة، وهي الصورة الموجبة. أعط أمثلةً أخرى لكميّاتٍ لا يمكن أن تكون إلّا موجبة: ....

نشاط ٢

أجد ناتج ما يأتي:

|-٣| = ...، |٤| = ...، |-$\frac{١}{٢}$| = ...

|٤ − ٣| = ...، |-١ − -٤| = ...، |٠ − ١٢| = ...

تعريف

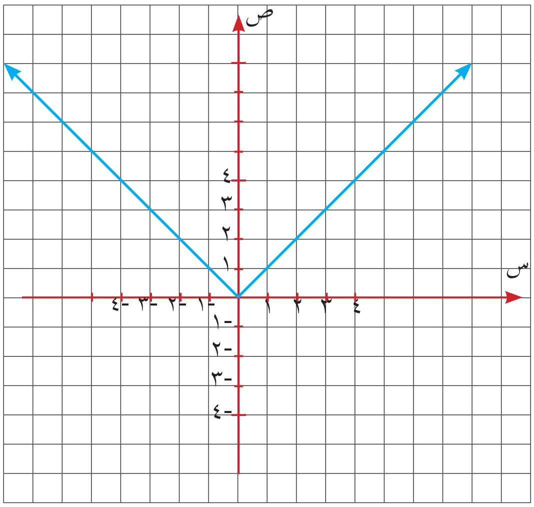
يُسمّى الاقتران المكتوب على صورة ق(س) = | س | **اقترانَ القيمةِ المُطْلَقة**، ويمكن كتابة الاقتران ق(س)، دون استخدام رمز القيمة المُطلقة، كما يأتي:

$$\text{ق(س)} = |\text{س}| = \begin{cases} \text{س} &، \quad \text{س} \geqslant \text{صفر} \\ -\text{س} &، \quad \text{س} < \text{صفر} \end{cases}$$

* يعتبر اقتران القيمة المطلقة من الاقترانات متعددة القاعدة.

نشاط ٣

عند تمثيل الاقتران ق(س) = | س | في المستوى الديكارتي يظهر كما في الشكل:



أجب عمّا يلي:

أ) مجال الاقتران هو ح.

ب) مدى الاقتران هو ....

جـ) أرسم محور التماثل.

د) أحدّد صفر الاقتران ....

هـ) هل الاقتران واحد لواحد؟ لماذا؟

و) هل الاقتران زوجياً أم فردياً أم غير ذلك؟

نشاط ٤

أُعيدُ تعريف الاقتران ق(س) = | س – ٣ |، دون استخدام رمز القيمة المطلقة ثم أمثله بيانياً:

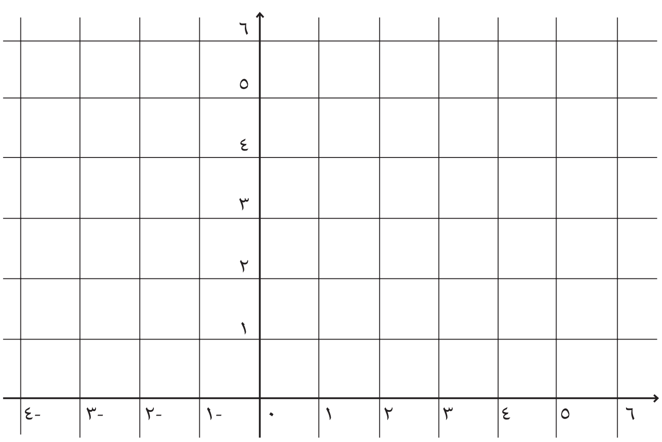
ق(س) = { س – ٣ ، س – ٣ ≥ صفر
-(س – ٣) ، س – ٣ < صفر

ق(س) = { س – ٣ ، س ≥ ٣
-س + ٣ ، س < ٣

مجال ق(س): ....

مدى ق(س): ....

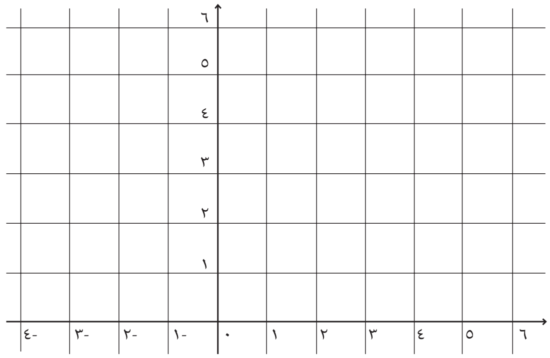
منحنى ق(س) = | س – ٣ |
انسحاب لمنحنى | س | ....
وحدة إلى ....



نشاط ٥

أمثل باستخدام التحويلات الهندسية ق(س)= | س | + ١

منحنى ق(س) هو انسحاب لمنحنى | س | بمقدار .... إلى ....



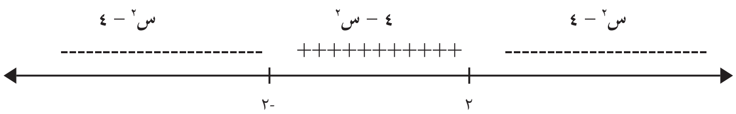
نشاط ٦

أعيد تعريف ق(س) = | ٤ − س^٢ | ثم أمثله بيانياً.

$$|٤ - س^{٢}| = \begin{cases} ٤ - س^{٢} & ، \quad ٤ - س^{٢} \geq ٠ \\ س^{٢} - ٤ & ، \quad ٤ - س^{٢} < ٠ \end{cases}$$

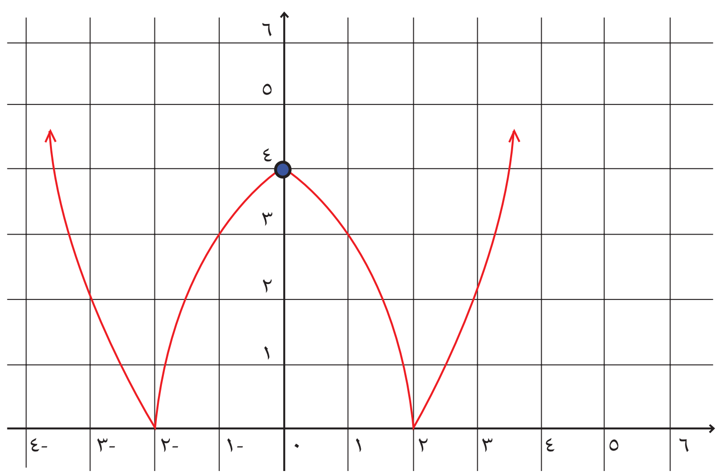
لحل المتباينات نبحث في إشارة ٤ − س^٢

$$٤ - س^{٢} = (٢ - س)\,(٢ + س)$$



$$|٤ - س^{٢}| = \begin{cases} .... & ، \quad س < -٢ \\ ٤ - س^{٢} & ، \quad -٢ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} - ٤ & ، \quad س > .... \end{cases}$$

التمثيل:



تمارين ومسائل:

(١) إذا كان: ق(س) = |س − ٣|، هـ (س) = |٢ − ٣س|، أجد:

ق(٢) ، ق(-٥) ، هـ (-١) ، هـ (٠) ، ق $(\frac{٢}{٣})$

(٢) ١) أُعيدُ تعريف الاقترانات الآتية، دون استخدام رمز القيمة المطلقة وأمثلها بيانياً:

أ) ق(س) = |٣س + ٢| ب) ق(س) = |٤ − س|

جـ) ق(س) = -|٣س + ٣| د) ق(س) = |١ − $\frac{١}{٢}$ س|

٢) أجد مجال ومدى وأصفار الاقترانات السابقة.

(٣) أُمثّل منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية باستخدام التحويلات الهندسية:

أ) ق(س) = |س + ٢|

ب) ق(س) = -|س|

جـ) ق(س) = -|س − ٣| + ٢

(٤) أُعيد تعريف كل من ثم أمثلها في المستوى الديكارتي:

أ) ق(س) = | ٥س − س^{٢} |

ب) ق(س) = | س^{٢} − ٥س + ٦ |

(١ - ٧) الأسس واللّوغاريتمات

نشاط ١ قـررت وزارة التربيـة والتعليـم العالـي الفلسـطينية تصميـم مجموعـة لمـدارس التعلـم الذكـي، بحيـث اشـترطت عل كل عضـو إضافة عضـو آخر كل أسبوع. إذا بـدأت المجموعة بـ (١٠) أعضاء، أكمل الجدول الآتي:

عدد الأيام	٠	٧	١٤	٢١	٢٨		
عدد الأعضاء	١٠	٢٠		٨٠		٣٢٠	

عدد الأعضاء بعد ٥٦ يوماً = ... عضواً.

يبلغ عدد الأعضاء ٣٢٠ عضو بعد ...... يوماً تقريباً.

أناقش عدد الأيام ليصبح عدد أعضاء المجموعة ١٢٨٠ عضو.

عدد الأعضاء بعد شهرين من تصميم المجموعة.

نشاط ٢ أكملُ الجدولَ الآتي:

المقدار	$٢^{٣}$	$٣^{-٢}$	$٨^{\frac{٢}{٣}}$	$٤^{٠}$	$٥^{٩} \div ٥^{٧}$	$٢^{\frac{١}{٢}}$	$٤^{٣} \times ٤^{-١}$
قيمة المقدار	٨	$\frac{١}{٩}$					

تعريف: إذا كان ص = $\text{أ}^{\text{س}}$ ، حيث ص، أ $\in$ ح^{+} ، أ $\neq$ ١، نسمي س لوغاريتم العدد ص للأساس أ، ويُعَبَّر عنه رياضيّاً: $\text{لو}_{\text{أ}}$ (ص) = س (الصّورة اللّوغاريتميّة)، ويُقرأ لوغاريتم ص للأساس أ يساوي س. المثال الآتي يوضّح العلاقة بين الصّورة الأُسِّيَّة، والصّورة اللّوغاريتميّة:

الصّورة الأُسِّيَّة — الصّورة اللّوغاريتميّة

$١٠^{٣} = ١٠٠٠$ $٣ = لو_{١٠} ١٠٠٠$

الأس

الأساس

العدد

نشاط ٣ أُكْمِلُ الجدول الآتي بما يناسبه:

الصّورة الأُسِّيَّة	$٢^{٣} = ٨$		$٣^{-٤} = \frac{١}{٨١}$	$٩^{٠} = ١$
الصّورة اللّوغاريتميّة	______	$لو_{١٠} (١٠٠٠٠) = ٤$		$لو_{٩} ١ = ٠$

نشاط ٤ أحول الآتي من الصّورة الأُسِّيَّة إلى الصّورة اللّوغاريتميّة:

أ) $٣^{١} = ٣$ ب) $٢^{١} = ٢$ ج) $٣^{٠} = ١$

د) $٥^{٠} = ١$ هـ) $٣^{٤} = ٨١$ و) $٢^{٥} = ٣٢$

أ) $لو_{٣} (٣) = ١$ ب) $لو_{٢} (٢) =$ ____   ج) $لو_{٣} (١) =$ صفر

د) $لو_{٥} (١) =$ ______   هـ) $لو_{٣} ٨١ = ٤$ د) $لو_{٢} ٣٢ =$ ____

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: $لو_{م} (م) = ١$، $لو_{م} (١) =$ صفر، $لو_{م} م^{س} = س$

نشاط ٥ أَجِدُ قيمة اللّوغاريتمات الآتية:

١) $لو_{٢} (٢^{٦}) = ٦$.

٢) $لو_{٧} (\sqrt{٧}) =$ __________.

٣) $لو_{٣} (\frac{١}{٩}) =$ ____________.

نشاط ٦

أُكْمِلُ الجدول الآتي ثم أُجيب عما يليه:

س	٢		٨	١٦	٣٢
لو$_{٢}$ (س)	١	٢	٣	٤	٥
لو$_{٤}$(س)	$\frac{١}{٢}$			٢	

(١) لو$_{٢}$ (٢ × ٤) = لو$_{٢}$ (٨) = ٣ ، لو$_{٢}$ (٢) + لو$_{٢}$ (٤) = ١ + ٢ = ٣

(٢) لو$_{٢}$ (٢ × ٨) = ________ ، لو$_{٢}$ (٢) + لو$_{٢}$ (٨) = ________

(٣) لو$_{٤}$ (٢ × ٤) = ________ ، لو$_{٤}$ (٢) + لو$_{٤}$ (٤) = ________

(٤) لو$_{٤}$ (٢ × ٨) = ________ ، لو$_{٤}$ (٢) + لو$_{٤}$ (٨) = ________

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: إذا كان س، ص عددَيْنِ حقيقيَّيْن موجبيْن، وكان م عدداً حقيقيّاً موجباً غير الواحد، فإنَّ: لو$_{م}$ (س × ص) = لو$_{م}$ (س) + لو$_{م}$ (ص).

نشاط ٧

أُكْمِلُ الجدول الآتي ثم أُجيب عما يليه:

س	٣		٢٧	٨١	
لو$_{٣}$ (س)	١	٢			٥

(١) لو$_{٣}$ ($\frac{٨١}{٢٧}$) = لو$_{٣}$ (٣) = ١ ، لو$_{٣}$ (٨١) − لو$_{٣}$ (٢٧) = ٤ − ٣ = ١

(٢) لو$_{٣}$ ($\frac{٢٤٣}{٩}$) = ____________ ، لو$_{٣}$ (٢٤٣) − لو$_{٣}$ (٩) = ______________

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: إذا كان س، ص عددَيْنِ حقيقيَّيْن موجبيْن، وكان م عدداً حقيقيّاً موجباً غير الواحد،

فإنَّ: لو$_م$ $\left(\frac{س}{ص}\right)$ = لو$_م$ (س) − لو$_م$ (ص)

نشاط ٨

قام كل من عمر وندى بإيجاد قيمة كلٍّ من: لو$_٣$(٣×٣) ، لو$_٣$(٣)^٢ ، كالآتي:

ندى	عمر
لو$_٣$ (٣ × ٣) = لو$_٣$(٣) + لو$_٣$(٣)	لو$_٣$(٣)^٢ = ٢ لو$_٣$ ٣
= ١ + ١ = ٢	= ٢ × ١ = ٢

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: إذا كان ص عدداً حقيقيّاً موجباً، فإنَّ: لو$_م$ (ص)^م = م لو$_م$ (ص)، بحيث م ∈ ح*.

نشاط ٩

أكتب كل ممّا يأتي بصورة لوغاريتم واحد:

١) (لو$_م$ (٨) − لو$_م$ (ص)) = لو$_م$ $\left(\frac{٨}{ص}\right)$

٢) (لو$_م$ (٤) + لو$_م$ (س)) − (٣ لو$_م$ (٢)) = لو$_م$ (٤س) − لو ________

= ______________

نشاط ١٠

إذا كان لو$_م$ (٧) = ٢,٨١ ، أَجِدُ قيمة كل مما يأتي:

١) لو$_م$ (٢٨) ٢) لو$_م$ (٧)^٣ ٣) لو$_م$ (٣,٥)^٢

١) لو$_٢$ (٢٨) = لو$_٢$ (٤×٧) = لو$_٢$ (٤) + لو$_٢$ (٧) = ٢ + ٢,٨١ = ٤,٨١

٢) لو$_٢$ (٧)^٣ = ____ × لو$_٢$ (٧) = ٣ × ______ = ٨,٤٣

٣) لو$_٢$ (٣,٥)^٢ = لو$_٢$ ( )^٢ = __________

= __ × (لو$_٢$ ( ) − لو$_٢$ ( )) = __________

نشاط ١١

أُكْمِلُ حلّ المعادلة الآتية:

أ) ٢^{س} = ٦٤

الطّريقة الأُسِّيَّة

٢^{س} = ٦٤

________ = _______

ومنها: س= ٦

الطّريقة اللّوغاريتميّة

لو$_٢$ (٦٤) = س

لو$_٢$ (٢)^٦ = _______

٦لو$_٢$ (٢) = س

٦ × ١ = س، ومنها: س = ٦

ماذا تلاحظ؟

مثال: أحل المعادلة: لو$_٢$ (س + ٢) − لو$_٢$ (س − ١) = ٢

الحل: لو$_٢$ (س + ٢) − لو$_٢$ (س − ١) = لو$_٢$ $\frac{\text{س+٢}}{\text{س−١}}$ = ٢

$\frac{\text{س+٢}}{\text{س−١}}$ = ٢^٢

س + ٢ = ٤(س − ١)

س= ٤س − ٤ − ٢ ، ومنها: س = ٢

نشاط ١٢ أحلّ المعادلة: لو$_{١٠}$ (س) + لو$_{١٠}$ (٣) = ٢

لو$_{١٠}$ (   ) = ٢

$١٠^{٢}$ = __________

١٠٠ = __________

س = $\frac{١٠٠}{٣}$

نشاط ١٣ طلبت معلّمة الرياضيّات من رؤى وربى إيجاد قيمة لو$_{\frac{١}{٧}}$ (٤٩) ، أيّ منهما إجابتها صحيحة، وأذكرُ السَّبب.

رؤى	ربى
لو$_{\frac{١}{٧}}$ (٤٩) = ص	لو$_{\frac{١}{٧}}$ (٤٩) = ص
$٤٩^{ص} = \frac{١}{٧}$	$(\frac{١}{٧})^{ص} = ٤٩$
$(٧^{٢})^{ص} = ٧^{-١}$	$(٧^{-١})^{ص} = ٧^{٢}$
$٧^{٢ص} = ٧^{-١}$	$٧^{-ص} = ٧^{٢}$
٢ ص = -١	ص = -٢
ص = - $\frac{١}{٢}$	

تمارين ومسائل:

(١) أحسبُ قيمة كل من:

أ) لو$_{٢}$ (٦٤)　　　　ب) لو$_{٣}$ (٨١)

(٢) أُحوّلُ من الصّورة الأُسِّيَّة إلى اللّوغاريتميّة:

أ) ٢^{٤} = ١٦　　　　ب) ٠٫١٠ = ١٠$^{-١}$

(٣) أُحوّلُ من الصّورة اللّوغاريتميّة إلى الصّورة الأُسِّيَّة:

أ) لو$_{٢}$ ١ = ٠　　　　ب) لو$_{١٠}$ (٠٫٠٠١) = - ٣

(٤) إذا كان لو$_{٢}$ (٧) = ٢٫٨١ ، لو$_{٢}$ (٥) = ٢٫٣٢ ، أَجِدُ قيمة ما يأتي:

أ) لو$_{٢}$ (٣٥)　　　　ب) لو$_{٢}$ ($\frac{٧}{١٠}$)

(٥) أَجِدُ قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

أ) لو$_{٢}$ $\sqrt{٣٢}$ + لو$_{٢}$ $\sqrt{٢}$　　　　ب) لو$_{٣}$ (٨١) – لو$_{٣}$ (٩)　　　　جـ) لو$_{ه}$ (ه^{٢})^{٣}

(٦) أَكْتُبُ ما يأتي بصورة لوغاريتم لمقدار واحد:

أ) ٣ لو$_{ه}$ (س + ٦) – ($\frac{١}{٣}$) لو$_{ه}$ (٥ – س).　　　　ب) ٧لو$_{٣}$ (أ) + لو$_{٣}$ (ب) – ٢لو$_{٣}$ (٨جـ).

(٧) أَجِدُ مفكوك كلِّ لوغاريتم ممّا يأتي، حيث س، ص عددان حقيقيّان موجبان:

أ) لو$_{ه}$ ($\frac{س}{ص}$)^{٥}　　　　ب) لو$_{٢}$ (٣س^{٢})

(٨) أَحُلُّ المعادلاتِ الآتية:

أ) لو$_{٢}$ (٧س) = لو$_{٢}$ (س^{٢} + ١٢)　　　　ب) لو$_{١٠}$ (٥س^{٢} – ٣) – لو$_{١٠}$ (س^{٢} + ١) = ٠

(٩) لقياس مدى احتفاظ الطلبة بالمعلومات، يتم اختبارهم بعد وقت من تعلُّمها، ويمكن تقدير علامة الطالب في اختبار للرياضيّات باستخدام العلاقة:

ص = س – ٦لو$_{٢}$ (ت + ١)، حيث ت عدد الأشهر الّتي مضت بعد انتهاء الفصل الدراسيّ، س علامة الطالب في نهاية الفصل الدراسي، إذا حصل إبراهيم على العلامة ٨٥، أجد:

أ) قدِّر علامة إبراهيم بعد مضيّ ثلاثة أشهر.

ب) بعد كم شهر يكون تقدير علامة إبراهيم ٦٧.

(١ - ٨) الاقتران الأسّي (Exponential Function)

نشاط ١

يُحكى أنّ حكيماً قدّم رقعةَ شطرنج هديةً إلى ملك بلاد الفرس، فأراد الملكُ مكافأتَه. فطلب الحكيمُ أنْ تكونَ مكافأتَه مَلءَ مربعاتِ رقعةِ الشطرنجِ بالقمح؛ بحيثُ يضعُ حبّةً في الخانة الأولى، وحبتيْنِ في الخانة الثانية، وأربعَ حبّاتٍ في الخانة الثالثة وهكذا، ضحك الملكُ وحاشيتُه من طلب الحكيم المتواضع.

أُكملُ: عددُ حبّاتِ القمحِ في الخانة الرابعة = ٨

عدد حبات القمح في الخانة الخامسة = ...

عدد حبّاتِ القمح في الخانة السادسة = ...

- إذا علمت أنّ الكيلوغرام من القمح يحتوي على ٧٠٠٠ حبةٍ تقريباً. أُقدّرُ كميّةَ القمحِ التي طلبها الحكيم. هل نتوقّعُ أن يتمكّنَ الملكُ من مكافأةِ الحكيم؟ أُفسِّرُ إجابتي.

أتعلم: يُسمّى الاقترانُ اقتراناً أسّيّاً إذا كان على الصورة: ق(س) = أ^س ، أ ≠ ١ ، أ > ٠ ، س ∈ ح

أناقش لماذا أ > ٠ ، أ ≠ ١ ؟

نشاط ٢

أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ أُسّيٌّ ؟

ألاحظُ انّ: ق(س) = $٢^{س}$ اقترانٌ أسّيٌّ؛ لأنّ ....

بينما هـ(س) = $(-٣)^{س}$ ليس اقتراناً أسياً؛ لأن الأساس أ = -٣ < ٠ .

وعليه فإنّ: ل(س) = $س^{٢}$ هو اقترانٌ ....؛ لأنّ المتغير ليس أساً.

م(س) = $\left(\frac{١}{٦}\right)^{س}$ هو اقترانٌ ....؛ لأنّ ....

نشاط ٣

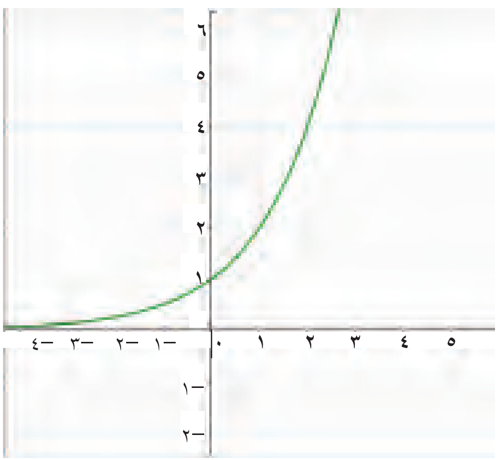
أمثّلُ الاقترانَ: ق(س) = $٢^{س}$ ، س ∈ ح في المستوى الديكارتي.

أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي:

س	٣	٢	١	٠	-١	-٢	
ق(س)	٨			١	$\frac{١}{٢}$		$\frac{١}{٨}$

• أعيّنُ النّقاطَ من الجدول السابق في المستوى الديكارتي،

وألاحظُ شكل منحنى الاقتران:



من التمثيل البياني لمنحنى الاقتران، أتعلّمُ أهم خصائص منحنى الاقتران الأسّي (أ > ١):

١) مدى الاقتران الأسّي هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (ح +).

٢) منحنى الاقتران يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ١).

٣) كلّما زادت قِيمُ س تزداد قيمَ ص المُناظِرةُ لها.

أفكر هل يقطعُ منحنى الاقتران ق محور السينات؟

نشاط ٤ أُكملُ الجدولَ الآتيَ لِقِيَم س ، ص للاقتران هـ(س) = ٣^{س}، ثمّ ارسمُ منحنى الاقتران:

س	٣	٢		٠	١-	٢-	
هـ (س)			٣			$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

• أدوِّن ملحوظاتي حول منحنييّ الاقترانين هـ(س)= ٣^{س} و ق(س) = ٢^{س}

نشاط ٥ أُكملُ الجدولَ الآتيَ لِقِيَمِ س ، والاقتران ق(س) ، ثم أرسمُ منحنى الاقتران.

س	٣	٢	١		١-		٣-
ق(س)= $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$	$\frac{١}{٨}$			١	٢	٤	

أعيّنُ النقاطَ على المستوى الديكارتي، وأرسم منحنى الاقتران.

- ألاحظُ من الرسم أنّ: منحنى ق(س) = ٢^{س} هو انعكاس لمنحنى الاقتران هـ(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ في محور الصادات، أوضح ذلك جبريّاً.
- من التمثيل البياني للاقتران في النشاط السابق، ألاحظُ أهمَّ خصائص الاقتران الأسّي: ق(س) = أ^{س} ، ٠ < أ < ١ وهي:

١) مدى الاقتران الأسّي هو: ....

٢) يقطعُ منحنى الاقتران محورَ الصادات في النقطة: ....

٣) كلما زادت قيم س، فإنّ قيمَ ص المناظِرَةَ لها ....

نشاط ٦

أمثّلُ منحنى الاقتران هـ(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ بيانيّاً على المستوى الديكارتي.

أدوّنُ ملحوظاتي حول منحنييّ الاقترانين: هـ(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ و ق(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$

أمثّلُ الاقتران ق(س) = $٣^{س}$ + ٢ في المستوى الديكارتي.

نشاط ٧

أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي:

س	٣	٢		٠		-٢	-٣
ص= ق(س)	٢٩		٥		٢ $\frac{١}{٣}$	٢ $\frac{١}{٩}$	

- أعيّنُ النقاطَ في الجدول السابق على المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران.
- **ألاحظُ أنّ:** الاقتران ق(س) = $٣^{س}$ + ٢هو انسحاب لمنحنى الاقتران هـ(س) = $٣^{س}$ وَحدتين إلى الأعلى.

أتعلّمُ: يُمكنُ تطبيقُ جميعِ التحويلاتِ الهندسيّةِ التي تعلمتُها على الاقتران الأسّي.

الاقتران الأسّيّ الطبيعيّ

الاقتران الأسّي الطبيعي: هو اقترانٌ أسّيٌّ يكون أساسُه العددَ هـ ، حيثُ هـ عددٌ غيرُ نسبي له أهمية خاصة في الرياضيات ويسمى العدد النيبيري نسبة إلى (John Napier) ويساوي تقريباً ٢,٧١٨٢٨

نشاط ٨

إذا كان ل(س) = $هـ^{س}$ ، أجدُ قيمةَ ما يأتي، مُقرّباً لأقربِ منزلتيْن عشريتيْن، باستخدام الآلة الحاسبة.

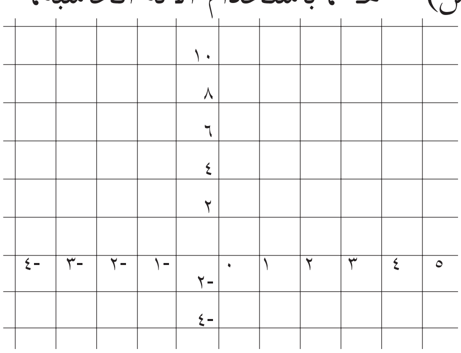
أ) ل(٢) = $هـ^{٢}$ = ٧,٣٩

ب) ل(٤) + ٢ = $هـ^{٤}$ + ٢ = ...

نشاط ٩

أكملُ الجدولَ الآتيَ لقيم س ، ق(س) للاقتران ق(س) = $هـ^{س}$، باستخدام الآلة الحاسبة، ثمّ أرسمُ منحنى الاقتران:

س	٣	٢	١	$\frac{١}{٢}$	٠	-١
ق(س)		٧,٣٩		١,٦٥		



تمارين ومسائل:

(١) أيٌّ من الاقترانات الآتية يُعَدُّ اقتراناً أُسّيّاً ؟ مع بيان السبب.

أ) ق(س) = $٥^{س}$ ب) م(س) = $٤^{-س}$

جـ) هـ(س) = $٢س^{٣}$ د) ص = $(-٢)^{س}$

هـ) ص = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(٢) أمثّلُ منحنى الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي، وأجدُ مدى كل اقتران منها:

أ) ص = $٣^{س}$ − ٢ ب) ص = ٥ − $٢^{س}$

جـ) ص = $٤^{-س}$ د) ص = $-\left(\frac{١}{٤}\right)^{س}$

(٣) استخدمُ منحنى ق(س) = $هـ^{س}$، والتحويلات الهندسيّة المناسبة لرسم الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $هـ^{-س}$ ب) ق(س) = ٣ − $هـ^{س}$ جـ) ق(س) = $هـ^{(س-١)}$

(٤) أجدُ قيمةَ كلٍّ من: ﻫ ، ب لمنحنى ق(س) = ﻫ $(٣)^{س}$ + ب، الذي يمرُّ بالنقطتين: (١،٣) ، (٠،٢).

(٥) أُدخِلتْ سيدةٌ مجمّعَ فلسطينَ الطبيّ في مدينة رام الله، لارتفاع نسبة الالتهاب في جسمها. أُعطِيتْ جَرْعةٌ من البنسلين في الدم. لوحظ أن ٦٠٪ من جَرْعة البنسلين فقط بقيت في الدم بعد مرور ساعةٍ على تناولها. وعند متابعة حالتها لوحظ أنّ جسمَها يُدمّرُ البنسلينَ بالنّمطِ نفسِه، وفي نهاية كلِّ ساعة يتبقى فقط ٦٠٪ من البنسلين الموجود في نهاية الساعة السابقة.

إذا أُعطيَتِ السيدة ٣٠٠ ملغرام من البنسلين الساعة الثامنة صباحاً، أُكملُ الجدول الآتي (بعد نقله إلى دفتر الإجابة)، لحساب كمية البنسلين في الدم نهايةَ كلّ ساعة، خلال الفترة بين الثامنة والحادية عشرة صباحاً:

الساعة	٨:٠٠ صباحاً	٩:٠٠ صباحاً	١٠:٠٠ صباحاً	١١:٠٠ صباحاً
البنسلين (ملغرام)	٣٠٠			

أُمثلُ البيانات السابقة في المستوى الديكارتي، وأُلاحظُ الشكل الناتج.

(١ - ٩) الاقتران اللوغاريتمي (Logarithmic Function)

نشاط ١

يستخدمُ مشفى المُطّلِع في مدينة القدس مادة اليود (١٣١) المشعة في تشخيص أمراض الغدة الدرقية، عِلماً بأنّ المادةَ تخسرُ نصفَ كتلتِها خلال ٨ ايام (تسمى هذه الفترة فترة عمر النصف). فإذا حصل المشفى على ٢غم من اليود (١٣١)، أجيب عما يأتي:

أكملُ الجدولَ الآتي:

عدد الأيام	٨ أيام	١٦ يوماً	
مقدار المادة المتبقية			$\frac{١}{٤}$ غم

أفكر

تبقّى من المادة بعد مضي ٢٠ يوماً .... تقريباً.

يلزم من الوقت كي تصبحَ كتلتها ٠,٠٠١ غم .... تقريباً.

نشاط ٢

أجدُ قيمةَ ما يأتي:

لـو$_{٤}$ ٦٤ = ...

لـو$_{١٠}$ ١٠٠ = ...

لـو$_{٨}$ ١ = ...، لـو$_{٣}$ ٣ = ...، لـو$_{٧}$ $\frac{١}{٤٩}$ = ...

أتعلم: الاقتران على الصورة ق(س) = لـو$_{أ}$ س ، حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١ ، س > ٠ . يُسمّى اقتراناً لوغاريتميّاً.

أناقش **لماذا** أ > ٠ ، أ ≠ ١ ؟

ملحوظة: من اللوغاريتمات الأكثر شيوعاً اللوغاريتم ذو الأساس ١٠، ويُسمّى اللوغاريتم العادي، ويُكتبُ عادةً على الصورة ص= لـوس ، س > ٠ (لا يُكتبُ له الأساس ١٠).

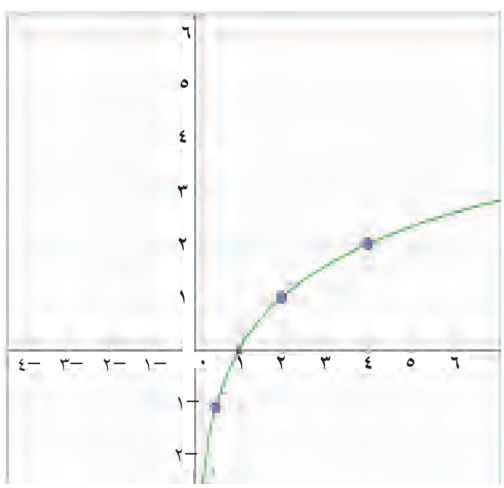
وإذا كان الأساسُ العدد هـ يُسمّى اللوغاريتم الطبيعي، ويُكتب على الصورة: ق(س) = لـو$_{هـ}$س.

نشاط ٣ أكوِّنُ جدولاً لقيم س ، ق(س) المناظرة لها، للاقتران ق(س) = لـو$_{٢}$س، ثم أرسمُ منحنى الاقتران.

س	٨	٤		١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	
ق(س) = لـو$_{٢}$س	٣		١			-٢	-٣

أتذكرُ أنّ: لـو$_{٢}$ $\frac{١}{٤}$ = -٢ لأن ٢$^{-٢}$ = $\frac{١}{٢^{٢}}$ = $\frac{١}{٤}$.

أعيّنُ النقاط في المستوى البياني، وأرسمُ منحنى الاقتران ، كما هو في الشكل (٢-٣):



من منحنى الاقتران ص= لـو$_{٢}$س ، ألاحظُ خصائصَ الاقتران ص= لـو$_{أ}$س، حيث أ > ١ :

- مجال الاقتران اللوغاريتمي هو: .... ومداه هو: ....
- نقطة (أو نقاط) تقاطع منحنى الاقتران مع محوريّ الإحداثيات هي: ....
- كلما زادت قيمُ س فإنّ قيمَ ص المناظِرة لها ....

نشاط ٤

أرسم منحنى ص = ٢^{س} على المستوى المرسوم عليه منحنى الاقتران ص= لـو$_{٢}$س ثم أقارنُ بين منحنييّ الاقترانين.

نشاط ٥

أمثّلُ منحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{٢}$س – ١ في المستوى الديكارتي ، وأقارنُ منحناه مع منحنى الاقتران هـ(س) = لـو$_{٢}$س.

أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي:

س	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$
ق(س) = لـو$_{٢}$س – ١	٣ – ١ = ٢	١			٢-	

أرسمُ منحنى الاقتران.

ألاحظُ أنّ منحنى ق(س) = لـو$_{٢}$س – ١ ، هو انسحابٌ لمنحنى الاقتران هـ(س) = لـو$_{٢}$س وَحدةً واحدةً إلى الأسفل.

أتعلّمُ: بشكلٍ عام، يُمكنُ تطبيقُ جميعِ التحويلات الهندسيّة التي تعلمتها على الاقتران اللوغاريتمي.

نشاط ٦

أكوِّنُ جدولاً لقِيَمِ س ، ق(س) المناظِرةِ لها للاقتران ق(س) = لـو$_{\frac{1}{2}}$س ، ثم أرسمُ منحناه:

س	٨	٤	٢	١		$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$
ق(س) = لـو$_{\frac{1}{2}}$س		-٢		٠	١		

من منحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{\frac{1}{2}}$س ، أستنتجُ خصائصَ الاقتران ص= لـو$_{أ}$س، حيث ٠ < أ < ١.

- ألاحظُ أنّ: الاقتران ق(س) = لـو$_{\frac{1}{2}}$س، هو اقترانٌ مجالُه .... ، ومداه ....
- تقلُّ قيمُ ق(س) كلّما زادت قيمُ س المناظِرةُ لها، ويمرُّ منحناه في النقطة (١ ، ٠).

أناقش

ما العلاقةُ بين منحنى ق(س) = لـو$_{\frac{1}{2}}$س ومنحنى هـ (س) = لـو$_{٢}$س؟ أتحقّقُ من العلاقة التي توصلتُ إليها جبريّاً.

نشاط ٧

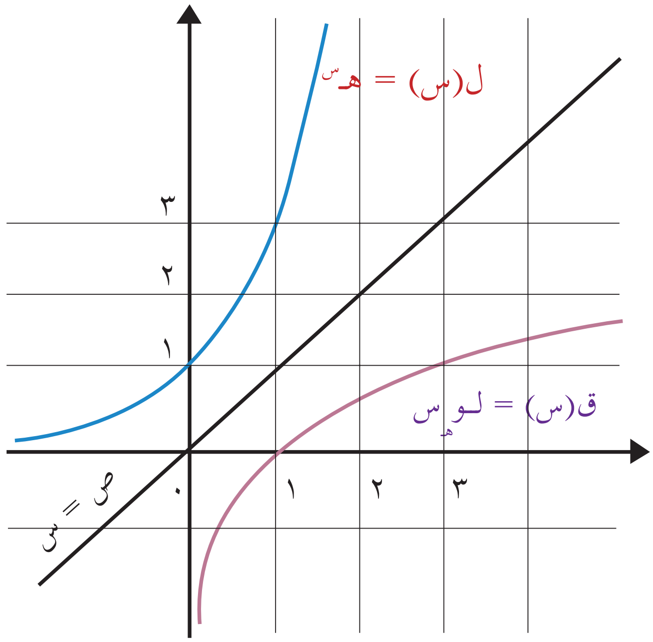
أكوّن جدولاً لقيم س ، هـ(س) المناظرة لها للاقتران هـ(س) = لـو$_{\frac{1}{3}}$س، ثم أرسمُ منحنى هذا الاقتران على منحنى ق(س) = لـو$_{\frac{1}{2}}$س ، وأقارنُ بينهما.

س	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	
هـ(س) = لـو$_{\frac{1}{3}}$س	-٢				٢	٣

مثال(١): بالاعتماد على منحنى الاقتران الأسّيّ الطبيعيّ ل(س) = هـ^{س} ، وخصائص منحنى الاقتران اللوغاريتمي، أرسمُ منحنى الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ق(س) = لـو$_{هـ}$س

الحلّ: عرفت من النشاط السابق أن منحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{هـ}$س ، هو انعكاسٌ لمنحنى ص = هـ^{س} في المستقيم ص = س.

نرسم منحنى ل(س) = هـ^س^ ، ثم نرسمُ انعكاسَه في الخط المستقيم ص = س ، فيكون لدينا منحنى الاقتران، كما هو في الشكل المجاور.



نشاط ٨

أجدُ مجالَ كلٍّ من الاقترانات الآتية:

- ق(س) = لو~٢~ (س − ٣)
- هـ(س) = لو~٣~ (س^٢^ − ١)

مجال الاقتران اللوغاريتمي هو ح^+^، فإن مجال ق(س) معرّفٌ عندما س − ٣ > ٠ .

مجال ق(س) هو : ....

أما مجال هـ (س) فهو معرّفٌ عندما س^٢^ − ١ > ٠ .

وعليه فإن: مجال هـ (س) هو : ....

تمارين ومسائل:

(١) احسب قيمة ما يأتي:

أ) $لـو_{٣}$ ٧٢٩

ب) $لـو_{٥}$ ٠,٠٤

جـ) لـو ٠,٠٠٠١

(٢) مستعيناً بالتحويلات الهندسية ومنحنى الاقتران ق(س) = $لـو_{٢}$س، أمثّلُ الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي:

أ) هـ(س) = $لـو_{٢}$س − ١

ب) ل(س) = $لـو_{٢}$ (س + ٢)

جـ) م(س) = -$لـو_{٢}$ (س + ١)

(٣) أجدُ مجال كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $لـو_{هـ}$ (٥س − $س^{٢}$)

ب) ق(س) = $لـو_{٢}$ $\sqrt{٢س − ٣}$

(٤) بدأ عالمٌ تجربته بـ ٥٠٠٠٠٠٠ خليةٍ، ولاحظ أنّ ٤٥٪ من الخلايا تموت كلَّ دقيقة. كم تستغرق من الزمن حتى يصبح عددها أقلَّ من ١٠٠٠ خلية؟

(١ - ١٠): تمارين عامّة

السؤال الأول:

(١) ما قاعدة الاقتران الناتجة من انسحاب منحنى ق(س) وَحدتين إلى اليسار، ثم وَحدتين إلى الأعلى ؟

أ) ق(س) + ٤ ب) ق(س) − ٤ جـ) ق(س + ٢) + ٢ د) ق(س − ٢) + ٢

(٢) ما صورة منحنى ق(س) المعكوس في محور السينات، من منحنيات الاقترانات الآتية ؟

أ) ق(-س) ب) -ق(-س) جـ) -ق(س) د) ق(س − ١)

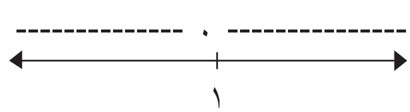
(٣) أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ نسبيّ ؟

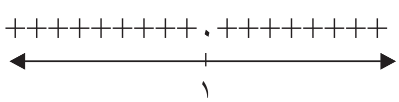
أ) $\frac{٣}{\sqrt{س}}$ ب) $\frac{س^{\frac{٢}{٣}} - ١}{س}$ جـ) $\frac{١}{س}$ د) $\sqrt{\frac{س - ١}{س}}$

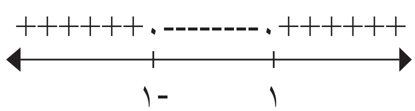
(٤) محور تماثل ق(س) = | ١٠ − ٢س | ، هو الخط المستقيم:

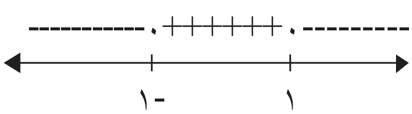
أ) س = ٥ ب) س = -٥ جـ) ص = ٥ د) ص = -٥

(٥) أيٌّ من الآتية خطُّ إشارة الاقتران ق(س) = (س − ١) (١ − س) ؟

أ)


ب)


جـ)


د)


(٦) ليكن: ق(س) = |٣س + ٤| فما قيمة ق(-٣) ؟

أ) -٥ ب) ٣ جـ) ٥ د) ١٣

(٧) ما قيمة $لو_{٥}$ ١٢٥ ؟

أ) ٥ ب) ٣ جـ) ١ د) -٥

(٨) أيُّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ أسّيٌّ ؟

أ) $\left(\frac{\text{١-}}{\text{٣}}\right)^{\text{س}} - \text{٢}$ ب) $\text{س}^{\text{٣}}$ جـ) $(\text{-هـ})^{\text{س}}$ د) $\text{٥}^{\text{س}}$

(٩) أيُّ العبارات الآتية عبارة صائبة بالنسبة للاقتران ق(س) = $\text{٣}^{\text{س}}$ ؟

أ) مجال الاقتران ومداه هما مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

ب) مجال الاقتران هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ح، بينما مداه هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ح+ .

جـ) مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (ح+)، بينما مداه هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ح.

د) مجاله ومداه هما مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ح.

(١٠) أيُّ الاقترانات الآتية هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\text{٢}^{\text{س}}$ في محور الصادات؟

أ) هـ(س) = $\text{لـو}_{\text{٢}}\text{س}$ ب) هـ(س) = -($\text{٢}^{\text{س}}$) جـ) هـ(س) = $\text{٢}^{\text{-س}}$ د) ل(س) = $\text{هـ}^{\text{س}}$

(١١) إذا كان ق(س) = $\text{أ}^{\text{س}}$ ، حيث أ > ١ ؟ فإن إحدى العبارات الآتية صائبة بخصوص منحنى ق:

أ) يقطعُ محوريّ الإحداثيات في النقطتين: (٠،١) ، (١،٠) على الترتيب.

ب) يقطعُ محور الصادات في النقطة (٠،١).

جـ) يقطعُ محور السينات في النقطة (١،٠).

د) لا يقطعُ أيّاً من المحورين.

(١٢) أيُّ الاقترانات الآتية ليس اقتراناً لوغاريتمياً ؟

أ) ق(س) = $\text{لـو}_{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}\text{س}$

ب) ق(س) = لـوس

جـ) ق(س) = $\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}$

د) هـ(س) = $\text{لـو}_{\text{١}}\text{س}$

(١٣) أيُّ العبارات الآتية عبارة خاطئة حول منحنى الاقتران ق(س) = $\text{لـو}_{٣}$س ؟

أ) كلما زادت قيمة س زادت قيمة ص المناظرة لها.

ب) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) = $٣^{س}$ في محور الصادات.

جـ) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\text{لـو}_{\frac{١}{٣}}$س في محور السينات.

د) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) = $٣^{س}$ في الخط المستقيم ص = س.

(١٤) ما مجال الاقتران ق(س) = لـو (س^{٢} − ١) ؟

أ) مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الموجبة ح+ .

ب) مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي للفترة]-١،١[.

جـ) مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ما عدا [-١،١] .

د) مجموعة جميع الأعداد الحقيقية التي تنتمي للفترة]٠،١[.

(١٥) ما الاقتران الناتج من انعكاس منحنى الاقتران ل(س) = $هـ^{س}$ في الخط المستقيم ص = س؟

أ) ق(س) = $هـ^{س}$ ب) ق(س) = $\text{لـو}_{هـ}$س

جـ) ق(س) = $هـ^{-س}$ د) ق(س) = - ($هـ^{س}$)

(١٦) ما قاعدة الاقتران ق(س) = $\text{لـو}_{٣}$س ، عند إجراء انسحاب وحدتين لليمين ؟

أ) هـ(س) = $\text{لـو}_{٣}$ س + ٢   ب) هـ(س) = ٢$\text{لـو}_{٣}$ س

ج) هـ(س) = $\text{لـو}_{٣}$ (س + ٢)   د) هـ(س) = $\text{لـو}_{٣}$ (س − ٢)

(١٧) أيٌّ من التحويلات الهندسية الآتية تم الاعتماد عليها لتمثيل ل(س) = ٣ − $\text{لـو}_{هـ}$س باستخدام منحنى ق(س) = $\text{لو}_{هـ}$س ؟

أ) انسحاب إلى الأعلى ٣ وحدات، ثم انعكاس في محور السينات.

ب) انعكاس في محور الصادات، ثم انسحاب إلى الأعلى ٣ وحدات.

جـ) انعكاس في محور السينات، ثم انسحاب الى اليمين ٣ وحدات.

د) انعكاس في محور السينات، ثم انسحاب إلى الأعلى ٣ وحدات.

السؤال الثاني:

أُمثّلُ منحنياتِ الاقتراناتِ الآتيةَ بيانيّاً مستعيناً بالتحويلات الهندسية الملائمة:

أ) ت(س) = س^{٢} + ٣

ب) هـ(س) = (س + ٣)^{٣}

جـ) ل(س) = - (س^{٣} − ١)

د) ك(س) = س^{٢} + ٦س + ٦

هـ) ع(س) = $\sqrt{\text{س} - ٤}$ ، س ≥ ٤

السؤال الثالث:

أبحثُ في إشارة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ل(س) = س^{٢} + ٣س + ٢

ب) م(س) = ٨ − ٢س

جـ) ق(س) = $\frac{\text{ل(س)}}{\text{م(س)}}$ ، م(س) ≠ صفر.

السؤال الرابع:

أحسبُ قيمة كلٍّ من الآتية :

أ) لـو$_{٢}$ ١٦ ـ لـو$_{٢}$ ١٢٨

ب) لـو$_{٤}$ $\frac{١}{٢٥٦}$

جـ) لـو$_{٢}$ ٩ ـ لـو$_{٣}$ ٢٤ ـ ٣ لـو$_{٣}$ ٢

د) لـو$_{٤}$ $\sqrt{٦٤}$

السؤال الخامس:

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي، لأقرب ثلاث منازل عشرية، باستخدام الآلة الحاسبة:

أ) هـ$^{-٢}$ + ٣

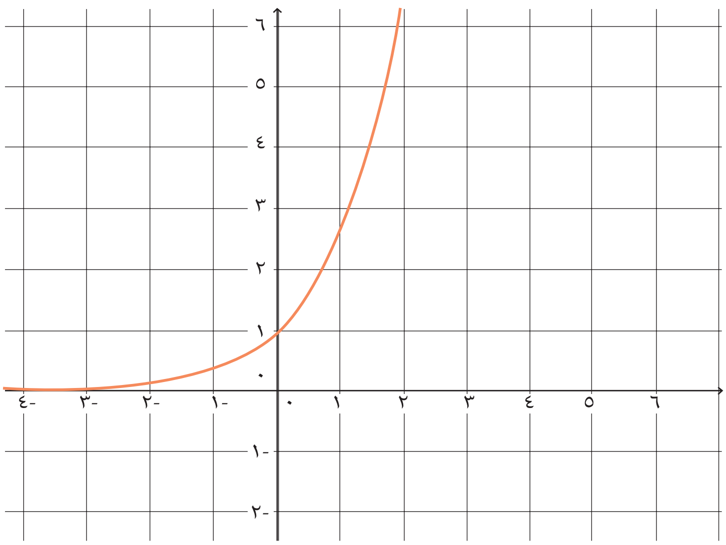
ب) ٤$\sqrt{\text{هـ}}$ − ٥

جـ) لـو$_{١٠}$ $\sqrt{١٠}$

السؤال السادس:

يمثلُ الشكل الآتي منحنى الاقتران ق(س) = $\text{أ}^{\text{س}}$ ، أ ≠ ١

أرسمُ ـ مستعيناً بالشكل ـ منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية، موضحاً الحل:



أ) ص = $\text{لو}_{\text{أ}}$ س

ب) ص = $\text{لو}_{\text{أ}}$ (س − ١)

جـ) ص = $\text{لو}_{\frac{1}{\text{أ}}}$ س

د) ص = ١ − ق(س)

هـ) ص = $\text{أ}^{(\text{س}-1)}$

السؤال السابع:

أدرسُ سلوك الاقتران ق(س) = لـو (٢س + ٣) من حيث : مجاله ، ومداه ، وكل من مقطعيه السيني والصادي .

السؤال الثامن:

إذا كانت العلاقة بين شدّة التيار الكهربائي (ت)، المارّ في سلك بالأمبير، والزمن بالثواني (ᨀ)، تعطى بالعلاقة ᨀ = لو_{2} ت أمثّلُ بيانياً العلاقة بين شدة التيار والزمن، ثم أجدُ من الرسم شدّةَ التيار بعد زمنٍ قدرُهُ ثانية ونصف. (استخدم برنامج الرسم جيوجبرا GeoGebra في تحديد الزمن).

أُقيّمُ ذاتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	دون المتوسط
رسم الاقترانات باستخدام التحويلات الهندسية			
تحديد اشارة اقتران نسبي			
حل متباينة تربيعية بمتغير واحد			
حل معادلة أسية ولوغرتمية			
تمثيل اقترانات أسية ولوغرتمية			

فكرةٌ رياديّة:

قدّمتْ شركةُ اتصالاتٍ فِلَسطينيّةٌ عرضاً للاشتراك معها: العرض الأول يدفع المشتركُ ٢٠ ديناراً مبلغاً ثابتاً، إضافة إلى ٢٠ قرشاً، عن كلِّ دقيقةِ اتصالٍ، أو جزءٍ منها.

العرض الثاني: يدفع المشتركُ ٣٠ ديناراً مبلغاً ثابتاً، إضافة إلى ١٠ قروش، عن كلِّ دقيقةِ اتصالٍ، أو جزءٍ منها.

أرادَ أميرٌ الاشتراكَ مع هذه الشركة.

- أُبيّنُ العلاقاتِ الرياضيّةِ اللازمةِ، لتنصحَ أميراً في اختيار العرضِ المناسبِ له.

روابط الكترونية:

www.alentum.com
www.desmos.com/calculator

الوحدة ٢ الثانية

الهندسة
Geometry

تأسّس استاد الحسين بن علي الدّوْليّ/ الخليل عام ٢٠٠٩م ، وتم افتتاحُه بإجراء مباراةٍ بين المنتخب الأولمبي الفلسطينيّ، ونظيره الأردني في إحدى ليالي رمضان. ويُعدُّ ثالثَ استاد على مستوى فلسطين.

أُخذت هذه الصّور أثناء إنشاء المِظلّة عام ٢٠١٢م، ما الأشكال الهندسيّة الموجودة في الشكل؟ وكيف تمّ تصميمُها لتقاوم السقوط، وتحافظ على سلامة المواطنين؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الإنشاءات الهندسية في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- القيام بالإنشاءات الهندسيّة الآتية:

- تنصيف قطعةٍ مستقيمةٍ، وتنصيف زاوية.
- رسم مستقيم موازٍ لمستقيم آخر.
- تمثيل العمليات الحسابية بالإنشاءات الهندسية.
- إقامة عمودٍ على مستقيمٍ من نقطةٍ واقعةٍ عليه.
- إنزال عمودٍ على مستقيم من نقطةٍ خارجةٍ عنه.
- رسم المضلّعات المنتظمة.

(٢ - ١) إنشاءات هندسيّة (١)
Geometric Constructions (1)

نشاط ١

الهندسة الإنشائيّة إحدى تخصّصات الهندسة المدنيّة التي تُدرَّسُ في جامعاتنا الفلسطينيّة والتي تهتمّ بدراسة المنشآت التي تدعمُ وتقاومُ الأحمال. وقد اتّسعت الهندسة الإنشائيّة لِتشملَ هندسةَ الجسور والأبنية، والهياكل (السيارات، الطائرات). الشكل المجاور يبيّن أحد التصاميم الهندسيّة.

أكتبُ أربعة أشكالٍ هندسيّةٍ في الشكل: مستطيل، .... ، .... ، ....

الأدوات التي استُخدِمتْ في رسم هذه الأشكال الهندسيّة:

....

الإنشاء الهندسيّ: هو رسم الأشكال والزّوايا بدقّةٍ، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار فقط.

أتعلّم: يُمكن إثباتُ أيِّ إنشاءٍ هندسيّ بأدلةٍ وبراهينَ رياضيّة.

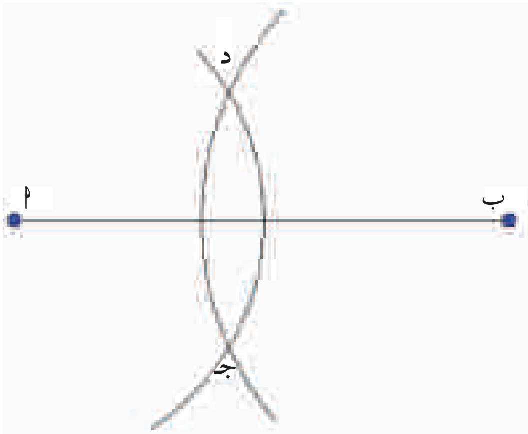
ألاحظُ أنّ: جميع الأشكال في النشاط السابق هي خطوطٌ مستقيمةٌ، أو دوائر، أو جزء منهما.

أفكر

لماذا تُستخدَمُ الحافة المستقيمة والفرجارُ فقط في الإنشاءات الهندسيّة ؟

نشاط ٢

تنصيف قطعةٍ مستقيمة



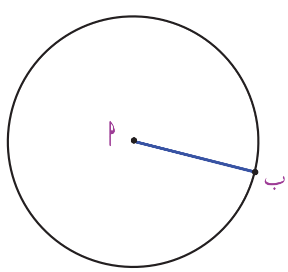
- أفتحُ الفرجارَ فتحةً مناسبة (أكبر من نصف طول أ ب)، لماذا؟
- أُثبّتُ الفرجار في النقطة أ، وأرسم دائرة (أو جزءاً من دائرة يقطع القطعة المستقيمة).
- بالفتحة نفسها أُثبّت الفرجار في النقطة ب، وأرسم دائرةً أخرى تتقاطع مع الدائرة الأولى.
- أحدّدُ نقاط تقاطع الدائرتيْن، وأُسمّيهما جـ ، د ، وأصلُ بينهما.
- نقطة تقاطع المستقيم جـ د مع القطعة المستقيمة أ ب هي نقطة المنتصف ولتكنْ م. لإثبات أنّ النقطة م هي منتصف القطعة المستقيمة أ ب هندسيّاً، أصل بين النقاط أ، جـ، ب، د.
- الشكل الناتج هو: ....

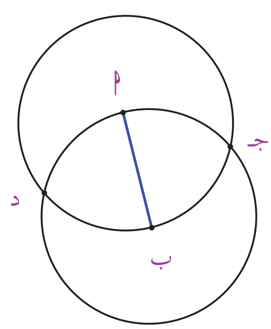
العلاقة بين أقطاره: .... و ....

أستنتج: أنّ النقطة م هي: ....

نشاط ٣

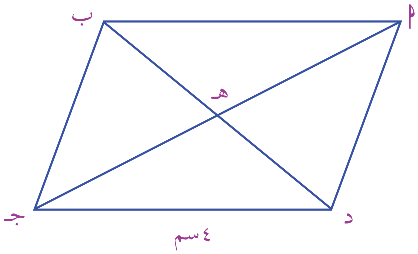
الشكلان المجاوران يبيّنان جزءاً من تنصيف قطعتيْن مستقيمتيْن، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار أكمل الرسم؛ لتُحدّدَ نقطة المنتصف.





نشاط ٤

أجدُ محيطَ المثلث جـ ب هـ في متوازي الأضلاع المجاور، إذا علمت أنّ ب د = ٤سم.



هـ ٱ = ٣سم ٱ د = ٣ سم

ب هـ = ... ؛ لأنّ هـ هي نقطة منتصف القطعة

....

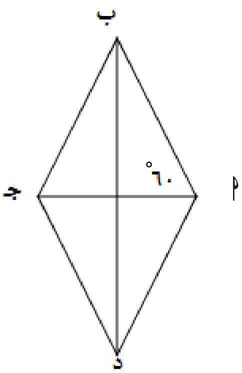
محيط المثلث = ...

أفكر

هل يمكن تقسيم قطعةٍ مستقيمةٍ إلى ٤ أجزاء متساوية ؟

هل يمكنُ تقسيمُ قطعةٍ مستقيمةٍ إلى ٥ أو ٦ أجزاء متساويةٍ بالطريقة نفسها ؟

نشاط ٥



الشكل المجاور هو معيّن.

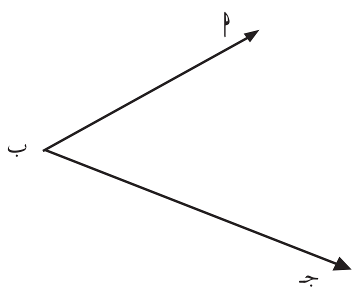
∢ ٱ ب جـ = ...

∢ ٱ ب د = ...

قطر المعين $\overline{\text{د ب}}$ ينصف زاوية ....

نشاط ٦

تنصيف زاوية:



- أُسمّي الزّاوية في الشّكل المجاور: ....
- عناصرها: ....،......................،

....

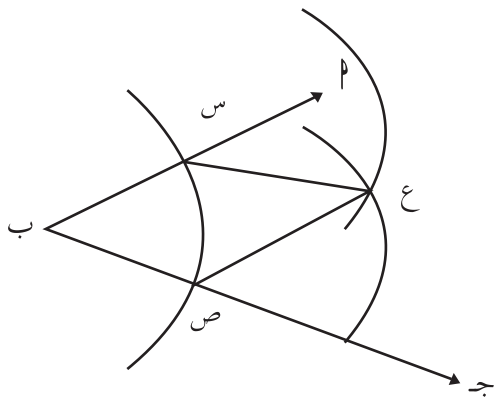
.............، ....، ....

أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبةً، وأثبّت رأس الفرجار عند رأس الزاوية ب، وأرسم قوساً يقطع ضلعيّ الزاوية في النقطتين س ، ص على التوالي.

أثبّتُ الفرجار عند النقطة س، وأرسم قوساً بفتحة مناسبة.

أثبّت الفرجار عند النقطة ص، وبالفتحة نفسها أرسم قوساً آخر، يقطع القوس الأوّل في النقطة ع.

فيكون $\overleftrightarrow{\text{ب ع}}$ منصّف الزاوية.



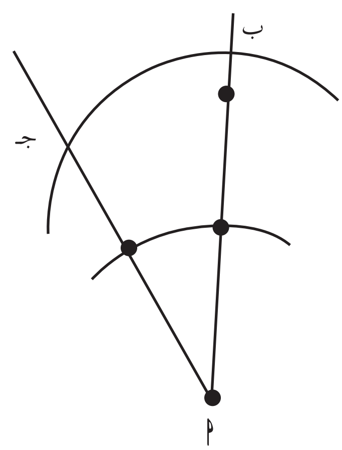
للتحقّق هندسيّاً أنّ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب ع}}$ هو منصّف

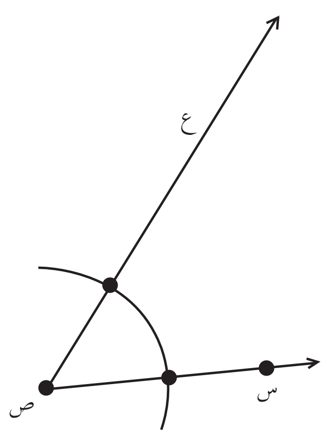
للزّاوية س ب ص:

من تطابق المثلث ب س ع ، والمثلث ب ص ع فيهما:

نشاط ٧

أكملُ الرسم لأنصّفَ الزّاوية المرسومة في كلّ شكل:



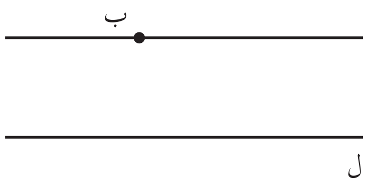


أفكر

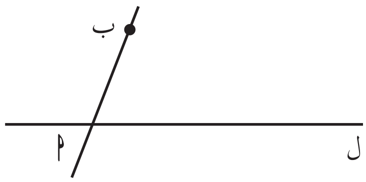
هل يمكن تثليث زاوية ما (تقسيمها إلى ثلاث زوايا متساويةٍ في القياس)؟ أبحث في ذلك.

مثال: رسم مستقيم موازٍ لآخر من نقطةٍ معلومة.

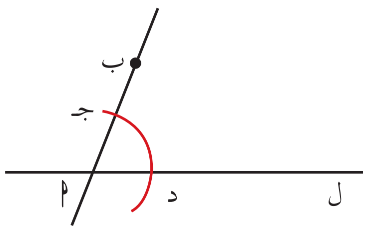
- أرسمُ مستقيماً موازياً للمستقيم ل، ويمرُّ بالنقطة ب:



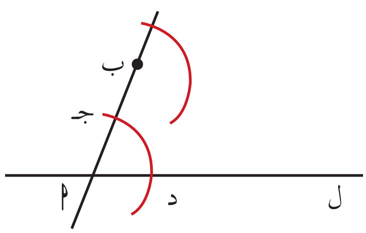
- أرسم من النقطة ب أيّ مستقيم، يقطع المستقيم ل في النقطة أ.



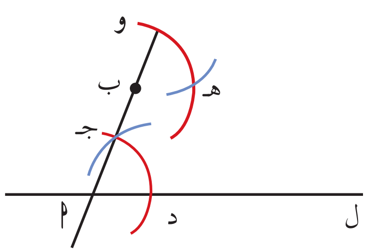
- أفتحُ الفرجارَ فتحةً مناسبةً (أقلّ من أ ب)، وأرسمُ قوساً من دائرة مركزُها أ ويقطع المستقيم أ ب في النقطة جـ ، والمستقيم ل في النقطة د.



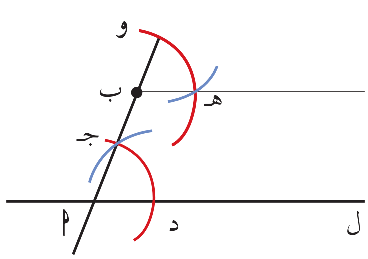
- أُثبّتُ الفرجار في النقطة ب، وبالفتحة نفسها أرسمُ قوساً آخر يقطع المستقيم أ ب في النقطة و.



- أفتحُ الفرجار فتحةً تساوي جـ د، وأرسمُ قوساً من دائرة مركزها و يقطع القوس السابق في النقطة هـ.



- المستقيم ب هـ يوازي المستقيم ل.



ألاحظ: من التوازي ينتج أنّ ∢ د ٩ جـ = ∢ هـ ب و بالتناظر، ويُسمّى هذا الإنشاء نقلَ زاويةٍ معلومة.

ملاحظة: يمكن الإفادة من إنشاء خطٍّ موازٍ لآخر في تمثيل حاصلِ ضربِ عددين، وناتج قسمة عددين.

الإنشاء الهندسي لحاصل ضربِ العددين: ٩ ، ب.

- أرسم المثلّث فيه س ص ع بحيث س ص = وحدة واحدة، س ع = ب وحدة.
- على امتداد الضلع $\overline{\text{س ص}}$ أرسمُ قطعةً مستقيمة، طولها ٩ وحدة، ولتكن $\overline{\text{س ل}}$.
- من النقطة ل أرسم مستقيماً موازياً للضلع ص ع، ويقطع امتداد الضلع س ع في النقطة هـ.
- طول القطعة المستقيمة $\overline{\text{س هـ}}$ يمثّلُ حاصل الضرب ٩ ب.

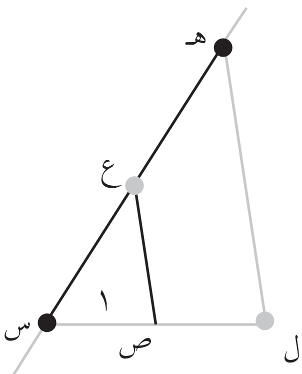
نشاط ٨

أوضّحُ: أنّ طول $\overline{\text{س هـ}}$ = ٩ب

المثلّث س ص ع يشابه المثلث ....

$\frac{\text{س ع}}{\text{س ص}} = \frac{\text{س هـ}}{\text{س ل}}$ ....

س هـ = ٩ب



نشاط ٩

تمثيل ناتج قسمة عددين هندسياً.

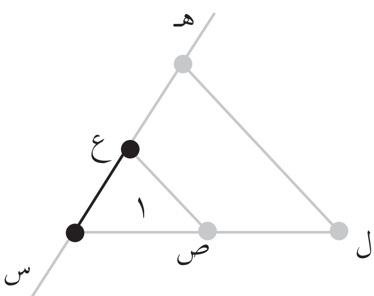
إذا كان س ل = ٩ وحدة ، س هـ = ب وحدة ،

س ص = وحدة واحدة.

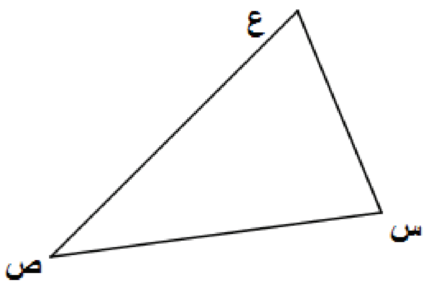
أبيّنُ أنّ: س ع = $\frac{\text{ب}}{٩}$

المثلّثان س ص ع ، س ل هـ ....

$\frac{\text{س هـ}}{\text{س ل}} = \frac{...}{...}$ ، س ع = ...

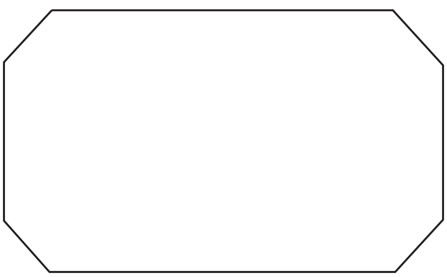


تمارين ومسائل:



(١) أرسم القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفيّ ضلعيْن في مثلث توازي الضلع الثالث، وطولها يساوي نصف طوله. أرسمُ القطعةَ الواصلة بين منتصفيّ ضلعيْن في المثلث س ص ع باستخدام الحافة المستقيمة، وأتحقّقُ من النظريّة بالقياس.

(٢) مُنصّفات زوايا المثلث تتلاقى في نقطةٍ واحدة، وهي مركز للدائرة المرسومة داخل المثلث. أرسمُ شكلاً هندسيّاً باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار يوضّحُ ذلك.



(٣) اشترى سالمٌ طاولةً لحديقته المنزليّة، يريد تثبيت مظلة في منتصفها ساعدْهُ في تحديد نقطة منتصف الطاولة لتثبيت المِظلّة.

(٤) في الشكل المجاور (ﺃ ، ب يمثلان طولي قطعتين مستقيمتين)، استخدم الإنشاءات الهندسيّة في تمثيل:

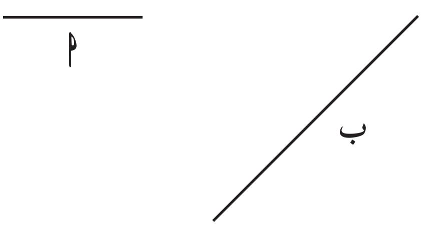
أ) ﺃ + ب

ب) ﺃ _ ب

جـ) ب _ ﺃ

د) ﺃب

هـ) $\frac{ب}{ﺃ}$



(٢ - ٢) إنشاءات هندسيّة (٢)
Geometric Constructions (2)

نشاط ١

تجتمعُ العائلةُ الفلسطينيّةُ عادةً في المساءِ؛ للتحاور ومتابعة البرامج الثقافيّة التلفزيونية.

أراد أبو سعيدٍ شراءَ شاشةِ تلفازٍ؛ لوضعها في صالة الجلوس. اقترح سعيدٌ شراءَ شاشةٍ، مقاسُها ٤٢ بوصة، لكنّ والده قال: إنّ المقاس ٣٢ بوصةً هو الأنسب.

شاركت الأم، واقترحت عليهم قياسَ المِساحة المتاحة لوضع الشاشة، ثمّ أخْذ القرار المناسب.

فإذا كانت أبعادُ الحائط المخصّص لوضع الشاشة هو ٥٢ ، ٤٠ بوصةً، وكان مقاس شاشة التلفاز هو طول قطرها (س) بالبوصة، ويُعطى بالعلاقة $س = \sqrt{٢م}$ حيث: م هي مِساحة الشاشة، فإنّ مقاس الشاشة الأنسب هو:

$س = \sqrt{٢ \times ٢٥ \times ٤٠}$

س= ....

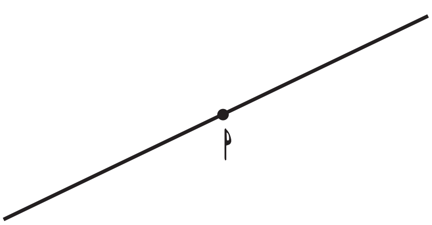
$س = ٢٠ \sqrt{٥}$

هل يمكن التعبير عن مقاس الشاشة بعددٍ صحيحٍ، أو عددٍ نسبيّ؟

يُسمّى العدد $\sqrt{٥}$ .... ، وينتمي إلى مجموعة الأعداد ....

نشاط ٢

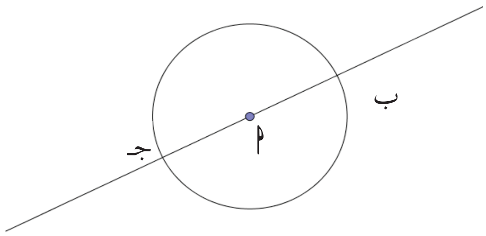
إقامة عمود على قطعةٍ مستقيمةٍ من نقطة واقعة عليها.



أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبة، وأرسم دائرةً مركزها أ ، تقطع القطعة المستقيمة في النقطتيْن: جـ ، ب.

أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبةً، وأثبّتهُ عند النقطة جـ، وأرسم قوساً.

بالفتحة نفسها أُثبّتُ الفرجار عند النقطة ب، وأرسمُ قوساً يقطع القوس الأوّل في النقطة هـ.
أكملُ الرسمَ لأحصلَ على العمود ﻫ ﻫـ.



أتحقّقُ هندسيّاً من صحّة الرّسم.

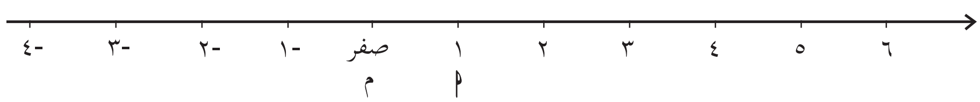
نشاط ٣

أرسمُ المثلّث ﻫ ب جـ القائم الزاوية في ب .
أمدُّ القطعة المستقيمة من جهة ب، أُكملُ خطواتِ إقامةِ عمودٍ على قطعةٍ مستقيمةٍ من نقطةٍ واقعةٍ عليها.

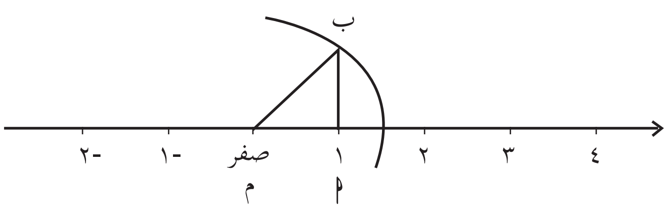
أتعلّم: تُستخدَمُ الإنشاءاتُ الهندسيّة لتمثيل الأعدادِ غيرِ النسبيّة التي على هيئة جذورٍ تربيعيّة، لأعدادٍ ليست مربعاتٍ كاملةً على خطّ الأعداد.

نشاط ٤

أمثّلُ $\sqrt{٢}$ على خطّ الأعداد:



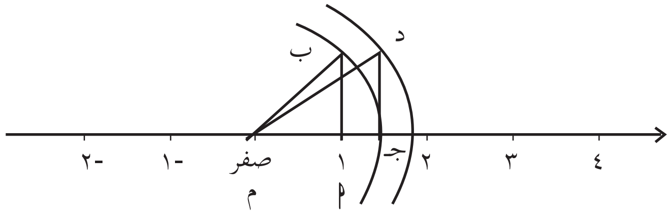
- أُنشىءُ عموداً طولُه وحدةً واحدة عند النّقطة ﻫ، وأُسمّيه ﻫ ب، فيكون م ب يساوي $\sqrt{٢}$. أرسمُ قوساً من دائرة مركزها م، ونصفُ قُطرِها م ب، ويقطعُ خطَّ الأعداد، أُعيّنُ عند $\sqrt{٢}$.



نشاط ٥

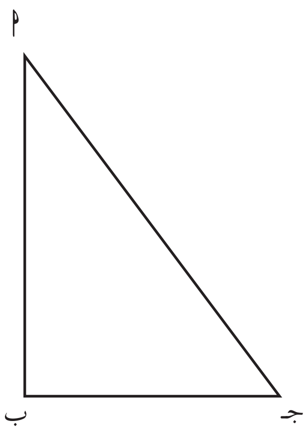
أمثّل $\sqrt{٣}$ على خطّ الأعداد.

- بالرجوع إلى النشاط السابق ،أُنشيءُ عموداً على خطّ الأعداد عند $\sqrt{٢}$ ، طولُهُ وحدة واحدة، وأُسمّيه $\overline{\text{جـ د}}$.
- م د = ...
- أُكملُ الرسم لتمثيل العدد $\sqrt{٣}$.



نشاط ٦

في المثلّث أ ب جـ المجاور، أ ب = $\frac{\text{س} - ١}{٢}$ ، أ جـ = $\frac{\text{س} + ١}{٢}$ ، أجدُ طولَ الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$.



باستخدام نظريّة فيثاغورس:

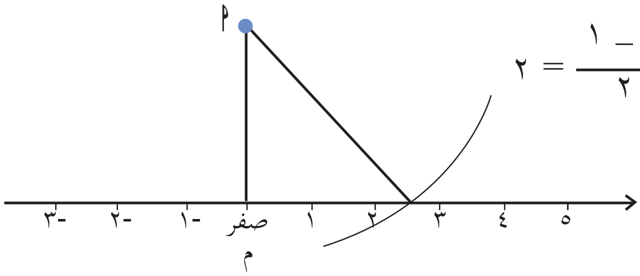
$(\text{ب جـ})^{٢} = (\text{أ جـ})^{٢} - (\text{أ ب})^{٢}$

$(\text{ب جـ})^{٢} = \left(\frac{\text{س} + ١}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{\text{س} - ١}{٢}\right)^{٢}$

وينتج أنّ: $(\text{ب جـ})^{٢}$ = ... = ...

أتعلّم: لتمثيل جذر العدد س، س $\geqslant$ ٠ على خطّ الأعداد، نقيم عموداً عند نقطة الصفر طولُهُ $\frac{\text{س} - ١}{٢}$، ونسمّيه $\overline{\text{أم}}$، ثمّ نرسمُ قوساً من دائرة مركزُها أ ، ونصف قطرها $\frac{\text{س} + ١}{٢}$، ويقطع خط الأعداد. نقطة تقاطعه مع خطّ الأعداد هي تمثيل العدد $\sqrt{\text{س}}$.

نشاط ٧



أُمثّل $\sqrt{٥}$ بالطريقة السابقة:

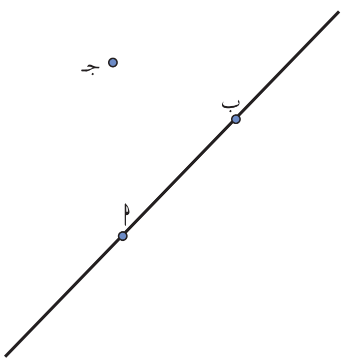
طولُ العمود على محور السينات = $\frac{٥ - ١}{٢}$ = ٢

أرسمُ قوساً من دائرة مركزها أ ،

ونصف قطرها ....

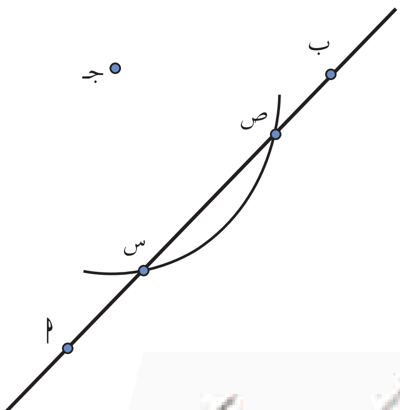
أُعيّنُ $\sqrt{٥}$ على خطّ الأعداد.

نشاط ٨

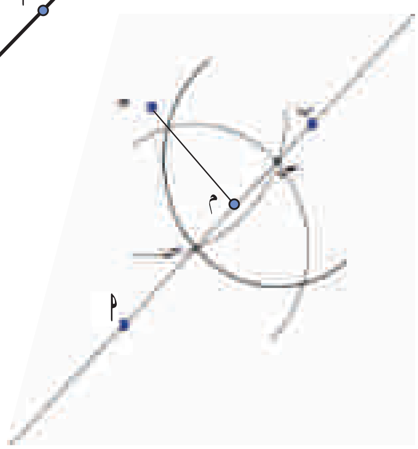


إنشاء عمودٍ على مستقيمٍ من نقطةٍ خارجةٍ عنه.

- أرسمُ المستقيمَ أ ب، والنقطة جـ الخارجة عنه.



- أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبة، وأُثبّتُه في النقطة جـ، وأرسمُ قوساً يقطعُ المستقيم في النقطتين س ، ص.



- أُنصّفُ القطعةَ المستقيمةَ $\overline{\text{س ص}}$ في النقطة م.

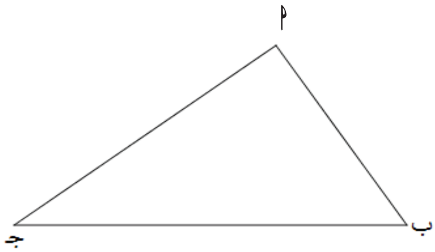
- أصلُ بين جـ ونقطة المنتصف م.

لتوضيح أنّ جـ م عموديٌّ على س ص هندسيّاً، أصلُ بين النقاط جـ، س، ص، الشكل الناتج هو مثلّث ....

جـ م عموديٌّ على س ص؛ لأنّ ....

نشاط ٩

في الشكل المقابل أنشئُ عموداً للمثلث أ ب جـ، من الرأس أ على القاعدة ب جـ.

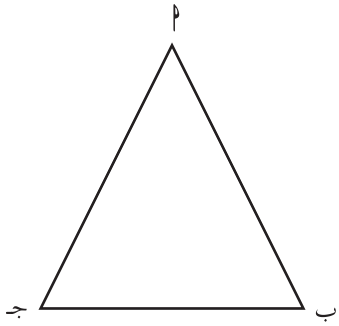


النقطة أ نقطةٌ خارجةٌ عن المستقيم ....

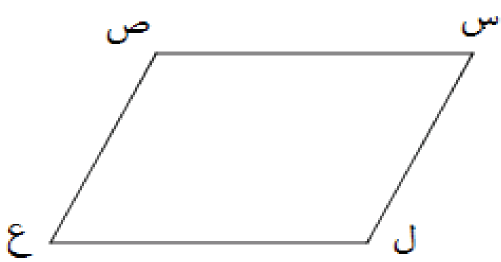
أُثبّتُ الفرجار في النقطة أ، وأرسم .... يقطع الضلع ب جـ في النقطتين ....

أُكملُ الرسم.

تمارين ومسائل:



(١) في المثلث متساوي الساقيْن، العمود المقام من منتصف القاعدة يمرُّ بالرأس، ويُنصّف زاويته. تحقّقْ من صحّة النظريّة؛ عن طريق الرسم بالحافة المستقيمة والفرجار.



(٢) أرسمُ ارتفاعاً لمتوازي الاضلاع من الرأس ص على القاعدة ع ل، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار.

(٣) أنشئُ الزّوايا الآتية: ٤٥° ، $٢٢\frac{١}{٢}^\circ$.

(٤) أُمثّلُ الأعداد الآتية على خطّ الأعداد:

$\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{١١}$ ، $١-\sqrt{٧}$

(٥) مصنعٌ للخزف يُنتج أطباقاً دائريّة الشكل، أراد سامي تقديم هديةٍ تذكاريّةٍ لصديقه؛ بحيث تكون ساعةً مثبتةً على طبقٍ خزفيّ. كيف يمكن مساعدتُه في تحديد موقعِ تثبيتِ عقاربِ السّاعة في الطبق باستخدام الإنشاءات الهندسية.

المثلّث
Triangle

(٢ - ٣)

نشاط ١

مثلث برمودا هو منطقةٌ جغرافيّةٌ على شكل مثلث، مِساحته مليون كم٢، وهو منطقةٌ اشتهرت؛ بسبب مقالاتٍ وأبحاثٍ نُشِرت حول كثرة الحوادث، واختفاءات السفن وحتى الطائرات. لكنّ الإحصاءات الحديثة لخفر السواحل الأمريكيّة لا تشير إلى حالات اختفاءات السفن والطائرات أكثر من مناطقَ أخرى.

يقع مثلث برمودا في المحيط: ....

ويصل بين جزر ....، ودولة ....، وولاية ....

إذا كانت المسافة بين ولاية فلوريدا ومجموعة جزر برمودا تقدر بـ ١٥٠٠كم، أقدّرُ المسافة بين دولة بورتوريكو وولاية فلوريدا ....

وكذلك المسافة بين مجموعة جزر برمودا ودولة بورتوريكو ....

ما نوع مثلث برمودا من حيث الاضلاع ؟.......................................

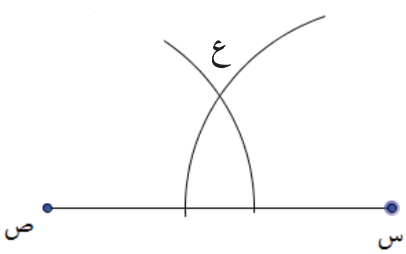
يمكن تصنيف المثلثات من حيث الأضلاع إلى ....، و............، و ....

نشاط ٢

رسم مثلث متساوي الساقيْن.

أرسم مثلثاً متساوي الساقيْن، قاعدته $\overline{\text{س ص}}$ ؛ باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار:

- أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبة.
- أُثبّتُ الفرجار عند النقطة س، وأرسم قوساً.



- بالفتحة نفسها أثبّتُ الفرجار عند النقطة ص، وأرسم قوساً آخر يقطع القوس الأوّل.
- نقطة تقاطُع القوسين ع هي الرأس الثالث للمثلّث، أعيّنها على الرسم، وأُكملُ الرسم باستخدام الحافة المستقيمة.
- ∠س = ∠ص

نشاط ٣

باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار، أُكمل الرسم لأحصلَ على مثلثٍ متساوي الساقين، قاعدته $\overline{\text{م ب}}$.

م ______________________ ب

أتذكر: العمود النازل من رأس المثلث متساوي الساقين على القاعدة يُسمّى محورَ التماثل للمثلث .

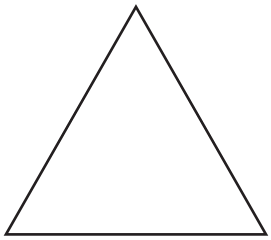
- أرسمُ محورَ التماثُل للمثلث.
- أفتحُ الفرجار فتحةً مختلفةً عن السابق، وأحاولُ رسمَ مثلثٍ متساوي الساقيْن مختلفاً.

كم مثلثاً متساوي الساقين يمكن رسمُه على القاعدة $\overline{\text{م ب}}$ ؟ أوضّح العلاقة بين رؤوس هذه المثلثات.

نشاط ٤

باستخدام الفرجار أحدّدُ نوع المثلث المرسوم ....

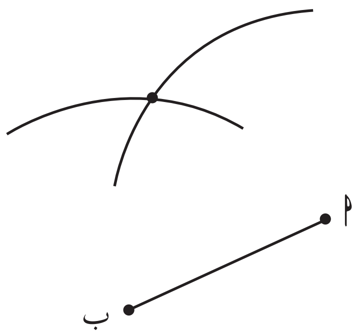
- في المثلث متساوي الأضلاع قياس كلِّ زاويةٍ فيه يساوي ....



- عدد محاور تماثله ....

نشاط ٥

رسم مثلث متساوي الأضلاع



لرسمِ مثلثٍ متساوي الأضلاع قاعدته $\overline{\text{أ ب}}$ باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار:

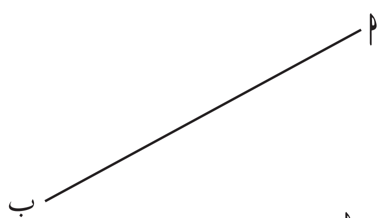
- أفتحُ الفرجار فتحةً مساويةً لطول القطعة $\overline{\text{أ ب}}$، وأثبّتُ الفرجار عند النقطة أ، وأرسم قوساً.

بالفتحة نفسها أُثبّت الفرجار عند النقطة ب، وأرسم قوساً آخر، يقطع القوس السابق.

- يكون الرأس الثالث للمثلث هو ....
- أُكمل الرسم.

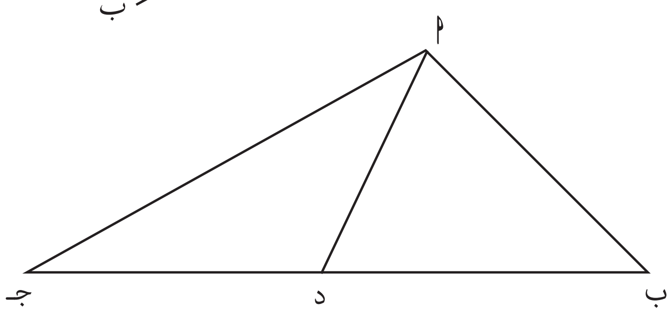
أفكر

كم مثلثاً متساوي الأضلاع يمكن رسمُه على القطعة $\overline{\text{أ ب}}$ ؟



نشاط ٦

القطعة المتوسطة في المثلث



أرسم المثلث أ ب جـ.

أنصف الضِّلْع ب جـ بالنُّقطة د ،

وأصل بين أ ، د ، فيكون ب د = ____

مِساحة المُثَلَّث = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × ________

مِساحة المُثَلَّث أ ب د = ______×______×______

مِساحة المُثَلَّث أ جـ د = ______×______×______

ما العلاقة بين مِساحة المُثَلَّثين؟

أتعلم: القطعة المتوسّطة في المُثَلَّث هي القطعة المستقيمة الواصلة بين أحد رؤوس المُثَلَّث ومنتصف الضِّلْع المقابل له.

نشاط تعاونيّ: يوزّع المعلّم مجموعة من المُثَلَّثات المختلفة على مجموعات:

- نرسمُ القطع المتوسّطة في المُثَلَّثات.
- نلاحظُ أنّ القطع المتوسّطة في المُثَلَّث تتقاطع في ــــــــــــــ.
- نقيسُ المسافة من رأس المُثَلَّث إلى نقطة تقاطع القطع المتوسّطة.
- نقيسُ المسافة بين نقطة تقاطع القطع إلى منتصف الضِّلْع.

ماذا نلاحظ؟

أتعلم: تتقاطع القطع المتوسّطة للمُثَلَّث في نقطة واحدة.

نقطة تقاطع القطع المتوسّطة، تُقَسِّمُ كلُّ قطعة منها بنسبة ٢ : ١ من جهة أي رأس.

نشاط ٧

في المُثَلَّث المجاور:

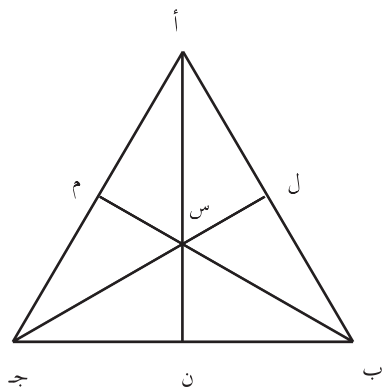
المُثَلَّث أ ب جـ ، فيه: ل منتصف أ ب، ن منتصف ب جـ، م منتصف أ جـ ،

س جـ = ٨ سم، س م = ٣ سم.

جـ س : ل س = ٢ : ١

ل س = ٤ سم .

ب س = ــــــــــ سم.



تمارين ومسائل:

(١) أُنشئُ الزّاوية ٦٠ ْ.

(٢) أُقسّم الزاوية المستقيمة إلى ثلاثة أقسامٍ متساوية.

(٣) أنشئُ معيّناً، أحدُ أقطاره القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$.

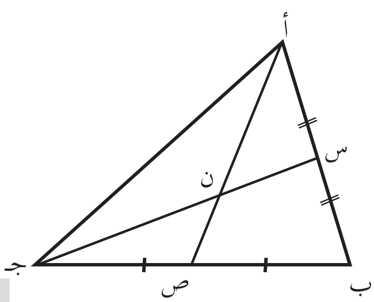
(٤) يعمل تامر في تصميم طائرات الأطفال، ساعدْه في إكمال الطائرة الورقيّة، التي أحد أقطارها القطعة المستقيمة المجاورة $\overline{\text{أ ب}}$.
هل يمكنه إنشاءُ طائراتٍ مختلفة على القُطر السابق نفسه؟ ساعدْه في ذلك.

(٥) يريد أبو محمّدٍ سقف ساحةٍ مستطيلةِ الشكل"بالقرميد"، أبعادها: ٦م ، ٤م ، كمرآبٍ لسيّارته، كما هو موضّحٌ في الشكل. ساعدْه في وضع التصميم المناسب في الشكل أدناه، موضِّحاً شكل المثلثات وأبعادها. فسّر إجابتك.

(٦) $\overline{\text{أ ص}}$ ، $\overline{\text{جـ س}}$ قطع متوسّطة في المُثَلّث أ ب جـ، وطول $\overline{\text{ن ص}}$ = ٦ سم، أَجِدُ:

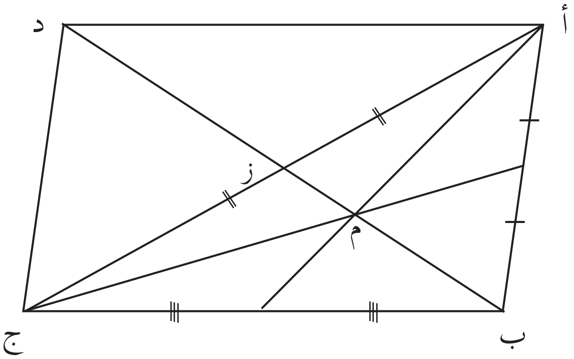
أ) طول $\overline{\text{أ ن}}$.

ب) طول $\overline{\text{أ ص}}$.



(٧) أب جـ د متوازي أضلاع، إذا كانت ز نقطة تقاطع القطرين، ب د = ٢٤ سم، م نقطة تلاقي القطع المتوسّطة للمُثَلَّث أ ب جـ ،

أَجِدُ م ز .



(٨) **المثلّثُ الذهبيّ:** هو مثلّثٌ متساوي الساقين، فيه نسبةُ طولِ أحدِ الساقيْن إلى طول القاعدة يساوي النسبة الذهبية، وتساوي $\phi = \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار أرسمُ رسماً تقريبيّاً لمثلثٍ ذهبيّ.

(٢ - ٤) رسم مضلّعاتٍ منتظَمة
Equileteral Polygons Construction

نشاط ١

طبيعة فلسطين الخلّابة والمتنوعة يسمح لها بوجود ثرواتٍ طبيعيّةٍ كالعسل. وهذه الطبيعة تسمح بإنتاج النحل للعسل ثمانيةَ أشهرٍ في السنة، مقابلَ شهريْن في دولٍ أخرى؛ حيث يبلغ عدد خلايا النحل في فلسطين ٤٥ ألف خليّة، ومعدل إنتاجها ٤٥٠ طناً من العسل الصافي سنويّاً؛ ما يشكّل ثروةً وطنيّةً عظيمة. ولقرص العسل شكلٌ هندسيٌّ رائع؛ ما دعا بعض علماء الرياضيّات إلى تسميته "رائعةً معماريّةً".

الأشكال الهندسيّة التي تُكوّنُ خليّةَ النحل هي: ....

مجموع قياسات زوايا الشّكل ....، وقياس الزّاوية الداخليّة له ....

أتعلّم: السداسي المنتظَم هو المضلّع المنتظَم ذو أكبرِ عددٍ من الأضلاع، الذي يصلح لتغطية مِساحةٍ بالكامل. إضافة إلى أنّه المضلع الذي يعطي أكبرَ مِساحةٍ بأقصرِ محيط؛ ما يتيحُ للنّحلة بأنْ تُخزّنَ أكبرَ كميّةٍ من العسل بأقلّ كميّةٍ ممكنةٍ من المادة الشمعيّة.

نشاط ٢

أسمّي المضلّعات الآتية:

تُسمّى المضلّعاتُ في النشاط مضلّعاتٍ منتظَمةً؛ لأنّ ....

مجموع قياسات زوايا الخماسي المنتظَم هو ....، وقياس الزّاوية الداخليّة له ....

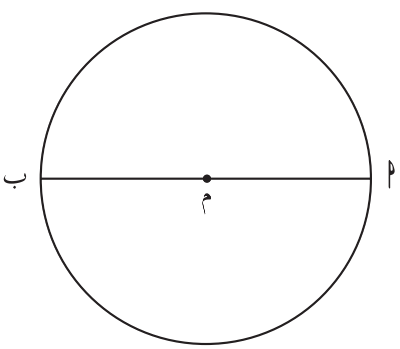
مجموع قياسات زوايا السباعي المنتظَم هو ....، وقياس الزّاوية الداخليّة له ....

نشاط ٣

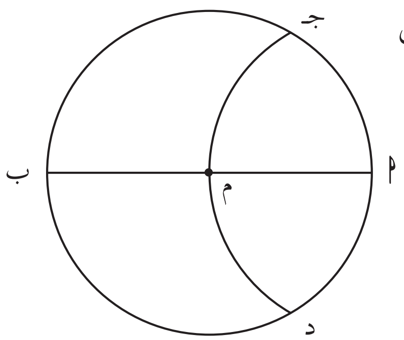
أرسم شكلاً سداسياً منتظماً أحد أضلاعه أ م باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار.

١. أرسم دائرة مركزها النقطة م ونصف قطرها أ م

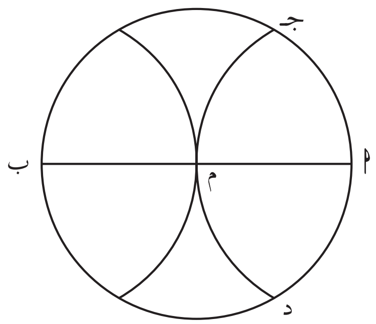
٢. أكمل رسم القطر أ ب



٣. بنفس الفتحة أرسم قوساً من دائرة مركزها النقطة أ ويقطع الدائرة في النقطتين جـ ، د.

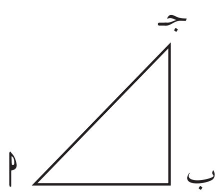


٤. أرسم قوساً آخر مركزه النقطة ب وأحدد نقاط تقاطعه مع الدائرة.



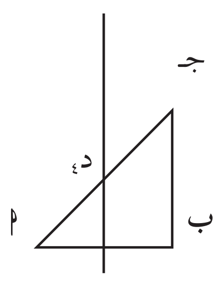
٥. أصل بين نقاط تقاطع القوسين مع الدائرة أو نهايتا قطر الدائرة.

مثال ١:   رسم مضلع منتظم إذا عُلِم أحد أضلاعه

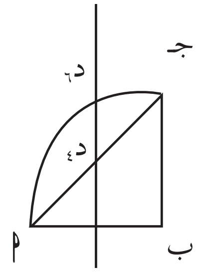


أرسم مضلعاً خماسيّاً منتظَماً، أحدُ أضلاعِه أ ب، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار.

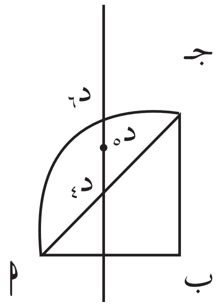
١. أرسم مثلثاً قائم الزاوية في ب ومتساوي الساقين.



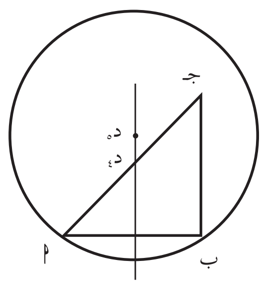
٢. أُنصّفُ الضلع أ ب ، وأقيم عليه عموداً يقطع الضلع أ جـ في النقطة د٤.



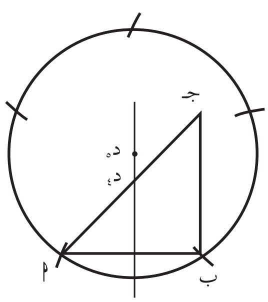
٣. أرسمُ قوساً من دائرة مركزها ب، ونصف قطرها يساوي أ ب ويقطع العمودي في النقطة د$_{٦}$.



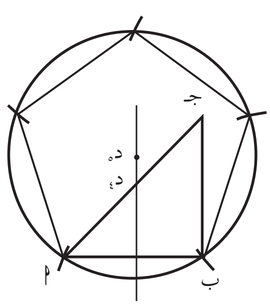
٤. أُنصّفُ القطعة، $\overline{د_{٤}\,د_{٦}}$ في النقطة د$_{٥}$.



٥. أرسم دائرة مركزها النقطة د$_{٥}$، ونصف قطرها أ د$_{٥}$.



٦. أفتحُ الفرجار فتحةً تساوي أب، ومن النقطة أ أبدأ بتقسيم الدائرة بأقواس على التوالي تتقاطع مع الدائرة بنقاط تكون هي رؤوس الشكل الخماسي.



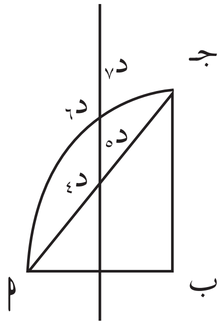
٧. أصلُ بين الرؤوس، وأحصل على الشكل الخماسي المنتظَم.

نشاط ٤

أرسمُ شكلاً سباعيّاً منتظَماً، أحد أضلاعه $\overline{\text{ﻡ ب}}$:

لرسم الشكل السباعي أتّبعُ خطواتِ المثال السابق ١-٣.

• لتحديد مركز دائرة السباعي أفتح الفرجار فتحة تساوي د٥ د٦ وأركز في النقطة د٦ وأرسم قوساً يقطع العمودي في النقطة د٧



• أرسمُ دائرةً مركزها د٧ ، ونصف قطرها ﻡ د٧ .

أُكملُ الرسم لتحديد رؤوس الشكل السباعي.

وبشكل عام: لرسم رباعيّاً منتظماً أرسم دائرة مركزها د٤ ونصف قطرها ﻡ د٤ ، ولرسم سداسيّاً منتظماً أرسم دائرة مركزها د٦ ونصف قطرها ﻡ د٦ ، وهكذا.

تمارين ومسائل:

(١) أجدُ مجموع قياسات زوايا الأشكال الآتية، وقياس الزاوية الداخليّة لها:

أ) الثماني المنتظَم. ب) السباعي المنتظَم.

(٢) أرسمُ باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار مربّعاً بطريقتيْن مختلفتيْن.

(٣) أرسم باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار سداسيّاً منتظماً. (بطريقة رسم المضلعات المنتظمة)

(٤) النجمة الخماسيّة: هي شكلٌ هندسيٌّ يتكوّنُ من خماسيّ منتظم ، مرسوم على كلِّ ضلع من أضلاعه مثلثٌ ذهبيٌّ. أرسمُ نجمةً خماسيّةً باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار، وأجدُ زاويةَ رأسِها.

(٥) أرضية غرفةٌ على هيئة مستطيلٍ، أبعادها: ٦م ، ٨م ، يُراد تبليطُها بأشكالٍ سداسيّةٍ منتظَمة، أُنشئُ سداسيّاً منتظماً بطول ضلعٍ مناسبٍ، وأملأُ به المِساحة.

روابط إلكترونية:

www.youtube.com/watch?v=p-YehXivY5c

www.youtube.com/watch?v=TAHczLeIUTc

(٢ - ٥) تمارين عامّة

السؤال الأول:

أُمثّلُ على خطّ الأعداد:

$\sqrt{٢} + ١$ ، $١ - \sqrt{٥}$ ، $١ - \sqrt{٣}$ ، $٢ \sqrt{٧}$

السؤال الثاني:

أرسم زوايا قياسها ٣٠° ، ١٥°.

السؤال الثالث:

أرسم المثلث ﺃ ب جـ، القائم الزاوية في ب، ثم أُنشئُ القطعة المستقيمة $\overline{\text{ب د}}$ حيث: د هي منتصف الوتر. تحقّق أنّ طول $\overline{\text{ب د}}$ = نصف طول الوتر $\overline{\text{ﺃ جـ}}$.

السؤال الرابع:

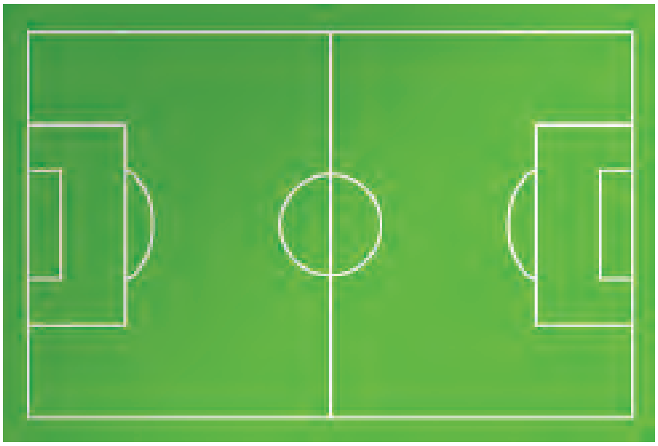
بقرتان ترعيان في حقلٍ مستطيل الشكل، أبعاده: ٢٠ م ، ١٢ م. إذا رُبِطَت البقرتان في زاويتين متقابلتين في الحقل بحبل طوله ١٣ م ، أرسم باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار شكلاً تخطيطيّاً للحقل،موضّحاً المساحة التي ترعى فيهما كلتا البقرتين.

أُقيّمُ ذاتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	دون المتوسط
تصنيف قطعة مستقيمة واقيم عمود عليها			
تحديد منصفات الاضلاع لمثلث ما			

فكرةٌ رياديّة:

- أرسم مخطّطاً تفصيليّاً لملعب كرة القدم، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار.
- اقترح أبعاداً مناسبة للملعب للاستفادة من قطعة أرض أبعادها ١٥٠م ، ١٠٠م لتصميم ذلك الملعب.



الوحدة الثالثة ٣

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

سهل مرج ابن عامر

تُعَدُّ أيّامُ الحصادِ من أجملِ الأيّامِ الصيفيّة التي يطولُ فيها شروق الشّمسِ.
استخدم خصائصَ الاقتراناتِ المثلثية في تحديد عدد ساعات شروق الشّمس طوالَ أيّامِ السّنة. حاولْ معرفةَ عددِ ساعاتِ شروقِ الشّمسِ في يومُ ١٠/حزيران.

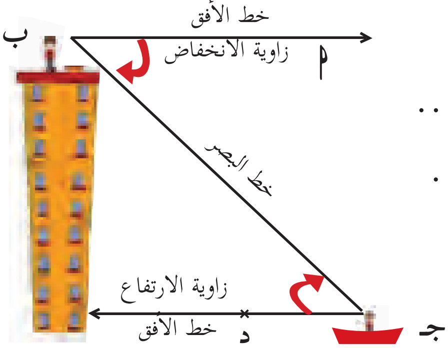
يتوقع من الطلبة بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاقترانات المثلثية في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- التعرُّف إلى مفهوم الزوايا الموجّهة.
- التعرُّف إلى مفهوم قياسي الزاوية: الستيني والدائري.
- التحويل من القياس الستيني إلى القياس الدائري وبالعكس.
- التعرُّف إلى الوضع القياسي للزاوية، والزوايا المتكافئة.
- تمثيل منحنيات الاقترانات الدورية (المثلثية) بيانيّاً.
- حلّ معادلاتٍ مثلثيّة.

(٣ - ١) الزّاوية في الوضع القياسي
The Angle in Standard Position

نشاط ١

يراقب شخص من منارة على شاطئ غزة، صيّاداً في قاربه في البحر. يصنع خطُّ البصرِ بينهما مع خطّي الأفق لكلٍّ منهما زاويتين: إحداها تُسمّى زاويةَ الارتفاع، و الأخرى تُسمّى زاويةَ الانخفاض.



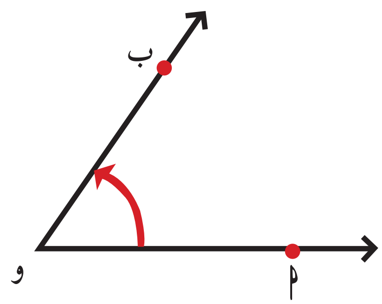
زاوية الانخفاض في الصورة هي: ....، وضلعاها هما: ......، ......

زاوية الارتفاع في الصورة هي: ....، وضلعاها هما: ......، ......

ألاحظ العلاقة بين قياس زاوية الارتفاع، وقياس زاوية الانخفاض.

نشاط ٢

في الشكل المجاور

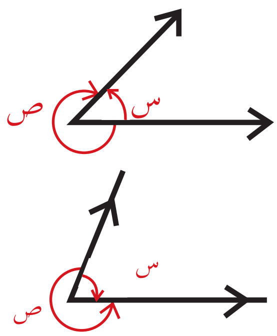


- ضلع الابتداء للزاوية ٯ و ب هو: ......
- ضلع الانتهاء لها هو: .... ، لماذا ؟ ....
- اتّجاه حركة ضلع الابتداء لينطبق على ضلع الانتهاء هو: ......
- تُسمّى زاوية ٯ و ب زاويةً موجّهة.

أتعلّم: الزاوية الموجّهة: هي زاويةٌ يتحدّد اتّجاهُها باتّجاه دوران ضلع الابتداء لينطبقَ على ضلع الانتهاء، وتكون الزاويةُ الموجّهة زاويةً موجبةً إذا كان اتّجاه الدوران عكس عقارب الساعة، وتكون الزاويةُ الموجّهة سالبةً إذا كان اتّجاه الدوران مع عقارب الساعة.

نشاط ٣

في الشكل المجاور:

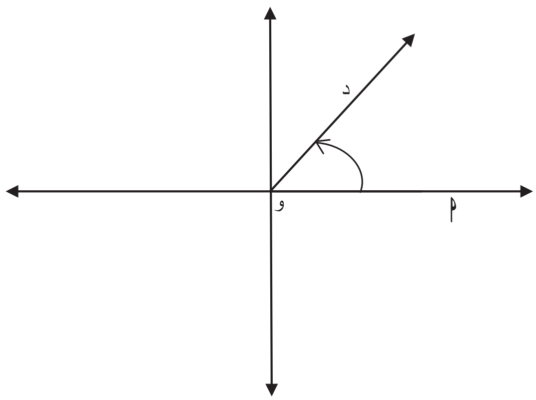


∡س = ٦٠°،

∡ص = ...

∡ص = ٢٨٠°، ∡س = ...

نشاط ٤

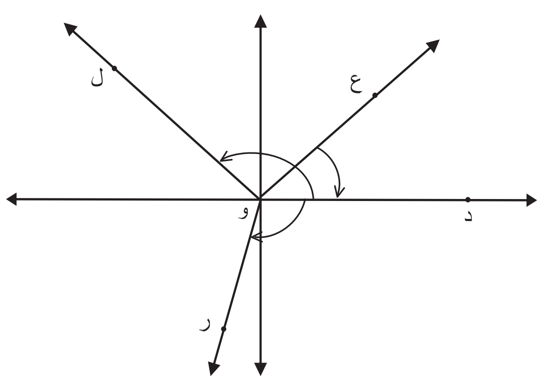


أُسمّي الزاوية الموجّهة في الشّكل ....

ضلع الابتداء لها هو $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ، ضلع الانتهاء لها هو: ....، رأس الزاوية هو: ....

أتعلّم: تكون الزاويةُ في الوضع القياسي إذا كان رأسُها نقطةَ الأصل، وانطبق ضلعُ الابتداء على محور السّينات الموجب.

نشاط ٥



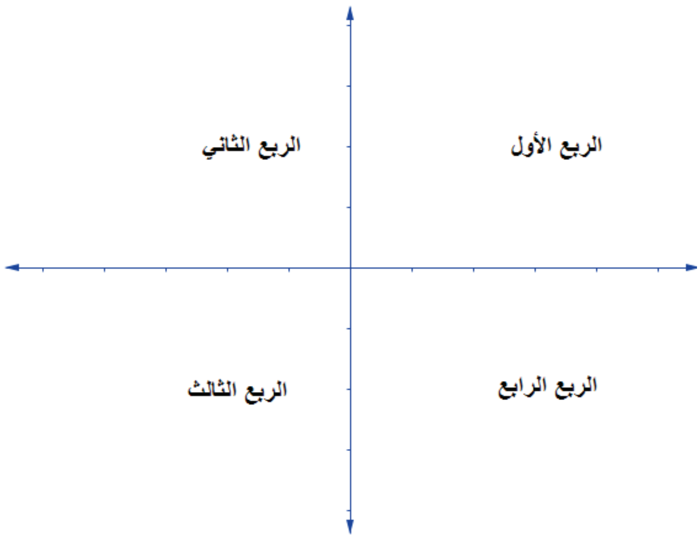
في الشكل المجاور: الزاوية الموجهة ع و د ليست في وضعٍ قياسيّ؛ لأنّ ....

- الزاوية الموجّهة .... في الوضع القياسي؛ لأنّ ....
- الزاوية الموجّهة د و ر في ....، لأنّ ....

نشاط ٦

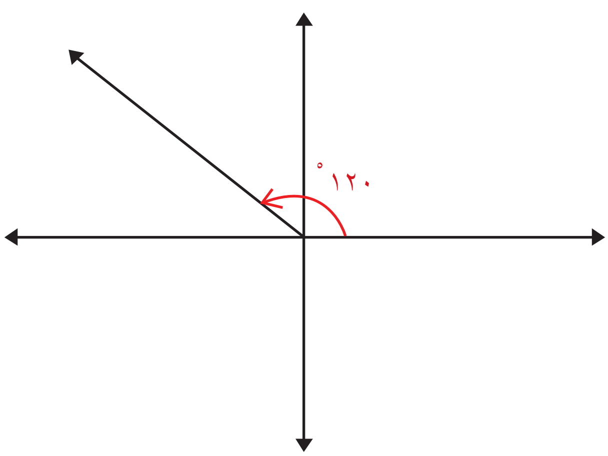
محورا الإحداثيّات يقسمان المستوى إلى .... أرباع

تُرتَّبُ الأرباع باتّجاه ....



أستنتج أنّ:

- إذا كانت ∠هـ زاويةً في الوضع القياسيّ، وكان ٠° < ∠هـ < ٩٠°، فإنّ ضلع انتهائها يقع في الرّبع الأوّل.
- إذا كانت ∠هـ في الوضع القياسيّ، وكان ..... < ∠هـ < .....، فإنّ ضلعَ انتهائها يقع في الرّبع الثاني.



نشاط ٧

أرسمُ الزّوايا التي قياسها ١٢٠ °، ٢٢٥ °، -٣٠٠ °، -٦٠ ° في الوضع القياسي، ثم أحدّدُ الربع الذي تقع فيه:

تقع الزّاوية التي قياسها ١٢٠° في الربع ....

بينما تقع الزّاوية التي قياسها ٢٢٥° في الربع ....

تقع الزّاوية التي قياسها - ٣٠٠° في الربع ....

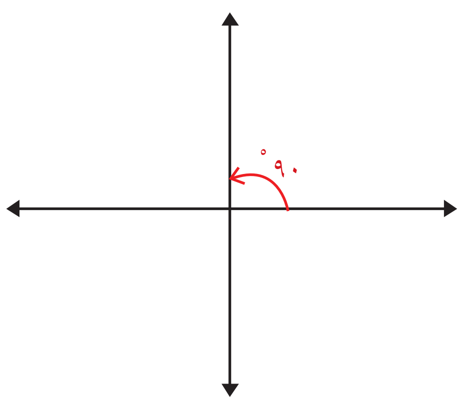
تقع الزّاوية -٦٠° في الربع ....

أتعلّم: عند رسم زاويةٍ في الوضع القياسي فإنّ ضلعَ انتهائها يحدّدُ موقعَها في المستوى الديكارتي.

نشاط ٨

أرسمُ الزّوايا التي قياسها:

٩٠°، ١٨٠°، -٩٠°.



ينطبق ضلعُ انتهاءِ الزّاوية التي قياسها ٩٠ ° على محور ....

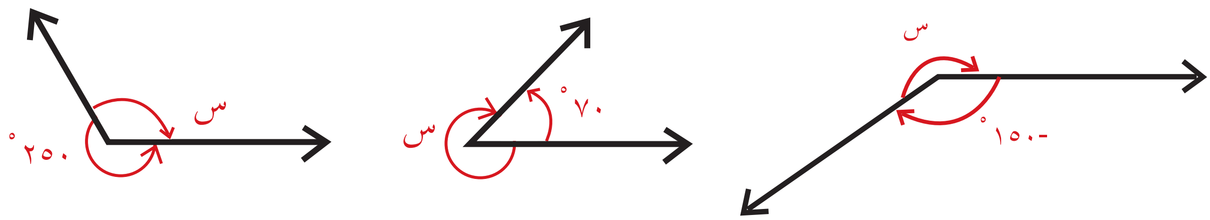
بينما ينطبق ضلعُ انتهاء الزّاوية التي قياسها ١٨٠ ° على ....، أما ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها -٩٠° فينطبق على ....

تُسمّى الزّاوية التي في الوضع القياسي، وينطبق ضلعُ انتهائها على أحد المحاور الإحداثيّة زاويةً رُبعيّةً.

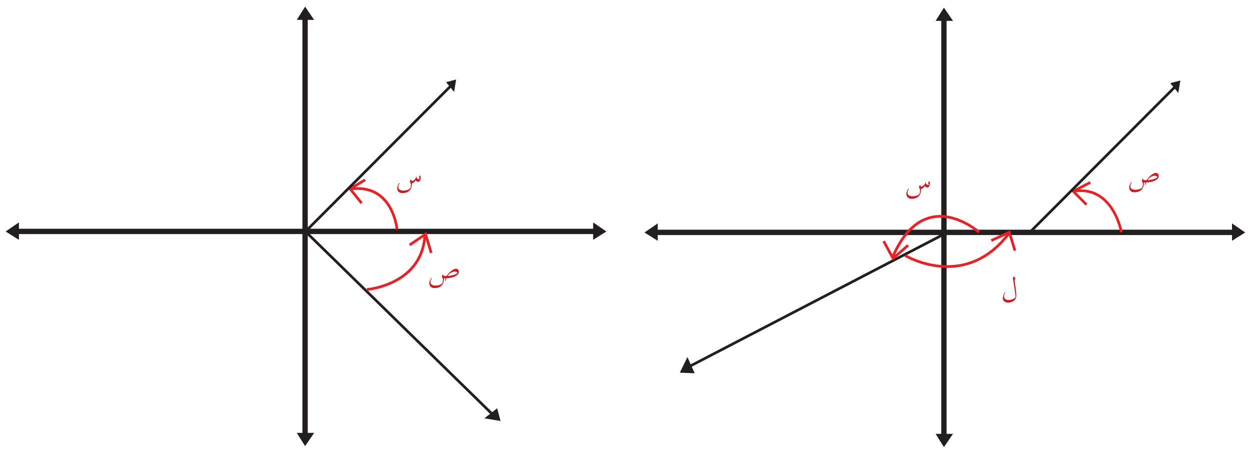
أعطِ ثلاثة أمثلة لزوايا ربعيّة: ....، ....، ....

تمارين ومسائل:

(١) ما قيمةُ س التي تُمثّل قياس الزاوية في كلٍّ من الأشكال الآتية:



(٢) أميّزُ الزّوايا التي في الوضع القياسي:



(٣) أُحدّدُ الرّبع من المستوى الذي تقع فيه الزّوايا الآتية:

-١٢٠° ، ١٣٠° ، -٢٥٠° ، ٣٢٠° ، ٤٥٠°

(٣ - ٢) قياس الزوايا
Angles and their Measurements

نشاط ١

تعيش المدن الفلسطينيّة أزمةً مروريّةً خانقة؛ مما يعرقلُ عمل طواقمِ الدّفاعِ المدني والإسعاف، ويؤخّرُ المواطنين عن أعمالهم يوميّاً؛ لذلك ارتأت البلديّات إنشاءَ الدواوير عند مفترقات الطّرق، ومداخل المدن.

عند حركة جسمٍ في مسارٍ دائريٍّ، فإنّ الزّاويةَ المركزيّةَ تتغيّر مع الزمن حسب العلاقة:

$$\text{السرعة الزاوية } (\omega) = \frac{\text{السرعة الخطيّة للجسم (ع)}}{\text{نصف قطر المسار الدائري (نق)}}$$

إذا سارت سيّارةٌ حول دوّارٍ، نصفُ قطرِه ٠,٠٠٥ كم، وأشار عدّاد السيّارة إلى سرعةٍ خطيّة ٣٠ كم/ساعة. أجدُ معدل تغيّر الزاوية المركزية بالدقيقة (السرعة الزاوية للسيارة).

$\omega = \frac{\text{ع}}{\text{نق}}$ ، ع ، نق: أعداد تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة.

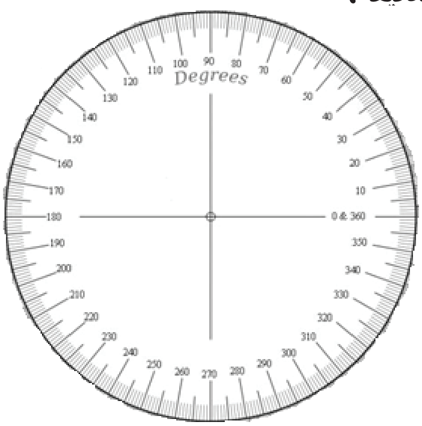
ω ينتمي إلى ....؛ لأنّ ناتج قسمة عددين حقيقيّين هو عددٌ حقيقي، ويُسمّى التغير في القياسَ الدائريّ للزاوية، ووحدته راديان/دقيقة.

٣٠ كم / ساعة = ... كم/دقيقة.

$\omega = \frac{٠,٥}{٠,٠٠٥}$ = ... راديان/دقيقة.

نشاط ٢

في الشّكل المجاور، تمّ تقسيمُ الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساوياً في الطّول، فإنّ الزاوية المركزيّة التي تقابل كلُّ قوسٍ، قياسها ١°. والزاوية التي تقابل ٥٠ قوساً يكون قياسها .... °.
والدرجة الواحدة تقسم إلى ٦٠ جزءاً أصغر منها، وهو الدقيقة،
وتُكتَبُ على الصورة: ١° = (...) ´



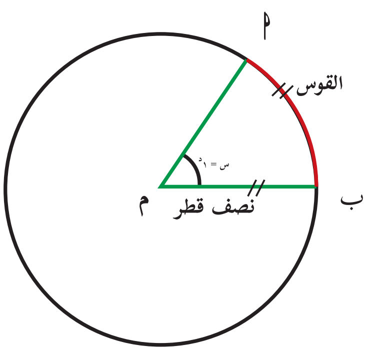
والدقيقة الواحدة تُقسم إلى ٦٠ جزءاً أصغر منها، وهو الثانية،
وتُكتَبُ على الصورة: ١´ = ٦٠´´
الزّاوية ٣٢,٦° = ٣٢° و ٠,٦ × ٦٠´ = (...) ´
= ٣٦´ ٣٢°

يُسمّى قياسُ الزّاوية بالدرجات والدقائق والثواني القياسَ الستيني للزّاوية.

أفكر

لماذا سُمِّي القياسُ الستيني بهذا الاسم؟

نشاط ٣



في الشكل المجاور، دائرةٌ مركزها م ونصفُ قطرِها وحدة واحدة.
طول القوس أ ب = طول نصف قطر الدائرة
طول القوس الذي يقابل الزاوية المركزية التي قياسها (س) في الشكل = ...

أتعلم: يكون قياس الزاوية س بالقياس الدائري = ١ راديان (Radian) ونرمز له بالرمز ١د

تعريف: الزّاوية النصف قطريّة: هي زاويةٌ مركزيّةٌ في دائرةٍ يقابلها قوسٌ طولُه يساوي طولَ نصفِ قطرِ الدائرة، ويُرمَزُ لها بالرمز (١د)، وهي وحدة قياس الزاوية بالقياس الدائري للزّوايا.

أفكر

ما هو القياس الدائري إذا كانت الزّاويةُ مرسومةً في دائرةٍ نصف قطرها نق ≠ ١ ؟

نشاط ٤

محيط الدائرة =٢ نق π ← محيط دائرة الوحدة = ...

الدورة الكاملة = ٣٦٠° يقابلها ٢ πد

← πد يقابلها .... درجة

باستخدام التقريب (π = ٣,١٤) نستنتج أنّ: ١د = ٥٧,٣ °

أُكمل: ٣د = ...° ، ١,٥د = ...°

نشاط ٥

أوّلاً: أُحوّلُ قياس الزّوايا الآتية من درجات إلى زاوية نصف قطرية (راديان):

٩٠°، ١٢٠°، -٢٢٥ °

- ٩٠° :

للتحويل من درجات إلى دائري: πد يقابلها ١٨٠°

٩٠ درجة ← هـ بالتقدير الدائري

هـ = $\frac{٩٠°}{١٨٠°}$ × πد = $\frac{١}{٢}$ πد

- ١٢٠° = $\frac{١٢٠°}{١٨٠°}$ × πد = ...

- -٢٢٥° = ...

ثانياً: أُحوّل قياس الزّوايا من دائري إلى درجات:

$\frac{٥}{٦}$ πد، $\frac{٣}{٤}$ πد، -$\frac{١٥}{١٨}$ πد

للتحويل من دائري إلى درجات: πد يقابلها ١٨٠°

$\frac{٥}{٦}$ πد ← س بالدرجات.

س = $\frac{٥}{٦}$ πد × $\frac{١٨٠°}{\pi د}$ = ١٥٠ °

زاوية قياسها = $\frac{٣}{٤}\pi^{د}$ = $\frac{٣}{٤}\pi^{د} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi^{د}}$ = ... °

زاوية قياسها = - $\frac{١٥}{١٨}\pi^{د}$ = ... °

زاوية قياسها ٢ د: باستخدام (π=٣٫١٤) ، ٢ د= .... °

أُكملُ الجدول َالآتي:

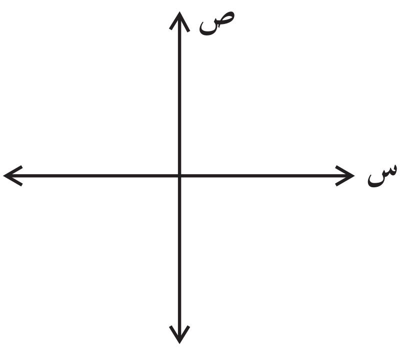
س°	٣٠	٤٥	٩٠	١٣٥	١٥٠	١٨٠	٢٤٠		٣٠٠	٣١٥		-١٢٠
هـ د		$\frac{\pi}{٤}$				π		$\frac{٣\pi}{٢}$			$-\pi$	

نشاط ٦

- أرسمُ الزاويا الآتية في الوضع القياسيّ:

١٢٠° ، -٢٤٠° ، ٥٠° ، ٤١٠°

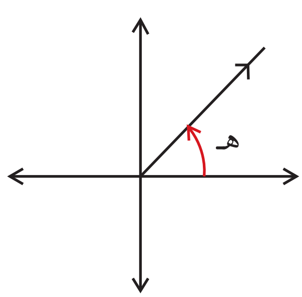
ماذا ألاحظ.....؟

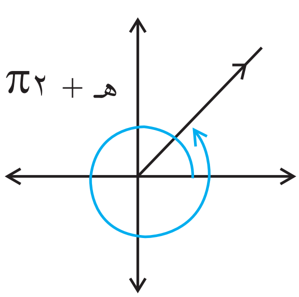


أتعلم: يُقال لزاويتيْن أنّهما متكافئتان: إذا كان لهما ضلع الابتداء نفسه، وضلع الانتهاء نفسه.

في الشكل المجاور:

$\angle$هـ تكافئ $\angle$هـ + ٢π





وبشكلٍ عام:

$\measuredangle$ هـ تكافئ $\measuredangle$ هـ + ٢ ن π ، $\measuredangle$ هـ بالقياس الدائري.

$\measuredangle$ هـ تكافئ $\measuredangle$ هـ + ٣٦٠ ن ، $\measuredangle$ هـ بالقياس الستيني ، حيث ن عدد صحيح.

نشاط ٧

أجدُ ثلاث زوايا مكافئة لكلٍّ من الزوايا التي قياسها: ٦٠°، $\frac{\pi}{٤}$ د.

الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° = ٤٢٠°، ن = ١

الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° × ٢ = ...، ن = ٢

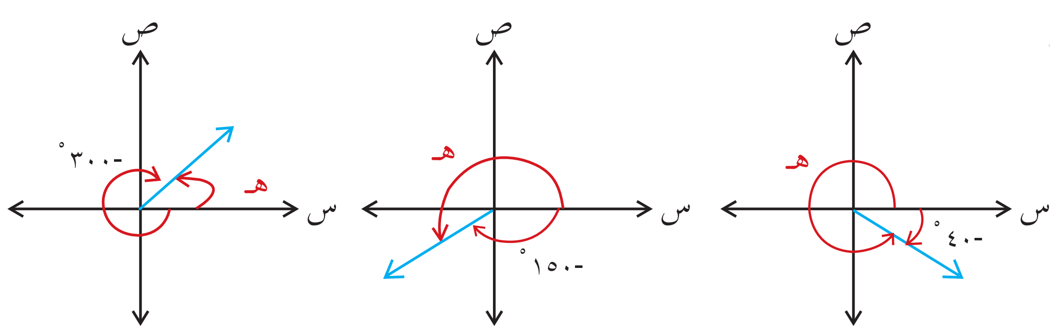
الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° × -١ = ...، ن = ...

الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٤}$ د تكافئ .... عندما ن = ١

الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٤}$ د تكافئ $\frac{-٧\pi}{٤}$ د عندما ن =..............

نشاط ٨

أجدُ قياسَ الزّاوية هـ في كلٍّ من الأشكال الآتية:



$\measuredangle$ هـ = ... $\measuredangle$ هـ = ... $\measuredangle$ هـ = ...

تمارين ومسائل:

(١) أ) أحوّل القياسات الآتية من الدرجات إلى راديان:

٢٤٠° ، -٩٠° ، ٤٢٠° ، -١٣٥°

ب) أحوّل القياسات الآتية من راديان إلى درجات:

$\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{-١١\pi}{١٢}$ ، $\frac{-\pi}{٤}$ ، $٢,٥^{د}$

(٢) أوجد ثلاث زوايا تكافئ الزاوية التي قياسها ٥٠°.

(٣) أوجد ثلاث زوايا تكافئ الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٤}^{د}$

(٤) أعطِ زاويتيْن: قياس إحداهما موجب، والآخر سالب، مكافئتين لكلٍّ من الزّوايا التي قياسها:

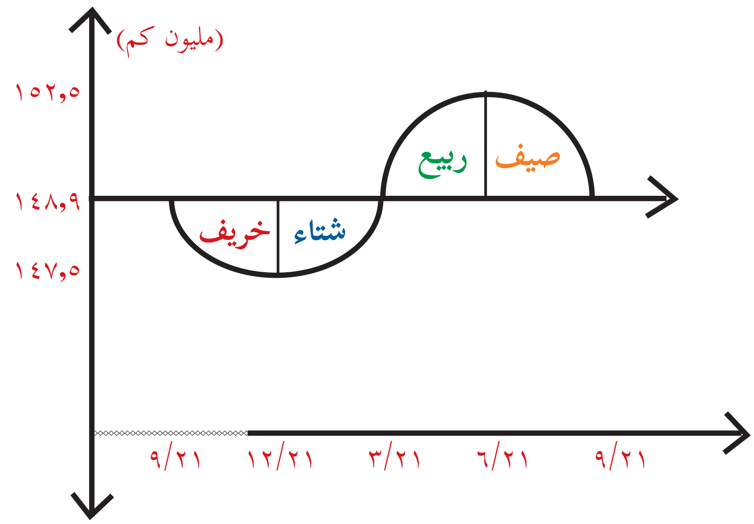
-٢٠٠° ، ١٢٠° ، $\frac{٢\pi}{٣}^{د}$ ، $-\frac{\pi}{٤}^{د}$

(٥) درّاجة هوائيّة قُطر عجلتها ٩٠سم، تسير بسرعةٍ خطيّةٍ مقدارها ٢٥كم/ساعة، ما معدّل تغيّر الزّاوية المركزيّة لعجلة الدراجة في الثانية ؟

الاقترانات المثلثية (٣ - ٣)
Trigonometric Functions

نشاط ١

إنّ حركة الأرض حول الشمس تتّخذ اقتراناً دوريّاً، وعليه يَسهُلُ علينا دراسةُ الظواهر الطبيعيّة التي تحدث في فصول السنة كافّةً، التي تنتج عن هذه الحركة.

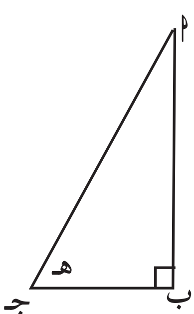


- أبعد ما تكون الأرض عن الشمس يوم .... ويقدر بعدها ١٥٢ مليون كم
- أقرب ما تكون الأرض إلى الشمس يوم ...... ويقدر بعدها ....
- يوم الانقلاب الشتوي هو ....
- يوم الاعتدال الخريفي هو ....
- يبدأ الربيع يوم .... وينتهي يوم ....

نشاط ٢

في المثلث القائم الزاوية ٲ ب جـ ، النسب المثلثية للزاوية الحادة التي قياسها هـ

جاهـ = $\frac{\text{ٲب}}{\text{ٲجـ}}$ ، جتاهـ = ...، ظاهـ = ...



أفكر

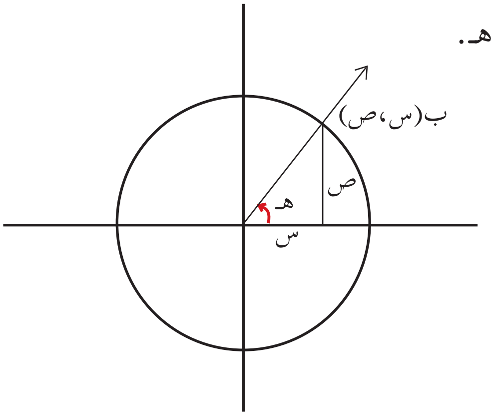
هل يمكن إيجاد النسب المثلثية للزوايا التي قياسها أكبر من ٩٠°، أو قياسها سالب؟

أتعلّم: الدائرةُ التي مركزُها نقطةُ الأصل، وطولُ نصفِ قطرها وحدة واحدة، تُسمَّى دائرةَ الوحدة.

معادلة دائرة الوحدة: $س^٢ + ص^٢ = ١$

نشاط ٣

لتكنْ هـ زاوية في الوضع القياسي، إذا قطع ضلعُ انتهائها دائرةَ الوحدة في النقطة ب (س،ص). أجدُ النسب المثلثيّة الأساسيّة للزّاوية هـ.



جاهـ = $\frac{ص}{١}$ = ص ، جتاهـ = ...،

ظاهـ = ...

بشكلٍ عام: إحداثيّات النقطة ب (جتاهـ ، جاهـ).

أتعلّم: إذا قطع ضلعُ انتهاءِ الزاوية هـ في الوضع القياسي دائرةَ الوحدة في النقطة ب (س،ص)، فإنّه يمكن تعريفُ الاقترانات المثلثية جاهـ = ص ، جتاهـ = س، ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠ وتُسمّى هذه الاقترانات، الاقتراناتِ المثلثية الأساسيّة للزّاوية هـ.

أفكر

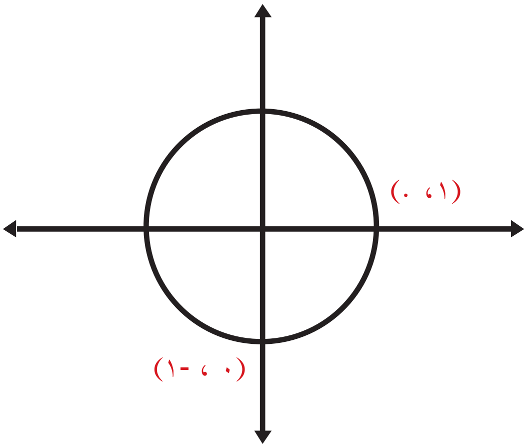
العلاقة من أ ⟵ ب (س ، ص) تشكل اقتراناً هـ ∈ أ حيث أ هي مجموعة الزوايا في الوضع القياسي.

ملاحظة: إذا كانت النقطة ب (س ، ص) تقع على دائرة الوحدة،

فإن -١ ≤ س ≤ ١، و -١ ≤ ص ≤ ١ ، وعليه فإن -١ ≤ جتاهـ ≤ ١ و -١ ≤ جاهـ ≤ ١

نشاط ٤

أجدُ الاقترانات المثلثية للزّوايا الربعيّة:
٠ ˚، ٩٠ ˚، ١٨٠ ˚، ٢٧٠ ˚، ٣٦٠ ˚.



- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٠ ˚ يقطع دائرة الوحدة في النقطة (١،٠)، وينتج جا٠°= ....،
جتا٠°=.......، ظا٠°= ....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٩٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (....، ....)، وينتج جا٩٠°= .... ،
جتا٩٠°=.......، ظا٩٠°= ....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ١٨٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (....، ....)، وينتج جا١٨٠°= .... ، جتا١٨٠°=.......، ظا١٨٠°= ....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٢٧٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (....، ....)، وينتج جا٢٧٠°= .... ، جتا٢٧٠°=.......، ظا٢٧٠°= ....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٣٦٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (....، ....)، وينتج جا٣٦٠°= .... ، جتا٣٦٠°=.......، ظا٣٦٠°= ....
- أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزّاوية الربعية (س°)	جاس	جتاس	ظاس
صفر	صفر		
٩٠°			
١٨٠°		-١	صفر
٢٧٠°			
٣٦٠°		١	٠

نشاط ٥

إذا قطع ضلعُ انتهاء الزاوية التي قياسها هـ° دائرةَ الوحدة في النقطة أ ($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) فإنّ:

- جاهـ = $\frac{١}{٢}$ ؛ لأن الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع ضلع انتهائها هو ....

جتا هـ = ... ؛ لأنّ: ....

ظاهـ = ...

نشاط ٦

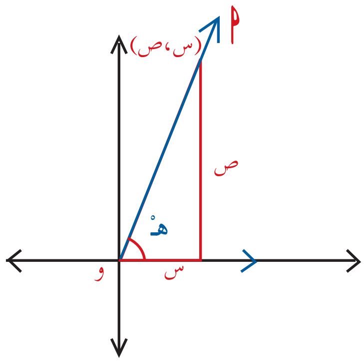
- أرسم دائرة الوحدة
- أرسم زاويةً قياسها هـ° في الوضع القياسي
- نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية مع الدائرة هي النقطة أ (س ، ص).

- تكون إشارةُ س موجبةً، إذا وقعت النقطة أ في الربع ....، أو الربع .... من المستوى.
- تكون إشارةُ ص موجبة، إذا وقعت النقطة أ في الربع ....، أو الربع ....من المستوى.

أتعلَّمُ: تتحدد إشارة الاقترانات المثلثية للزاوية هـ حسب الربع الذي تقع فيه.

إذا كانت هـ زاويةً في الوضع القياسي، النقطة أ (س ، ص) تقع على ضلع انتهائها، بعد النقطة

أ (س ، ص) عن نقطة الاصل = ...



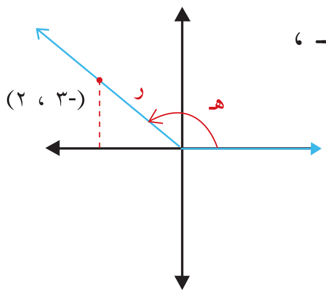
جاهـ، جاهـ = $\frac{ص}{ر}$

جتاهـ = $\frac{س}{ر}$

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ ، س $\neq$ صفر

نشاط ٧

في الشكل المجاور، أجدُ قيم الاقترانـاتِ المثلثيّة جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ:

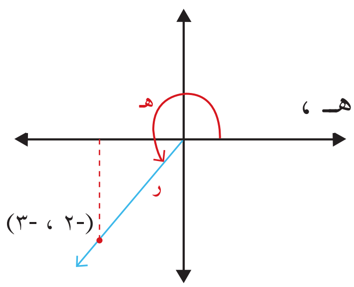


ر = $\sqrt{(٢)^{٢} + (-٣)^{٢}}$ = ...

جاهـ = ...، جتاهـ = ...، ظاهـ = ...

نشاط ٨

في الشكل المجاور، أجدُ قيم الاقترانـاتِ المثلثيّة جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ:



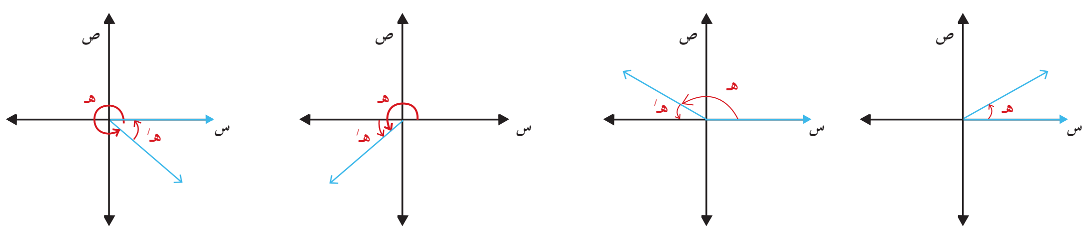
ر = ...

جاهـ = ... ، جتاهـ ....

ظاهـ = ...

نشاط ٩

لكلِّ زاويةٍ قياسها هـ درجة في المستوى زاويةُ اسنادٍ قياسها هـَ درجة، أُكمل:



هـَ = هـ ، هـَ = ... ، هـَ = هـ − ١٨٠° ، هـَ = ...

أتعلم: زاوية إسناد الزاوية (هـ): هي الزّاوية الحادّة (>هـَ) الناتجة من إتحاد ضلع انتهاء الزاوية (>هـ) ومحور السينات.

قيمُ الاقترانات المثلثيّة لزاويةِ الإسناد هي ذاتها قيمُ الاقترانات المثلثيّة للزّاوية الأساسيّة، بينما تحدّدُ إشارة تلك القيمة موضعَ ضلع انتهاء الزّاوية الاساسيّة.

نشاط ١٠

أتذكّر قيمَ الاقتراناتِ المثلثيّة للزّوايا الخاصّة، وأُكمل الجدول الآتي:

قياس الزاوية (س)	جاس	جتاس	ظاس
٣٠°	٠,٥		
٤٥°			١
٦٠°			$\sqrt{٣}$

نشاط ١١

أوّلاً: أجد قيمة جا ١٢٠°

الحل: الزاوية في الوضع القياسي والتي قياسها ١٢٠° تقع في الربع ....

إشارة جا١٢٠° موجب.

قياس زاوية الإسناد هـ = ١٨٠° – ١٢٠° = ...

جا١٢٠° = جا٦٠° =

ثانياً: أجد قيمة جتا ٢٤٠°

الحل: الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها ٢٤٠° تقع في الربع ....

إذن: إشارة جتا ٢٤٠°.................

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ...

إذن: جتا٢٤٠° = - جتا.....° = ...

نشاط ١٢

أجدُ جا ٢٢٥°

الزّاوية في الوضع القياسي، التي قياسها ٢٢٥° تقع في الربع .... ، إشارة جا ٢٢٥° هي:........

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ...

إذن: جا ٢٢٥° = ... = ...

• أجدُ جا -٣٠°

الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها -٣٠° تقع في الربع ....،

إشارة جا -٣٠° هي: ......

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ...

جا -٣٠° = ... = ...

• أجد ظا $\frac{\pi ٣}{٤}$ د

الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها $\frac{\pi ٣}{٤}$ د تقع في الربع ....،

إشارة ظا $\frac{\pi ٣}{٤}$ د هي: ....

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ... ، إذن: ظا $\frac{\pi ٣}{٤}$ د = ... = ...

نشاط ١٣

أجد قيمة ٢جا ٣٠° جتا ٣٠° وأقارنه بقيمة جا ٦٠°

٢جا ٣٠° جتا ٣٠° = ٢ × ...... × ..... = ...

جا ٦٠° = ... ماذا تلاحظ؟

أجد:

• ٢جا ٤٥° جتا ٤٥° = ٢ × ..... × ..... = ...

• جا ٩٠° = ... ماذا تلاحظ؟ ماذا تلاحظ؟

أستنتج أن: جا٢أ = ٢جاأجتاأ

نشاط ١٤

أجد قيمة جا $\frac{\pi}{٨}$ جتا $\frac{\pi}{٨}$

جا $\frac{\pi}{٨}$ جتا $\frac{\pi}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$ جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ × .... = $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

نشاط ١٥

أجد قيمة جتا^{٢} ٣٠° _ جا^{٢} ٣٠° وأقارنه بقيمة جتا٦٠°

جتا^{٢} ٣٠° _ جا^{٢} ٣٠° = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ _ $(...)^{٢}$

جتا٦٠° = ... ماذا تلاحظ؟

نشاط ١٦

أجد ناتج جتا^{٢} ١٥° _ جا^{٢} ١٥° دون استخدام الحاسبة

جتا^{٢} ١٥° _ جا^{٢} ١٥° = جتا..... = ...

نشاط ١٧

أ زاوية منفرجة بحيث جتاأ = $-\frac{٤}{٥}$ ، أجد قيمة جتا٢أ.

باستخدام المتطابقة جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١

جا^{٢} أ + $\left(\frac{-٤}{٥}\right)^{٢}$ = ١

جا^{٢} أ = ...

جا أ = ± $\frac{٣}{٥}$ ، الزاوية أ منفرجة، وتقع في الربع ....

اذن جا أ = ...

لإيجاد قيمة جتا٢أ = جتا^{٢} أ _ جا^{٢} أ نعوض قيمة جتاأ ، جاأ وينتج

جتا٢أ = $\left(\frac{-٤}{٥}\right)^{٢}$ _ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}$ = ...

ما قيمة جتا٤أ ؟

أستنتج أن: جتا٢أ = جتا^{٢}أ _ جا^{٢}أ ، جتا٢أ = ٢جتا^{٢}أ _ ١ ، جتا٢أ = ١ _ ٢جا^{٢}أ

أفكر

أكتب علاقة مناسبة لكل من جا٤أ ، جتا٤أ بدلالة جاأ، جتاأ

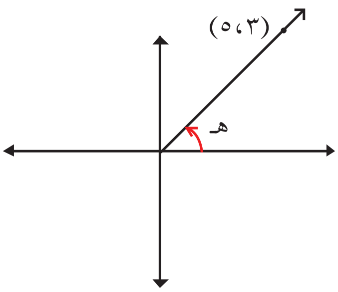
تمارين ومسائل:

(١) أجدُ قيمةَ الاقترانات المثلثية الأساسيّة لقياسات الزّوايا الآتية:

-٩٠° ، ٤٥٠° ، ٥π ^د^

(٢) أجدُ قيمةَ الاقترانات المثلثية الأساسيّة للزاوية هـ ، إذا قطع ضلعُ انتهائها دائرةَ الوحدة في النقطة:

أ) $\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}} ، \frac{-١}{\sqrt{٢}} \right)$ ، ب $(-١ ، ٠)$ ، جـ $\left(-\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢} \right)$



(٣) ما قيمةُ جا هـ ، جتا هـ، ظا هـ في الشّكل المجاور؟

(٤) أحدّدُ إشارةَ ما يأتي:

جتا -١٣٥° ، ظا ٨٤٠° ، جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ ^د^ ، ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ ^د^

(٥) أجد قيمة ما يلي دون استخدام الحاسبة

أ) ٢جتا^{٢} $٢٢,٥^\circ$ $-$ ١

ب) ١ $-$ ٢ جا^{٢} $\frac{\pi}{٦}$ ^د^

جـ) ٦جا $\frac{\pi}{١٢}$ ^د^ جتا $\frac{\pi}{١٢}$ ^د^

(٦) أجدُ قياسَ زاوية الإسناد للزّوايا التي قياساتها ما يأتي:

٢٢٥° ، $\frac{٢\pi}{٣}$ ^د^ ، -١٥٠° ، $\frac{٣\pi}{٤}$ ^د^ ، ٢١٠°

(٧) أجدُ قيمة ما يأتي، دون استخدام الآلة الحاسبة:

جا ٣٣٠°، ، جا -٣٠٠°

(٨) ٩ زاوية منعكسة بحيث جا٩ = - $\frac{٥}{١٣}$ ، أجد قيمة جتا٢٩ ، جا٢٩ ، جتا٤٩ .

(٩) لإيجاد ارتفاع قمة جبل قام مجموعة من الطلبة بقياس زاوية ارتفاعها من نقطة معينة على سطح الأرض فكانت ٣٠°، سار الطلاب مسافة أفقية باتجاه الجبل مقدارها (١٥٠٠) قدم ثم قاموا بقياس زاوية ارتفاع قمته مرة ثانية فكانت ٣٥° كما هو موضح بالشكل. أجدُ ارتفاع قمة الجبل

(٣ - ٤) تمثيل الاقترانات المثلثية بيانياً
Graphing Trigonometric Functions

نشاط ١

طريق وادي النار هي الرئةُ التي يتنفّس بها أهالي جنوب الضّفة الغربيّة، والتي تصل بين شمالها وجنوبها. حيث إنّ قوات الاحتلال ترفضُ تزويدَها بالكهرباء، فقد بادر مجموعةٌ من طلبة الجامعات الفلسطينيّة إلى تصميم خلايا شمسيّة تقوم بتحويل الطاقة الشمسيّة إلى طاقةٍ كهربائيّة مستمرة، يتمّ تحويلُها إلى تيارٍ متردّدٍ، تتغيّر قيمتُه مع الزّمن، الذي يمكن استخدامُه في إنارة المنطقة ليلاً.

ويمكن التعبير عن تغير التيار بالنسبة للزمن (ز) بالثانية بالعلاقة ت(ز) = أ جا $\frac{2\pi}{ن}$ ز

حيث أ هي أقصى حدّ للتيار بالأمبير، ن هي الزمن الدوري للتيار بالثانية.

إذا كانت العلاقة التي تربط التيار الكهربائي مع الزمن، ت(ز) = ٢جا (١٠πز)، فإنّ الزمن الدوري للتيار = $\frac{2\pi}{ن}$ = ١٠π، أقصى حدٍّ للتيار المسموح = ...، ن = ...

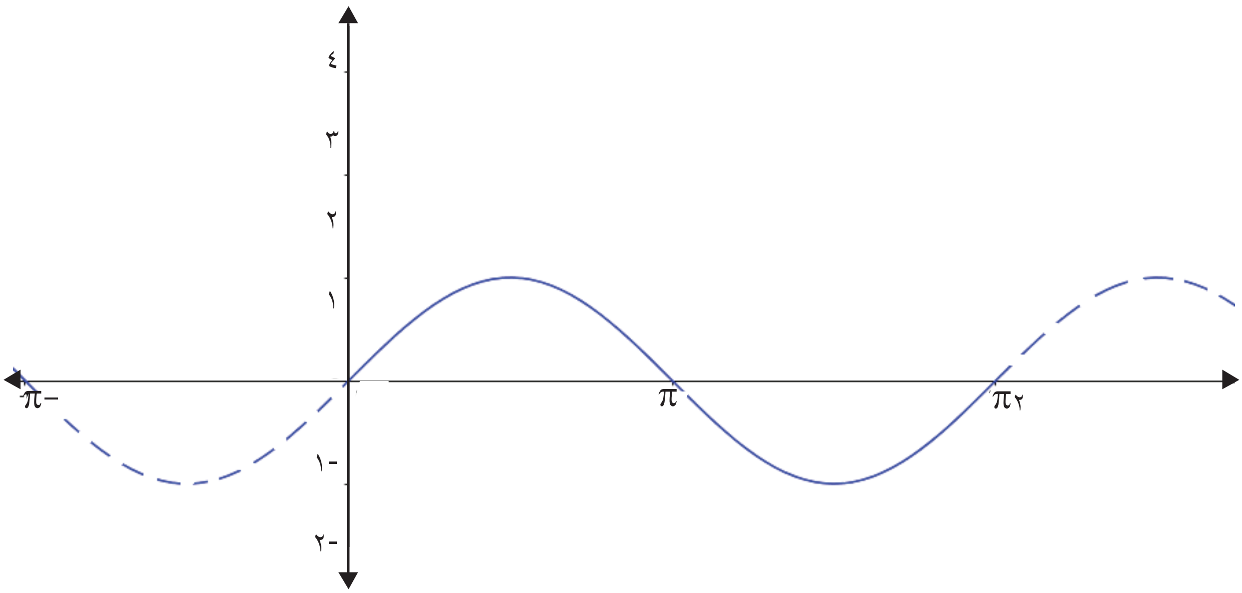
- قيمة التيار عند ز = ٠,١ ث تساوي: ت(٠,١) = ٢جا(١٠π × ٠,١) = ... أمبير
- قيمة التيار عند ز= ٠,٠٥ ث تساوي ....

نشاط ٢

أُمثّلُ الاقتران ق(س)= جاس في المستوى الديكارتي، أكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	π-	-$\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ق(س)= جا س		١-	...	...	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	...	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	...	...	١-	...	...

أُعيّنُ النّقاط من الجدول، وأرسمُ منحنى الاقتران:



أُلاحظ شكل المنحنى، وأستنتج خصائصه.

- بما أنّ الزّوايا المتكافئة لها النسبُ المثلثيّةُ المناظرة نفسها، فإنّ منحنى ق(س) =جا س يكرّرُ نفسه في فتراتٍ متساوية، طولُ كلٍّ منها ٢π. ومثل هذه الاقترانات تُسمّى اقتراناتٍ دوريّةً، ومقدار دورة هذا الاقتران = ٢π
- مجال الاقتران ق(س) =جا س هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة ح، ومداه هو [-١، ١]
- أكبرُ قيمةٍ للاقتران = ... وأصغر قيمةٍ له = ...

• مثل هذه الاقترانات لها سعةٌ، وتُعرف سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له} - \text{أصغر قيمة له}}{٢}$

وعليه فإنّ: سعة الاقتران ق(س) = جا س = $\frac{١ - ١^-}{٢}$ = ١

• منحنى ق(س)= جا س متماثل حول نقطة الأصل؛ لذلك فهو اقتران ....

نشاط ٣

أُمثّل الاقتران: ق(س) = جتاس في المستوى الديكارتي، س ∈ ح .
أُكمل الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ق(س)= جتا س	١-	...	...	...	...	...	٠	$-\frac{١}{٢}$	١-	...	...	...	

أُعيّن النقاط من الجدول، وأرسمُ منحنى الاقتران.

ألاحظُ شكل المنحنى، وأستنتج خصائصه:

• مجال الاقتران ق(س) = جتا س هو ....، ومداه ....

• أكبر قيمةٍ للاقتران = ...، وأصغر قيمةٍ له = ...

• الاقتران ق (س) = جتا س اقتران دوري، دورته = ...

• سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له} - \text{أصغر قيمة له}}{٢}$ = ...

• ق(س)= جتاس اقتران زوجيّ؛ لأنّ منحناه متماثل حول محور ....

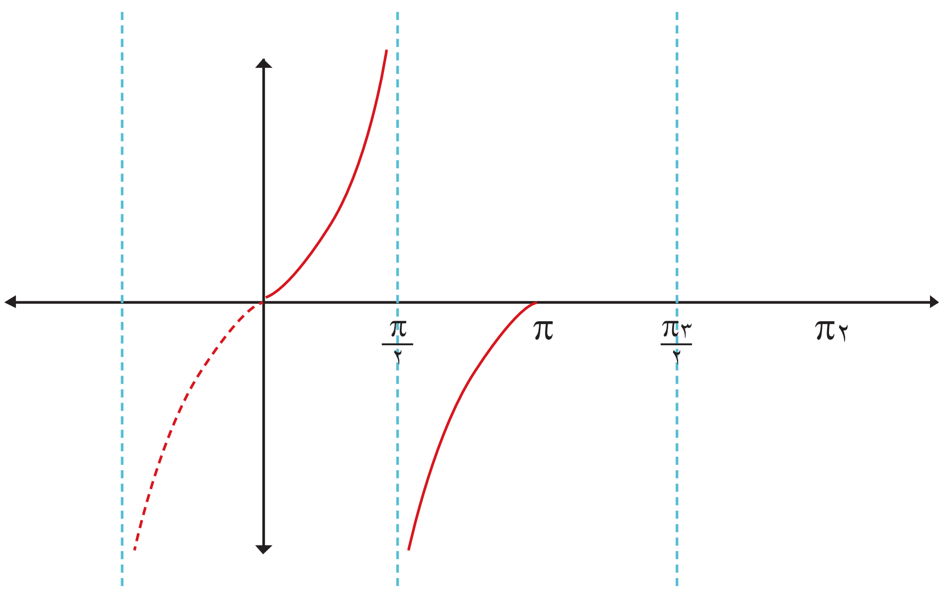
نشاط ٤

أمثل الاقتران ق(س) = ظا س في المستوى الديكارتي.

أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٤\pi}{٣}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ق (س) = ظا س	...	...	صفر	...	١	...	...	...	...	$\sqrt{٣}$	...	$-\frac{١}{\sqrt{٣}}$	...

أُعيّنُ النّقاط من الجدول، وأُكملُ رسم منحنى الاقتران.



ألاحظ شكل المنحنى، وأُدوّن خصائصه:

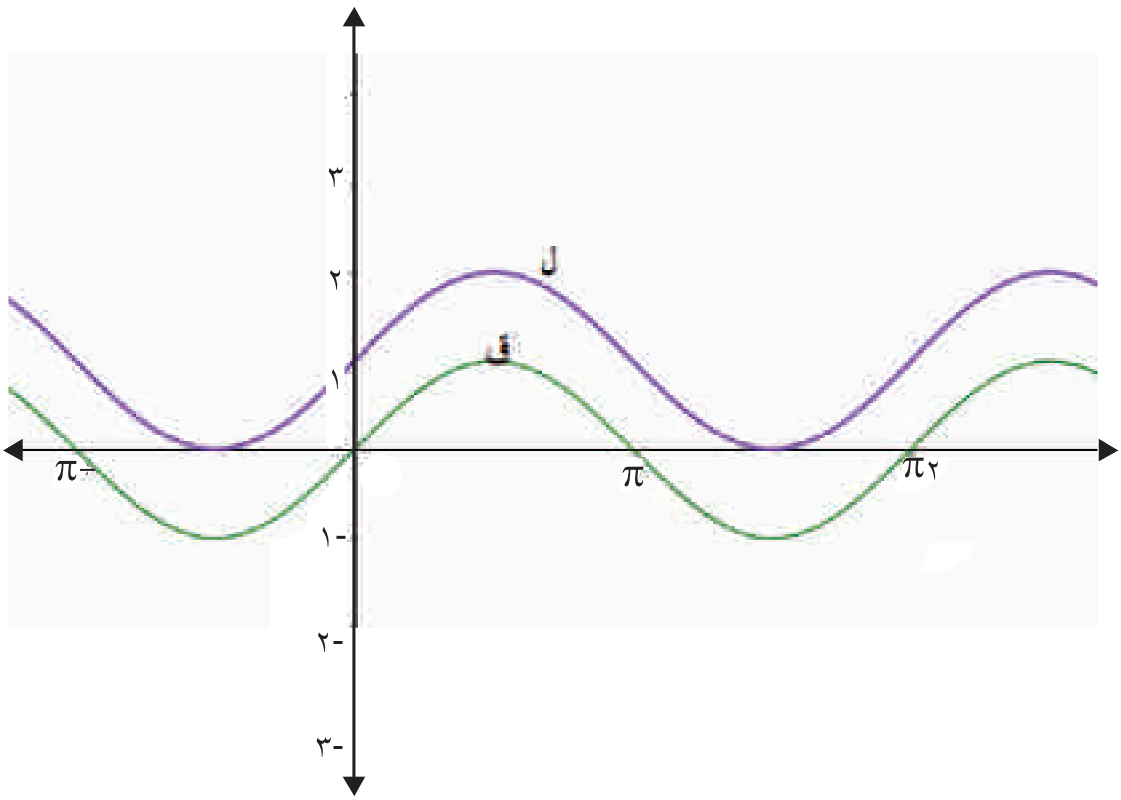
مجال ق(س) = ظاس هو مجموعةُ جميع الأعداد الحقيقيّة، ما عدا ....، ومداه هو: ح

دورته = ...

ق(س) = ظاس اقترانٌ فرديٌّ، أوضّحُ ذلك.

نشاط ٥

اعتماداً على منحنى الاقتران ق(س)= جا س، ومنحنى الاقتران ل (س) = جا س + ١



أُلاحظ أنّ: منحنى الاقتران ل(س) هو انسحاب لمنحنى الاقتران ق(س) بمقدار ...... إلى ......

سعة الاقتران ....، دورته ....

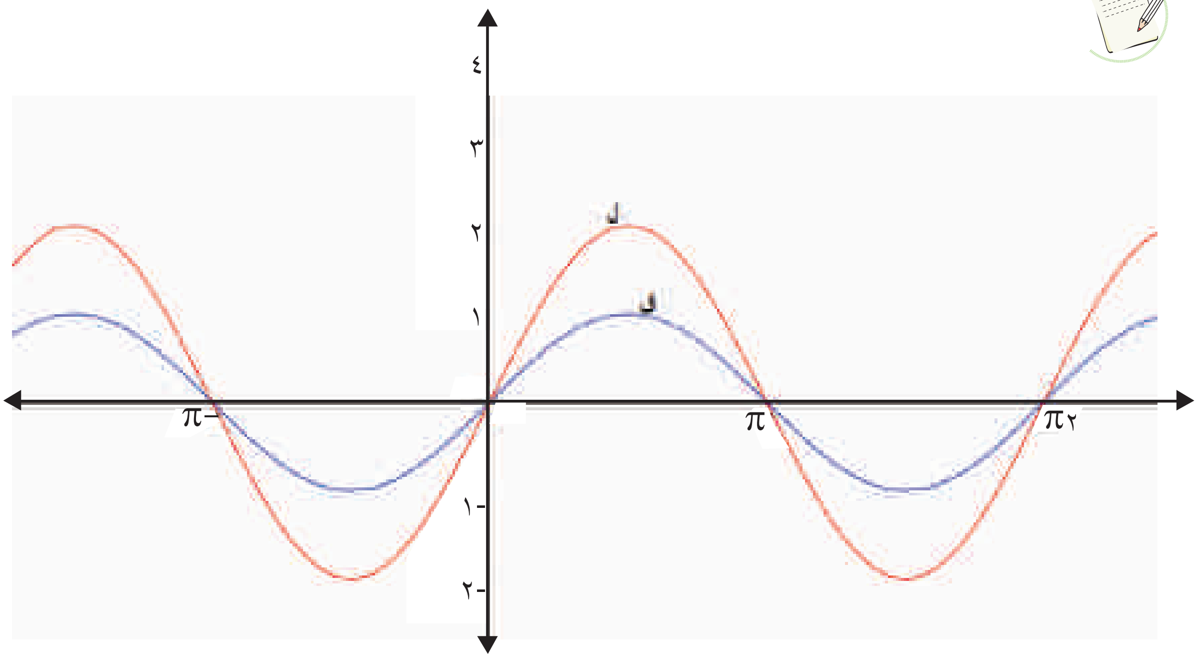
ومداه ....

باستخدام التحويلات الهندسيّة أرسمُ منحنيات الاقترانات الدورية الآتية:

أ) ق(س) = جاس ــ ١　　　ب) ق(س) = -جاس　　　جـ) ق(س) = جا(-س).

نشاط ٦

اعتماداً على منحنى الاقتران ق(س) = جا س، أرسمُ منحنى الاقتران ل (س) = ٢جا س، ثم أجدُ دورته وسعته.



من الرسم: دورة الاقتران ل = ...

القيمة العظمى هي ٢، والقيمة الصغرى هي: ....

السعة = ...

مدى الاقتران هو: ....

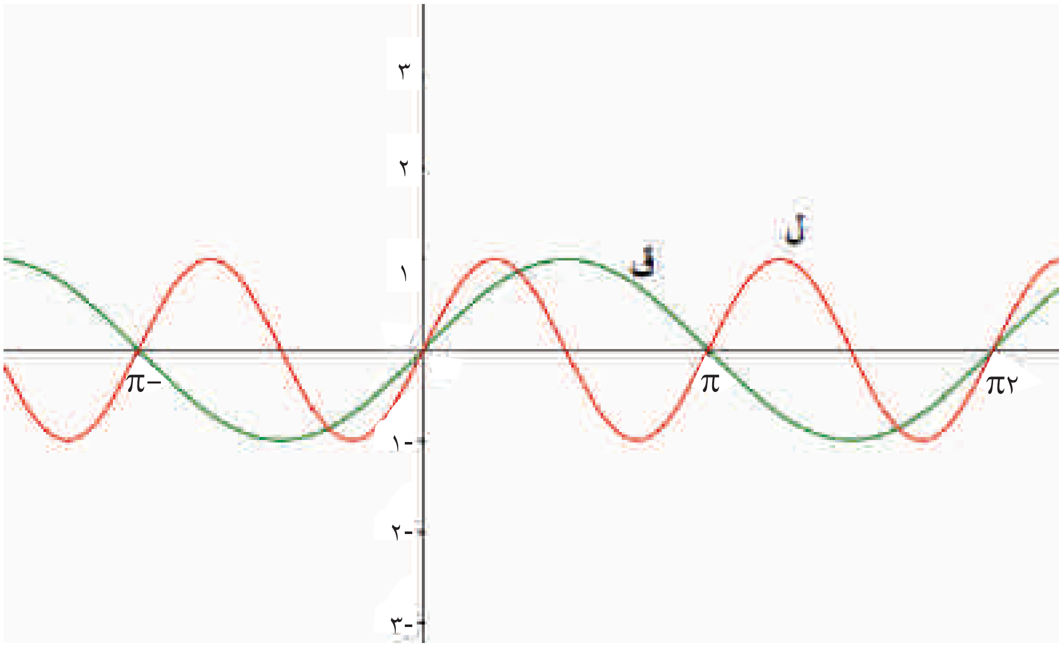
نشاط ٧

أُمثّلُ منحنى الاقتران ق(س) = حاس، ل(س) = جا٢س على المستوى البياني نفسه، ثم أجدُ السّعة والدورة لِلاقتران ل(س).

أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ل (س)= جا٢س	...	صفر	...	...	...	...	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	...	١	...	...	...

أُعيّنُ النّقاط في المستوى الديكارتي، وأُلاحظُ التمثيل البياني للمنحنى:



من التمثيل البياني لمنحنى ل(س)، ألاحظُ أنّ دورة الاقتران ل(س) هي: ....

بينما سعته =..........................

مدى الاقتران ل =..........................

أستنتج: الاقتران الدوري ق(س) = ﺃ جا (ب س) + جـ ، او الاقتران هـ(س) = ﺃجتا (ب س) + جـ

حيث: ﺃ ، ب ، جـ أعداد حقيقيّة ، ﺃ ، ب ≠ ٠.

فتكون: دورة الاقتران = $\frac{٢\pi}{|ب|}$

سعة الاقتران = | ﺃ |

مدى الاقتران = [- | ﺃ | + جـ ، | ﺃ | + جـ]

نشاط ٨

لديك الاقتران ق(س) = ٢ جتا $\frac{س}{٢}$ – ٣، أجدُ دورته، سعته، ومداه، دون تمثيله بيانيّاً.

دورة الاقتران = $\frac{٢\pi}{|ب|}$ = ...

سعة الاقتران = ...

مجال الاقتران = ...

مدى الاقتران = ...

تمارين ومسائل:

(١) أُمثّلُ منحنيات الاقترانات المثلثية الآتية:

أ) ق(س) = جا س + ٢

ب) ل(س) = جتا ٢س _ ١

جـ) م(س) = جتا (-س)

د) ع(س) = ظاس + ١

هـ) ك(س) = جا (س + π)

(٢) أجدُ: أكبرَ قيمة وأصغرَ قيمة (إن وجدت)، السعة، الدورة لكلٍّ من الاقترانات الواردة في السؤال الأوّل.

(٣) أجدُ: دورة، وسعة، ومدى الاقتران: ق(س) = -٣ جتا ($\frac{س}{٢}$)، دون تمثيله بيانيّاً.

(٤) أ) أرسم منحنى الاقتران ق(س) = جتاس، وعلى المستوى الديكارتي نفسه أرسمُ منحنى الاقتران ل (س) = جا (س + $\frac{\pi}{٢}$)، ماذا تلاحظ؟

ب) أرسمُ منحنى الاقتران ق(س) = جاس، وعلى المستوى الديكارتي نفسه أرسمُ منحنى الاقتران ل (س) = جتا (س – $\frac{\pi}{٢}$)، ماذا تلاحظ؟

(٥) يتحرك سطح البحر بين ارتفاع وانخفاض مرة كل نصف يوم تقريباً، وتعرف هذه الظاهرة بالمد والجزر وتنشأ عن قوى جذب القمر والشمس. إذا كان أقصى ارتفاع للماء هو ٢٠م، وأقل انخفاض هو ١٠م، وكان تغير ارتفاع الماء خلال ساعات اليوم يأخذ شكل اقتران الجيب. أكتب قاعدة الاقتران التي تعبر عن مستوى ارتفاع وانخفاض مستوى الماء مع الزمن، وأُمثله بيانيّاً.

(٣ - ٥) المعادلات المثلثيّة
(Trigonometric Equations)

نشاط ١

شارك في سباق فِلَسطينَ الوطنيّ حوالي ٦٠٠٠ متسابقٍ، من دول العالم كافّةً؛ حيث اشتمل السباق على رسائل وطنيّة عدّة، أهمّها التركيز على الواقع الفلسطينيّ بمنع حريّةِ الحركة، وإقامة جدار الضم والتوسع بين محافظات الوطن، الذي تبعه ممارساتٌ عديدة تنافي المواثيق الدّوْليّة لحقوق الإنسان.

عندما يكون المتسابقُ ضمنَ مسارٍ مُنحنٍ عليه أنْ يحافظ على اتّزانه، وذلك بالميل بزاوية قياسها = هـ؛ بحيث تكون العلاقة: ظا هـ = $\frac{\text{س}^2}{\text{جـ ر}}$ ، حيث: س: سرعة المتسابق تلك اللحظة، جـ: تسارُع الجاذبيّة الأرضيّة = ٩,٨م/ث^2، ر: نصف قطر المسار الدائري.

ويمكن كتابةُ تلك العلاقة بالصّورة: جاهـ = $\frac{\text{س}^2}{\text{جـ ر}}$ جتا هـ

- أبيّنُ أنّ الصورة الأولى للعلاقة تكافئ الصورة الثانية لها.
- زاوية ميل لاعب يجري بسرعة ٢٠م/ث في مسار دائري نصف قطره = ٤٠م، هي ....

نشاط ٢

أرسمُ المستوى الديكارتي

- أرسمُ دائرةً، مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها وحدة واحدة (دائرة الوحدة).
- أرسم زاويةً، قياسها هـ في الوضع القياسي.
- أعيّنُ نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية هـ مع الدائرة: ب (س ، ص)
- جا هـ = ... ، جتا هـ = ...،
- ب (س ، ص) = ب (...... ، ....)

معادلة دائرة الوحدة $س^٢ + ص^٢ = ١$، النقطة ب تقع على الدائرة، إذن: تحقّقُ معادلتها وينتج أنّ:
$جا^٢ هـ + جتا^٢ هـ = ١$

نشاط ٣

أجدُ قيمة الصواب للجملة المفتوحة: ٢ جا س – ١ = صفر، عندما س = ٠ ، $\frac{\pi}{٦}$
نعوّض س = ٠ في الجملة المفتوحة ٢ جا ٠ – ١ = -١ ≠ ٠ إذن: خاطئة.
نعوّض س = $\frac{\pi}{٦}$ في الجملة المفتوحة ٢ جا $\frac{\pi}{٦}$ – ١ = ٠ إذن: صائبة.

تسمى الجملة المفتوحة التي تحتوي اقتراناً مثلثياً وتكون صائبة لبعض القيم الحقيقية معادلة مثلثية.

أتذكّر: إذا كان س ، ص قياسيْن لزاويتيْن متتامتيْن فإنّ: جاس = جتا ص.

نشاط ٤

أحلّ المعادلة المثلثيّة: جا (٢س + ٣٠) = جتا ٤س ، صفر ≤ س ≤ ٩٠°.
٢س + ٣٠ + ٤س = ...
٦س = ...، إذن س = ...°

مثال: حلّ المعادلة ٢ جا س − ١ = صفر ، صفر $\leq$ س $\leq$ ٢ π

- ٢ جا س − ١ = صفر $\longleftarrow$ ٢ جا س = ١ $\longleftarrow$ جا س = $\frac{١}{٢}$
- إذن: زاوية الإسناد = ٣٠°
- بما أنّ: جاس قيمة موجبة $\longleftarrow$ تقع الزاوية في الربع الأوّل (س = ٣٠°) ،

أو تقع في الربع الثاني (س = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°)

مجموعة الحل = { $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$ }

نشاط ٥

أجدُ مجموعة حلّ المعادلة:

جتا^{٢}س + ٢جتاس − ٣ = صفر ، صفر $\leq$ س $\leq$ ٢ π

جتا^{٢}س + ٢جتاس − ٣ = صفر

(جتاس +....) (جتا س − .....) = صفر

إذن: جتا س + ٣ = صفر $\longleftarrow$ جتا س = -٣ (تُرفض)، لماذا ؟

أو جتا س = ... $\longleftarrow$ س = ... أو س = ... $\longleftarrow$ مجموعة الحلّ = ...

نشاط ٦

أجدُ مجموعةَ حلّ المعادلة:

جا س جتا س − $\frac{١}{٢}$ جا س = صفر ، صفر $\leq$ س $\leq$ ٢ π

جا س جتا س − $\frac{١}{٢}$ جا س = صفر ، $\longleftarrow$ (جا س) (... − ...) = صفر

إذن: جا س = صفر، س زاوية ربعية، $\longleftarrow$ س = صفر، $\longleftarrow$ أو س =.... ، أو س = ...

جتاس − $\frac{١}{٢}$ = صفر ، جتا س = ...، زاوية الإسناد = ...

جتا س قيمة موجبة $\longleftarrow$ تقع الزاوية في الربع ....، أو الربع ......

إذن: س = ...، أو س = ...

مجموعة الحل= ....

تمارين ومسائل:

(١) ما مجموعة حلّ كل من المعادلات الآتية، حيث: صفر ≤ س ≤ ٢ π ؟

أ) ٢ جتا^{٢} س – ١ = صفر

ب) ٢ جا^{٢} س + جا س = صفر

جـ) ظا^{٢} س + ١ = ٢

(٢) عُلِّق جسم في نهاية زنبرك يهتز فوق سطح منضدة، إذا كان ارتفاع الجسم عن سطح المنضدة يُعطى بالعلاقة ع = ٢٠ – ٤جتا ٢ π ن ، حيث ن الزمن بالثواني، ع الارتفاع بالسنتيمتر.

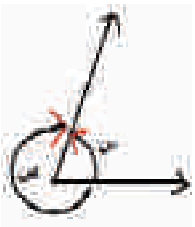
متى يكون ارتفاع الجسم = ١٦ سم ؟

بعد كم ثانية يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع ؟

(٤ - ٦) تمارين عامّة

السؤال الأوّل:

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:



(١) ما قيم س ، ص الممكنة في الشكل المجاور؟

أ) (٣٠٠°، ٦٠°)   ب) (٦٠°، -٣٠٠°)   جـ) (-٦٠°، ٣٠٠°)   د) (-٦٠°، -٣٠٠°)

(٢) أي القياسات الآتية قياسٌ لزاوية ربعيّة ؟

أ) ١٢٠°   ب) ١٩٠°   جـ) ٣٠٠°   د) ٣٦٠°

(٣) أي القياسات الآتية قياسٌ لزاويةٍ مكافئةٍ للزاوية التي قياسها ١٣٥° ؟

أ) -٢٢٥°   ب) ٢٢٥°   جـ) -١٣٥°   د) ٤٥°

(٤) ما قياس زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها ٢٠٠°:

أ) ١٦٠°   ب) -٦٠°   جـ) ٢٠°   د) -٢٠°

(٥) زاوية قياسها ($\frac{\pi ٣}{٥}$)^{د} ، ما قيمة قياسها بالدرجات؟

أ) ٢١٦°   ب) ٥٤°   جـ) ١٠٨°   د) ٣٤,٤°

(٦) زاوية قياسها ٣١٥°، ما قياسها بالراديان؟

أ) $\frac{\pi ٧}{٨}$ ب) $\frac{\pi ٧}{٤}$ جـ) $\frac{\pi ٣١٥}{٣٦٠}$ د) $\frac{\pi ٤}{٧}$

(٧) إذا كان ظاس= $\frac{٦}{٨}$ ، فما قيمةُ جا س ؟

أ) ٦   ب) $\frac{٣}{٥}$ جـ) $\frac{٨}{١٠}$ د) ٨

(٨) ما سعة الاقتران: ق(س) = ٢جتا ٣س − ١ ؟

أ) ٢ ب) ٣ جـ) -١ د) ١

(٩) ما دورة الاقتران: ل(س) = ٣جا ٢س + ١ ؟

أ) ٢π ب) π جـ) $(\frac{٢}{٣})\pi$ د) $(\frac{٣}{٢})\pi$

السؤال الثاني:

ما قيمة ما يأتي:

أ) جا -٢٤٠° ب) جتا -$\frac{٧\pi}{٤}$ جـ) ظا ٣٣٠° د) جا ٤٠٥° ؟

السؤال الثالث:

أُبيّنْ خطأً كلٍّ من العبارات الآتية:

أ) جتا (س + ص) = جتا س + جتا ص

ب) جا ٢س = ٢ جاس

جـ) ظا $\frac{٢}{٣}$س = $\frac{\text{ظا ٢س}}{٣}$

السؤال الخامس:

أرسمُ منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = ٣جا ($\frac{٢}{٣}$ س)

ب) هـ(س)= ٢ − جتا (-س)

جـ) ل(س) = ظاس − ١

د) ك(س) = جتا (س − $\frac{\pi}{٢}$)

أُقيّمُ ذاتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	دون المتوسط
تحويل من التقدير الستيني إلى التقديرالدائري وبالعكس			
تحديد الزاوية المكافئة لزاوية ما			
تمثيل اقترانات مثلثية بيانيا			
حل معادلة مثلثية			

فكرةٌ رياديّة:

تستطيع السفينة الدخول الى الميناء فقط إذا كان مستوى المياه لا يقل عن ٨م نتيجة حركة المد والجزر.
تُحْدِث حركة المد والجزر تغيراً يومياً على مستوى ارتفاع الماء حسب العلاقة:

ع = ٥جا ($\frac{\pi}{٦}$س) + ٨ ، حيث س هي المدة الزمنية المنقضية بعد منتصف الليل بالساعات، ع ارتفاع الماء بالأمتار.

أ) كم مرة يبلغ فيها عمق المياه في الميناء ٨م تماماً في اليوم ؟

ب) أرسم مخططاً يبين كيف يتغير ارتفاع الماء خلال اليوم، ثم أقدّر عدد الساعات في اليوم التي تستطيع السفينة الدخول الى الميناء. ما هو أقصى ارتفاع وانخفاض للماء خلال اليوم ؟

جـ) أناقش المخاطر التي تتعرض لها البضائع إذا اعتمد الميناء تفريغ الحمولة الساعة ١٢ ليلاً كل يوم.

الوحدة الرابعة ٤

الإحصاء والاحتمالات
Statistics and Probability

تفيدُ إحصاءات منظمةِ الصحةِ العالميّةِ أنّ عددَ الأَسِرَّةِ في المستشفيات، مقارنة مع عدد السكان هو سرير لكل ٢٩٤ نسمة، بينما في فلسطين فهو سرير لكل ٧٨٠ نسمة، فإذا تمّ بناء ١٠ مستشفيات خلال عامين، في كل مستشفى ١٠٠ سرير، فما مدى اقتراب فلسطين من النسبة العالمية في عدد الأسرّةِ في المستشفيات، مقارنة مع عدد السكان؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الارتباط في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- رسم شكل الانتشار الذي يمثّل العلاقة بين متغيّرَيْن.
- إيجاد معامل ارتباط بيرسون.
- كتابة معادلة الانحدار.
- استخدام مبدأ العد في سياقات حياتيّة.
- حساب التباديل الرائية لمجموعة تحتوي ن من العناصر.
- حساب التوافيق الرائية لمجموعة تحتوي ن من العناصر.
- توظيف مفاهيم الوحدة في حل مشكلات حياتية.

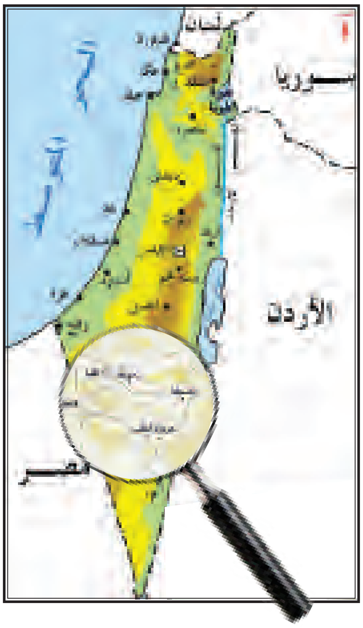
(٤ - ١) الارتباط الخطي (Linear Correlation)

نشاط ١

تُمثِّلُ صحراءَ النقب أكثرَ من ثلث مِساحة فلسطين، فيها العديد من المدن مثل حورة وعرعرة.

ذهب أحمدُ في رحلةٍ مدرسيّةٍ إلى منطقة النقب، وتعرّفَ إلى العديد من المدن الفلسطينية، وعند عودته إلى مدرسته أحضر الخريطة، وبدأ بدراسة توزيع المدن الفلسطينية في تلك المنطقة ليقدم تقريراً عن الرحلة.

أمثّلُ المدن الفلسطينية الآتية: اللقية، رهط، كسيفة، وبئر السبع بنقاط في المستوى الديكارتي.



كيف تتوزعُ المدنُ في المستوى؟

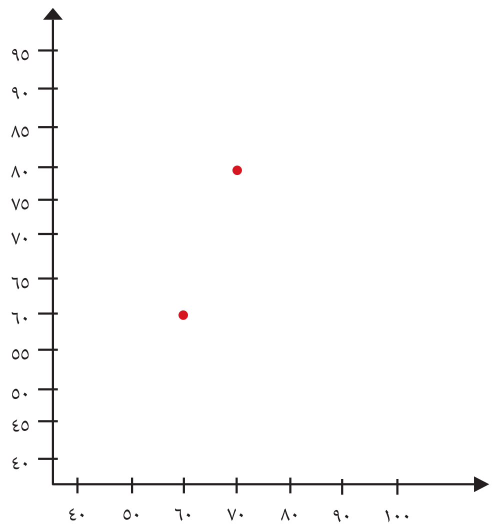
نشاط ٢

في دراسةٍ قام بها معلمُ الرياضيات في مدرسة العودة الثانوية، لمعرفة العلاقة بين علامات مبحثيّ الرياضيات والعلوم لمجموعة من طلبة الصف العاشر، حصل على البيانات في الجدول الآتي:

علامة الرياضيات س	٦٠	٧٠	٥٥	٨٠	٦٥	٧٥	٩٠
علامة العلوم ص	٦٠	٨٠	٥٠	٩٠	٧٠	٧٥	٨٥

أُعيدُ كتابة البيانات في الجدول، على شكل أزواجٍ مرتبة: (٦٠،٦٠) ..... أُكملُ ......

أمثّلُ كلَّ زوجٍ مرتّبٍ بنقطة في المستوى الديكارتي:



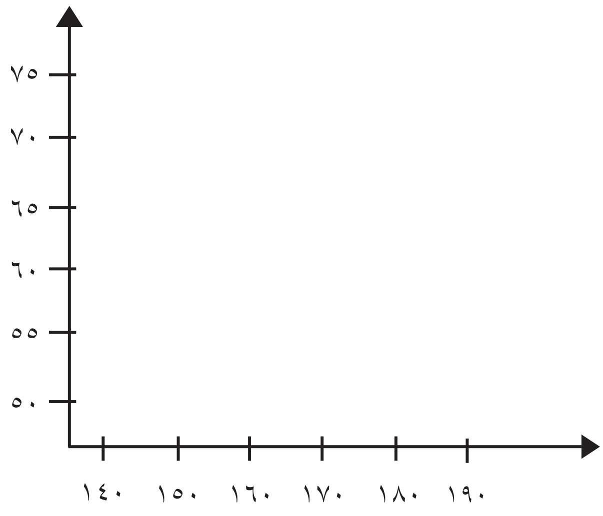
أتعلمُ: الشكل الناتج من تعيين النقاط في المستوى الديكارتي يسمى شكل الانتشار.

نشاط ٣

قام قيس بجمع بيانات حول أطوال مجموعة من طلبة الصف العاشر، وكُتلِهم، فكانت كما في الجدول الآتي:

الطول بالسنتمتر	١٧٠	١٦٠	١٦٥	١٦٠	١٥٥	١٦٢	١٥٠	١٦٧	١٥٨
الكتلة بالكيلوغرام	٧٠	٦٥	٦٢	٦٠	٥٨	٦٠	٥٥	٦٨	٥٦

أمثلُ شكل الانتشار لهذه البيانات:



- هل توجد علاقة بين طول الإنسان وكتلته ؟
- هل يمكنُ رسمُ مستقيم يمرُّ بمعظم النقاط ؟

أتعلمُ: إذا أمكنَ رسمُ مستقيم يمرُّ بمعظم النقاط في شكل الانتشار، فإن العلاقة بين المتغيّريْن خطيّة، وتسمى هذه العلاقة الارتباط الخطيّ.

- هل بالإمكان تحديد قيمة عددية لقوة الارتباط بين المتغيّريْن؟

أستنتج: شكل الانتشار يفيد في تحديد ما إذا كانت هناك علاقة، ونوعها خطيّة، أو غير خطيّة بين متغيّريْن، ولكن لا يكفي للحكم على قوة الارتباط بين المتغيّريْن؛ لأنّ تقديرَه يختلفُ باختلاف الشخص الذي يقومُ بالحكم على قوة الارتباط؛ ولذلك يجبُ استخدامُ طريقةٍ أكثر دقّة، يتمُّ بواسطتها تحديدُ قيمةٍ عدديةٍ لقوة الارتباط بين المتغيّريْن، وهي ما يسمّى معامل الارتباط، وهذا ما سيتم تعلمه في الدرس القادم.

تمارين ومسائل:

١) يمثلُ الجدولُ الآتي علاماتِ مجموعةٍ من الطلبة في مبحثيّ الفيزياء (س)، والكيمياء (ص).
أرسمُ شكل الانتشار، وأبيّنُ نوع الارتباط.

س	٥	٩	٨	١٢	١٠	١١	٢	٤
ص	٧	١٠	٨	١٥	٩	١٣	٤	٦

٢) في الجدول الآتي أعمارُ مجموعةٍ من الأشخاص (س)، وعدد الساعات اليومية التي يمارسون فيها التمارين الرياضية (ص):

س	٣٠	٢٥	٢٢	٢٠	٣٥	٤٠	٥٠	٥٥	٦٠
ص	٣	٢	١,٥	١	٤	٥	٣,٥	٢	١

- أرسمُ شكل الانتشار لهذه البيانات.
- هل يوجد ارتباطٌ خطيٌّ بين عمر الشخص وعدد الساعات اليومية التي يقضيها في ممارسة التمارين الرياضية؟

٣) في محلٍ لبيع الأحذية، وجد صاحبُ المحل أن هناك علاقة بين سعر الحذاء وعدد القطع المَبيعة من ذلك النوع، فسجّل بياناتِهِ في أحد الأشهر، في الجدول الآتي:

سعر الحذاء بالدينار	١٠	٢٠	١٥	١٢	٣٠	٤٠	٢٢	٣٥	٢٥
عدد القطع المبيعة في الشهر	٦٠	٤٠	٢٥	٥٥	١٠	١٥	٢٥	٥	٢٠

أرسم، شكل الانتشار، وأبيّنُ نوع الارتباط.

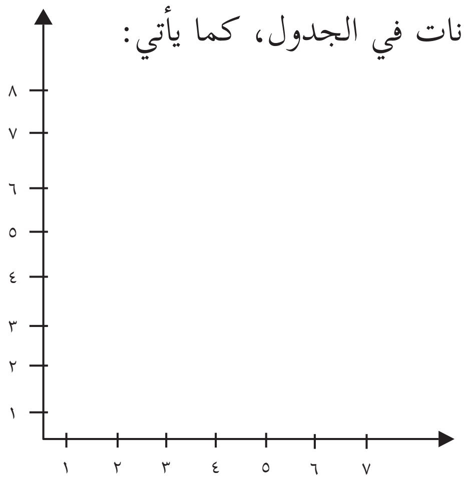
(٤ - ٢) معامل ارتباط بيرسون
(Pearson Correlation Coefficient)

نشاط ١

تشتهرُ محافظةُ الخليلِ بزراعة العنب، وحسَب إرشاداتِ وِزارةِ الزراعةِ الفِلسطينيّةِ، وخبرةِ المزارعين توجدُ علاقةٌ بين عدد مراتِ حراثةِ الأرضِ ومحصولِ العنب. قام الحاج شحدة بمتابعة قطعة أرضه، فجمع البيانات الآتية:

عدد مرات حراثة الأرض في السنة	١	٢	٣	٤	٥
إنتاج العنب بالطن	٢	٣	٤	٥	٥,٥

أرسمُ شكلَ الانتشار للبيانات في الجدول، كما يأتي:



أناقش

- تزدادُ كميّةُ إنتاجِ العنبِ بزيادة عددِ مرّاتِ حراثة الأرض.
- إذا اتّخذ شكلُ الانتشار خطاً مستقيماً فهناك ارتباطٌ بين المتغيريْن، يُمكنُ التعبيرُ عنه عددياً بمعامل ارتباط، يُسمّى معاملَ ارتباط بيرسون.

تعريف: إذا كانت س ، ص مجموعتين من القيم المتناظرة فيعرّفُ معامل ارتباط بيرسون ر كما يأتي:

$$\text{ر} = \frac{\sum_{\text{ك}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}\,\text{ص}_{\text{ك}} - \text{ن}\,\overline{\text{س}}\,\overline{\text{ص}}}{\sqrt{\sum_{\text{ك}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}^{\text{٢}} - \text{ن}\,\overline{\text{س}}^{\text{٢}}}\ \sqrt{\sum_{\text{ك}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ك}}^{\text{٢}} - \text{ن}\,\overline{\text{ص}}^{\text{٢}}}}$$

حيث: $\overline{\text{س}}$ الوسط الحسابي لمجموعة قيم س ، $\overline{\text{ص}}$ الوسط الحسابي لمجموعة قيم ص ، ن عدد القيم.

نشاط ٢

خالدٌ ورفاقُهُ في الصف العاشر، يعيشون في حيّ الياسمينة في نابُلْسَ، استلموا علاماتِهم المدرسيّة، بعد اختبارات الشهرين، فأرادوا دراسةَ العلاقةِ بين علاماتهم في مبحثيّ اللغة العربية واللغة الانجليزية، من خلال حساب معامل ارتباط بيرسون.

اللغة العربية س	٢٠	٢٥	٢٠	١٥	٣٠
اللغة الانجليزية ص	٢٥	٢٢	١٨	٢٠	٣٠

أكملُ الجدولَ الآتيَ

س	ص	$س^٢$	$ص^٢$	س ص
٢٠	٢٥			
٢٥	٢٢		٤٨٤	
٢٠	١٨	٤٠٠		
١٥	٢٠			
٣٠	٣٠			٩٠٠
١١٠	١١٥		٢٧٣٣		المجموع

$\sum_{ك=١}^{ن} س_ك^٢ =$ ..... $\sum_{ك=١}^{ن} ص_ك^٢ =$ ..... $\sum_{ك=١}^{ن} س_ك ص_ك =$ .....

- أحسبُ:

$\bar{س} =$ ...... $\bar{ص} =$ ......

- أحسبُ معاملَ ارتباطِ بيرسون:

$$ر = \frac{٢٦١٠ - ٥ \times ٢٢ \times ٢٣}{\sqrt{٢٥٥٠ - ٥ \times (٢٢)^٢}\sqrt{٢٧٣٣ - ٥ \times (٢٣)^٢}}$$

$ر =$ ......

أتعلمُ: $-١ \leq ر \leq ١$

نشاط ٣

في إحدى العيادات الصحيّة تمّ قياسُ ضغطِ الدم الأعلى لخمسةِ مرضى من أعمارٍ مختلفة، وبُوِبَت البياناتُ في الجدول الآتي:

العمر س	٥٠	٥٥	٦٠	٤٥	٤٠
ضغط الدم ص	١٢٠	١٤٠	١٣٠	١٥٠	١٣٠

لحسابِ معاملِ ارتباط بيرسون أكوّنُ جدولاً، وأجدُ:

$\sum_{ك=1}^{ن} س_{ك}^{2} = \ldots\ldots$ $\sum_{ك=1}^{ن} ص_{ك}^{2} = \ldots\ldots$ $\sum_{ك=1}^{ن} س_{ك}\, ص_{ك} = \ldots\ldots$

$\overline{س} = \ldots\ldots$ $\overline{ص} = \ldots\ldots$

$ر = \ldots\ldots\ldots\ldots$

تمارين ومسائل:

١) حسبَ ثائرٌ معدّلَ درجاتِ الحرارةِ في قريتِه، في الأسابيعِ الثمانيةِ من شهريّ كانون أول وكانون ثاني، وعددّ أُسْطواناتِ الغاز التي تستهلكُها أسرتُه للتدفئة في كلِّ أسبوع، فكانت على النحو الآتي:

درجة الحرارة س	١-	٥	٨	١٢	٠	٢-	١٠	٨
عدد أُسطوانات الغاز ص	٣	٢	٢	١	٢	٣	١	٢

أحسبُ معاملَ ارتباط بيرسون.

٢) قام طلبةُ الصفّ العاشرِ الأساسيّ في مدرسة المجدل الثانوية، بدراسة العلاقةِ بين عددِ أفرادِ الأُسرةِ لَدى طلبةِ الصفّ، وكميّةِ استهلاكِ الماءِ شهريّاً، فجمعوا البياناتِ، وحصلوا على النتائج الآتية، عِلماً بأنّ عددَ الأُسَرِ خمسٌ. أحسبُ معاملَ ارتباط بيرسون.

$$\sum_{ك=١}^{ن} س_ك ص_ك = ٤٩٠ \qquad \sum_{ك=١}^{ن} ص_ك = ١١٠ \qquad \sum_{ك=١}^{ن} س_ك = ٢٠$$

$$\sum_{ك=١}^{ن} ص_ك^٢ = ٢٧٠٠ \qquad \sum_{ك=١}^{ن} س_ك^٢ = ٩٠$$

٣) أحسبُ معاملَ ارتباطِ بيرسون للبيانات في الجدول الآتي:

س	١٠	٨	٥	١٦	٦	١٥
ص	٩	٧	٥	١٥	٦	١٢

(٤ - ٣) الانحدارُ الخطّيُّ البسيط
(Simple Linear Regression)

نشاط ١

تشيرُ الإحصاءاتُ إلى أنّ عددَ السيّاراتِ في فلسطينَ في السنواتِ الأخيرةِ ازدادَ بشكلٍ ملحوظٍ؛ حيث أصبحَ ثلاثةَ أمثالِ ما كان عليه في العَقْدِ الماضي؛ ما أدّى إلى الازْدحاماتِ والأزماتِ المروريّةِ، وتأخُّرِ وصولِ المواطنين إلى الأماكنِ التي يقصدونها، في ساعاتِ الصّباحِ بخاصّة، وساعاتِ ما بعد الظهر.

أكتبُ معادلةً تمثّلُ عددَ السيّاراتِ حاليّاً، مقارنةً معَ عددِها في العَقْدِ الماضي.

ص= .... ، حيث: ص ...... ، س ....

تعريف:

تسمى المعادلة $\hat{\text{ص}} = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$ التي تربط بين قيم المتغيرين س ، ص معادلة خط انحدار ص على س

حيث:
$$\text{أ} = \frac{\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}\,\text{ص}_{\text{ك}} - \text{ن}\,\bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}}{\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}^{2} - \text{ن}\,\bar{\text{س}}^{2}} \quad \text{و} \quad \text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ}\,\bar{\text{س}}$$

$\bar{\text{س}}$ الوسطَ الحسابيَّ لقيمِ المتغيّر س

$\bar{\text{ص}}$ الوسطَ الحسابيَّ لقيمِ المتغيّر ص

نشاط ٢

أحسبُ كلاًّ من: $\overline{\text{س}}$ ، $\overline{\text{ص}}$ للبيانات في الجدول الآتي:

س	٣	٦	٨	-٢	٥
ص	٧	١	٠	٦	-٤

$\overline{\text{س}}$ = ... ، $\overline{\text{ص}}$ = ...

أُكملُ الجدولَ الآتيَ:

س	ص	$\text{س}^{٢}$	س ص
٣	٧		٢١
٦	١	٣٦	
٨	٠		
-٢	٦		
٥	-٤	٢٥	-٢٠

أجدُ معادلة خطِّ الانحدار: $\hat{\text{ص}}$ = أس + ب

أحسبُ: قيمةَ أ = ... ، وقيمة ب = ...

معادلة خطِّ الانحدار: $\hat{\text{ص}}$ = ... + ...

نشاط ٣

أرادَ أحدُ مصانعِ الألبانِ دراسةَ العلاقةِ بين نَفَقاتِه على الدعاية، وربْحِه اليوميّ بالدينارِ الأردنيّ، فجمعَ البياناتِ الآتية:

نفقات الدعاية س	٢٠٠	١٥٠	١٧٠	٣٠٠	١٠٠
الربح ص	١٦٠٠	١٣٠٠	١٥٠٠	٢٠٠٠	١٠٠٠

لإيجادِ معادلةِ خطِّ انحدار ص على س: $\hat{ص} = ٲس + ب$، أحسبُ:

$\sum_{ك=١}^{ن} س_ك^٢ = ...$ $\qquad$ $\sum_{ك=١}^{ن} س_ك \, ص_ك = ...$

$\bar{س} = ...$ $\qquad$ $\bar{ص} = ...$

$ٲ = ...$ $\qquad$ $ب = ...$

- معادلةُ خطِّ انحدارِ ص على س هي: ....
- إذا أنفقَ المصنعُ ١٦٠ ديناراً على الدعاية، فسيكونُ ربْحُه:

$\hat{ص} = ٲس + ب$

$= ......\times ١٦٠ + ... = ...$ ديناراً.

أتعلّمُ: يُمكنُ استخدامُ معادلةِ الانحدارِ في حسابِ قيمِ ص إذا عُلِمتْ قيمُ س.

تمارين ومسائل:

١) أرسمُ شكلَ الانتشارِ، وأرسمُ الخطَّ المستقيمَ، الذي يقعُ عليه أكبرُ عددٍ من النّقاطِ للبياناتِ، في الجدولِ الآتي:

س	١	٣	٥	٣	٢	١
ص	٣	٧	٦	٧	٥	٧

٢) يُمثِّلُ الجدولُ الآتي عددَ ساعاتِ الدراسةِ اليوميّةِ، ومعدّلَ الثانويّةِ العامّةِ، لدى مجموعةٍ من الطلبة:

عدد ساعات الدراسة س	٢	٤	٦	٥	٣
معدل الثانوية العامة ص	٦٠	٧٠	٨٠	٧٠	٧٠

- أجدُ معادلةَ خطِّ انحدارِ ص على س.
- إذا درس طالب ٨ ساعات يومياً، فكم تتوقع المعدل الذي سيحصل عليه؟

٣) إذا كانت معادلةُ خطِّ الانحدارِ بين متغيريْن هي $\hat{ص}$ = أس + ب ، وكان معاملُ ارتباطِ بيرسون بينهما يساوي ر ، أجدُ العلاقة بين أ و ر .

(٤ - ٤) مبدأُ العدّ (Counting Principle)

نشاط ١

يعاني الشعبُ الفلسطينيُّ من إجراءاتِ الاحتلالِ أثناء السفرِ والتنقُّلِ بين المدن الفِلسطينيّةِ، سواء كانت حواجزَ، أو إغلاقَ طُرقٍ، أو غير ذلك من المضايقات اليوميّة.

فإذا أرادَ عليٌّ أنْ يسافرَ من الخليلِ إلى رام الله مروراً بالقدس، علماً أنّ بإمكانِه أنْ يسافرَ من الخليل إلى القدس بإحدى ثلاثِ وسائلِ نقلٍ هي: حافلة، سيارة أجرة، سيّارة خاصة، ومن القدس إلى رام الله بإحدى وسيلتيْن هما: الحافلة، أو سيّارة الأجرة.

- يُمكنُ لعليٍّ السفرُ من الخليل إلى القدس بالحافلة، أو .... ، أو .....
- عددُ الطُّرُقِ التي يُمكنُ أنْ يسافرَ بها = ...
- يمكنُهُ السفرُ من القدس إلى رام الله بواسطة ...... ، أو .... ، عدد الطُّرقِ = ...
- عددُ الطُّرقِ التي يُمكنُ لعليٍّ أنْ يسافرَ بها من الخليل إلى رام الله مروراً بالقدس
  =.......×.......=...........

مبدأ العدِّ الأساسيّ:

إذا أمكننا إجراءُ عمليّةً ما على خطواتٍ عددُها ك، بحيث تتمُّ الأولى بطرقٍ عددها $\text{ن}_{١}$، وتتمُّ الثانية بطُرُقٍ عددها $\text{ن}_{٢}$، وهكذا حتى الخطوةِ الأخيرةِ التي تتمُّ بطرقٍ عددها $\text{ن}_{\text{ك}}$، فإنّ عددَ الطُّرقِ الكليّةِ التي تتمُّ بها هذه العملية هي: $\text{ن}_{١} \times \text{ن}_{٢} \times \text{ن}_{٣} \times \ldots \times \text{ن}_{\text{ك}}$.

نشاط ٢

يُرادُ تكوينُ مجلسِ إدارةٍ لشركةٍ ما، مكوَّنٍ من رئيسٍ، ونائبِ رئيسٍ، وأمينٍ للصندوقِ، بكم طريقةٍ يمكنُ تكوينُ هذا المجلسِ، إذا كان عددُ الأشخاصِ المرشّحين ٥ ؟

لاختيار الرئيسِ، هناك ٥ طرقٍ مختلفة.

لاختيار نائبِ الرئيس، هناك .... طرقٍ مختلفة، لماذا ؟

لاختيار أمينِ الصندوق، هناك .... طرقٍ مختلفة.

عدد الطرق المختلفة لتكوين المجلس= ... × ... × ٣ =... طريقة مختلفة.

نشاط ٣

كم عدداً مكوّناً من منزلتيْن، يمكنُ تكوينُه من مجموعة الأرقام: { ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ } ؟

أ) إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

تتمُّ العمليّةُ في مرحلتين: المرحلةُ الأولى اختيارُ منزلةِ الآحاد، وتتمُّ بـ ... طُرُق، واختيارُ منزلةِ العشراتِ، وتتمُّ أيضا بـ ... طرق. إذن عددُ الطرقِ الكليّة = ... × ... = ١٦ طريقةً.

ب) إذا لم يُسمَحْ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

عددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ الآحادِ... طرق، وعددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ العشرات ... طرق.

عدد الطرق المختلفة = ... × ... = ١٢ طريقةً، أيّ أنّ: عدد الأعداد المختلفة ١٢ عدداً.

مضروبُ العدد:

بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ لخمسةِ أشخاصٍ أن يجلسوا في خمسةِ أماكنَ في خطٍّ مستقيم؟

حسب مبدأ العدّ: عدد الطرق المختلفة هي ٥ × ... × ... × ... × ... = ١٢٠ طريقةً مختلفةً.

اصطُلِحَ على كتابة حاصلِ الضرب ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ على الصورة ٥! ، وتُقرَأُ مضروب العدد ٥.

تعريف:

إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً، فإنّ مضروبَ العدد ن ، ويُرمَزُ له بالرمز ن!

حيث: ن! = ن(ن − ١)(ن − ٢) .... ٣ × ٢ × ١

٠! = ١

نشاط ٤

أحسبُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ...

ب) ٥! / ٣! = (٥ × ٤ × ٣!) / ٣! = ... = ٢٠

جـ) ٨! / (٥! ٣!) = (٨ × ٧ × ٦ × ٥!) / (٥! × ٣ × ٢ ×١) = ...

نشاط ٥

أكتبُ ن! / (ن − ٢)! في أبسط صورة.

ن! / (ن − ٢)! = ن(ن − ١)(ن − ٢)! / (ن − ٢)! = ...

قيمةُ المقدارِ، عندما ن = ٥ تساوي ....

تمارين ومسائل:

١) يقدِّمُ أحدُ المطاعمِ في مدينةِ نابُلْسَ ٣ أنواعٍ من اللّحوم، و ٤ أنواعٍ من الحَلْوى، ونوعيْن من المشروبات. بكم طريقةٍ يمكنُ لأحدِ مرتادي المطعم اختيارَ وجبةٍ مكوّنةٍ من نوعٍ من اللّحومِ، ونوعٍ من الحَلْوى، ومشروبٍ؟

٢) أُلقِيتْ قطعةُ نقدٍ ٣ مرات، فما عددُ النتائجِ الممْكِنةِ؟ أكتبُ النتائجَ في مجموعة.

٣) كم عدداً مؤلّفاً من ثلاث منازل، يمكنُ تكوينُهُ من مجموعة الأرقام: { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }؟

أ) إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ب) إذا لم يُسمحْ بتكرار الرقمِ في أكثر من منزلة.

٤) أحسبُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي :

أ) $٨! - ٤!$ ب) $\frac{٧! \times ١٠!}{٩! \times ٥!}$

٥) أكتبُ المقدار: $\frac{(\text{ن} + ١)!}{(\text{ن} - ١)!}$ ، حيث ن ≥ ١، بأبسط صورة.

٦) بكم طريقةٍ يمكنُ لستةِ أشخاصٍ الجلوسُ على ٨ كراسي، في خطٍّ مستقيم.

٧) إذا كان ن! = ٥٠٤٠ ، فما قيمةُ ن ؟

٨) كم عدداً زوجيّاً يمكنُ تكوينُه من ثلاثِ منازلَ ، من ضمن الأرقام: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة ؟

(٤ - ٥) التباديل (Permutations)

نشاط ١

لقد خطَتِ الرياضةُ الفِلسطينيّةُ في السنوات الأخيرة خُطُواتٍ واسعةٍ، ولعلّ أبرزَ دليلٍ على ذلك تأهُّلُ منتخَبِ فلسطينَ في كُرةِ السلة لكأسِ أُمَمِ آسيا، في العام ٢٠١٥.

فإذا أرادَ المنتخبُ الوقوفَ على خطٍّ مستقيمٍ، لأخذِ صورةٍ تذكارية، فإنّ عددَ الطرقِ الكليّةِ للفريق لأخذ الصورة هي: ٥ × ... × ... × ... × ... = ...

أتعلّمُ: عددُ الطرقِ المختلفةِ التي يمكنُ للفريقِ أنّ يقفَ فيها، لأخذِ الصورةِ، هي عددُ الترتيباتِ المختلفةِ للاعبين، وهو ما يُسمّى التباديل.

تعريف:

عددُ تباديل ن من العناصر مأخوذةٌ جميعاً في كل مرة، هو ن! ، ويُرمَزُ له بالرّمزِ ل(ن،ن)، حيث ن $\in$ ص$^+$

ل(ن،ن) = ن! = ن(ن − ١)(ن − ٢) × .... × ٣ × ٢ × ١

نشاط ٢

أجدُ قيمةَ: ل(٦،٦).

ل(٦،٦) = ٦ × ... × ... × ... × ... × ١ =٧٢٠

ل(٥،٥) = ...   ماذا نلاحظ؟

نشاط ٣

أجدُ عددَ الأعداد المكوّنةِ من منزلتيْن، التي يمكنُ تكوينُها من مجموعة الأرقام: { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } ، إذا لم يُسمحْ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ألاحظُ أنَّ المطلوبَ هو عددُ الترتيباتِ الثنائيّةِ لمجموعةِ الأرقامِ هذه، بشرط عدم التكرار، ويساوي ....×....=....

وهذا ما يُسمَّى التباديلَ الثنائيّةَ لمجموعةٍ فيها ٥ عناصر، وبشكلٍ عام، فإنّ عددَ التباديلِ الرائيّةِ لمجموعةٍ مكوّنةٍ من (ن) من العناصر، ويُرمَزُ له بالرمز ل(ن ، ر)،

يساوي $\frac{ن!}{(ن - ر)!}$ حيث ن ، ر عددان طبيعيّان، ن ≥ ر

نشاط ٤

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ل(٥ ، ٣) = $\frac{٥!}{(٥ - ٣)!}$ = ...

ب) ل(ن ، ٣) = $\frac{ن!}{(ن - ٣)!}$ = ... = ...

أتعلمُ: يمكنُ كتابةُ ل(ن،ر) على الشكل: ن(ن−١)(ن−٢)(ن−٣)...(ن−ر+١).

نشاط ٥

أتحقّقُ ممّا يأتي:

أ) ل(ن ، ١) = $\frac{ن!}{(ن - ١)!}$ = ... = ن

ب) ل(ن ،٠) = ... = ١

جـ) ل(ن ، ن) = ... = ن!

نشاط ٦

بكم طريقةٍ يمكنُ تشكيلُ لجنةٍ مكوّنةٍ من رئيسٍ، ونائبِ رئيسٍ، وأمينِ سرٍّ من بين سبعة أشخاص ؟

عددُ الطرقِ التي يمكنُ تشكيلُ اللجنةِ بها هي:

ل(٧ ، ٣) = ... × ... × ... = ٢١٠ طرقٍ مختلفة.

تمارين ومسائل:

١) أحسبُ قيمةَ ما يأتي:

أ) ل(٦،٤) ب) $\frac{\text{ل}(٩،٢)}{\text{ل}(٩٠،٠)}$

٢) أرادَ أحمدُ وإخوانُه الثلاثةُ الذهابَ إلى المسجدِ الأقصى، واتفقوا على أنْ يدخلَ كلٌّ منهم من بابٍ مختلفٍ من أبوابِ القدسِ السبعةِ. بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ للإخوةِ الأربعةِ الوصولُ إلى المسجد الأقصى؟

٣) أجدُ قيمةَ ن في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ل(ن ، ٢) = ٥٦

ب) ل(ن ، ٣) = ٢١٠

جـ) ل(ن − ٣ ، ٢) = ٦

٤) دُعِيَ خمسةُ رجالٍ وزوجاتُهم الخمسُ لحضور حفلِ تخرُّجِ طلبةِ الثانويةِ العامةِ، في القرية التي يسكنون فيها، بكم طريقةٍ يمكنُ لهم أن يجلسوا على ١٠ كراسي، في خطٍّ مستقيم، بحيث يجلسُ الرجالُ متجاورين، والزوجات متجاورات ؟

٥) إذا كان ل(ن،ر) = ١٢٠، أجدُ قيمَ ن،ر الممكِنةَ. كم حلًّا للسؤال ؟

(٤ - ٦) التوافيق (Combinations)

نشاط ١

تكثُرُ المعالمُ الأثريّةُ في فلسطينَ، مثل سبَسْطيةَ في نابُلْسَ، وقصرِ هشامٍ في أريحا، أقدمِ مدينةٍ في العالم.

ذهب خمسةُ أصدقاءَ: محمدٌ، ويزنٌ، وخالدٌ، وخليلٌ، وعلاءٌ، من الصفِّ العاشر في رحلة إلى منطقة سبسطيةَ الأثريةَ، وفي موعدِ الغداء اتفقوا على اختيار ثلاثةٍ منهم لإعداد الطعام للجميع، فاقترحَ أحدُهم أنْ يلجأوا إلى القُرعة، وذلك بعد تقسيم المجموعة إلى مجموعات ثلاثيّة مثل: {محمد، يزن، خالد}، {محمد، يزن، خليل}.

- أكملْ باقي المجموعات.....
- هل يمكنُ أنْ تكونَ إحدى المجموعات: يزن، خالد ، محمّد ؟ لماذا ؟
- عدد المجموعات التي يمكنُ تكوينُها.......... مجموعة.

تعريف:

عدد التوافيق الرائيّةِ لمجموعة فيها ن من العناصر، ويُرمزُ له بالرّمز:

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ل(ن،ر)}{ر!} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\ ر!} \text{ ، } ن \geq ر$$

نشاط ٢

لدى معرضِ سيّاراتٍ ٦ أنواعٍ من السيارات، يريدُ صاحبُ المعرضِ اختيارَ ٤ منها، لعرضها للزبائن.

أجدُ عددَ الطرقِ التي يمكنُ بها الاختيار.

بما أنّ إعادة الترتيب لا تعطي نتيجة جديدة، أي أنّ الترتيبَ غيرُ مهم.

إذن: عددُ الطرق يساوي = $\binom{٦}{٤} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤!}{٢!٤!} = ...$

نشاط ٣

أحسبُ كلًّا ممّا يأتي:

أ) $\binom{٨}{٤} = \frac{٨!}{٤!٤!} = ...$

ب) $\binom{٦}{١} = ... = ٦$

جـ) $\binom{٥٢}{٠} = ... = ١$

د) $\binom{٢٥}{٢٥} = ...$

نشاط ٤

أستنتجُ القواعدَ الآتية :

أ) $\binom{ن}{٠} = \frac{ن!}{(ن - ٠)!٠!} = ... = ١$

ب) $\binom{ن}{ن} = ... = ١$

جـ) $\binom{ن}{١} = ... = ن$

د) $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن - ر}$

تمارين ومسائل:

١) أحسبُ ما يأتي:

أ) $\binom{٩}{٥}$ ب) $\binom{٩}{٤}$ جـ) $\binom{٧٥}{١}$

٢) أجدُ قيمَ ن في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ) $\binom{ن}{٢} = ٣$ ب) $\binom{ن}{٩} = \binom{ن}{٤}$

٣) بكم طريقةٍ يمكنُ تكوينُ فريقٍ لكرةِ السّلةِ، يتمُّ اختيارُه من بين ثمانية لاعبين ؟

٤) صفٌّ مكوّنٌ من ٩ طلابٍ، و٧ طالباتٍ، يُرادُ تشكيلُ لجنةٍ مكوّنةٍ من ٣ طلابٍ، و٤ طالباتٍ، بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ تشكيلُ اللجنة ؟

(٤ - ٧): تمارين عامّة

السؤال الأول

أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

(١) أيُّ القيم الآتية لا يمكنُ أنْ تمثِّلَ معاملَ ارتباط بيرسون الخطيّ بين متغيّريْن؟

أ) صفر　　　ب) ١　　　جـ) -١　　　د) -١,١

(٢) أيُّ من القيمِ الآتية تساوي ل(ن ، ٢)؟

أ) ٣٠　　　ب) ٢٧　　　جـ) ٢٥　　　د) ٢٤

(٣) إذا كان ن! = ٦ فما قيمة ل(٣ن،٢) ؟

أ) ١٨　　　ب) ٢٧　　　جـ) ٥٤　　　د) ٧٢

(٤) ما قيمةُ: $\binom{٦}{٣} - \binom{٤}{٢}$ ؟

أ) ٢٠　　　ب) ١٤　　　جـ) ٥　　　د) ٢

السؤال الثاني

أرسمُ شكلَ الانتشار للبيانات الآتية، وأُبيّنُ نوع الارتباط بين س، ص :

س	٢	٤	٦	٨	١٠
ص	٢٠	١٨	١٥	١٢	١٠

السؤال الثالث

أحسبُ معاملَ ارتباطِ بيرسون للبيانات في الجدول الآتي:

س	-١٠	-٥	صفر	٥	٢٠
ص	٢	٨	١٠	١٥	٢٠

السؤال الرابع

اعتماداً على البيانات في الجدول الآتي، أجدُ معادلةَ خطِّ انحدار ص على س :

س	٣	٥	٧	٩	١١	٧
ص	٨	١٠	٧	١١	١٢	٦

السؤال الخامس

كم عدداً مكوّناً من ٣ منازل، وأصغر من ٣٠٠، يمكنُ تكوينُهُ من الأرقام: ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة؟

السؤال السادس

ما عددُ النواتجِ المُمكنةِ لتجربةِ رَمْيِ حجرِ النّردِ ٣ مرّاتٍ؟

السؤال السابع

أحلُّ المعادلات الآتية :

أ) $٥\,\text{ن}! = ٣٦٠٠$

ب) $٣٠\,\text{ن}! = (\text{ن} + ٢)!$

السؤال الثامن

إذا كان $\frac{٥}{(\text{ن} - ١)!} + \frac{٣}{(\text{ن} - ٢)!} = \frac{٢٠٨}{\text{ن}!}$ ، أجدُ قيمةَ ن.

السؤال التاسع

أُعبِّرُ عن كلٍّ ممّا يأتي بالصورة ل(ن، ر) :

أ) $٩ \times ٨ \times ٥ \times ٦ \times ٧$

ب) ٢٥٢٠

ج) $\text{ن}(\text{ن}^{٢} - ٣\text{ن} + ٢)$

السؤال العاشر

أ ، ب ، ج ، د أربعُ نقاطٍ في المستوى، لا تقع أيّةُ ثلاثٍ منها على استقامة واحدة. كم قطعةً مستقيمةَ يمكنُ رسمُها بين أي نقطتين من هذه النقاط ؟

السؤال الحادي عشر

يريدُ طلبةُ الصفّ العاشرِ البالغ عددُهم ١٥ طالباً في إحدى المدارس الفلسطينيّةِ اختيارَ لجنةٍ مكوّنةٍ من ٣ أشخاص لتمثيلهم أمام إدارة المدرسة:

أ) بكم طريقةٍ يمكنُ اختيارُ اللجنة.

ب) بكم طريقة يمكن اختيارها إذا تكوّنت من: رئيسٍ، وأمينِ سرٍّ، وعضوٍ ؟

أُقيّمُ ذاتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	دون المتوسط
ايجاد معامل الارتباط			
استخدام مبدا العد والتباديل والتوافيق في حل مشكلات حياتية			

فكرةٌ رياديّة:

فكر مجموعة من طلبة الصف العاشر تقديم المساعدة لأسرة فقيرة في القرية، عن طريق تصميم وتنفيذ مشروع صغير يعود بمردود مادي، وهو إنشاء مزرعة دجاج بياض بعدد (١٠٠٠) دجاجة.

بالرجوع الى وزارة الزراعة أو أحد الخبراء في تربية الدواجن، احصل على معلومات حول عمر الدجاجة وعدد البيض المنتج.

أكتب المعادلات اللازمة لوصف العلاقة بين عمر الدجاجة وعدد إنتاجها من البيض. ادرس هذه الفكرة من حيث النجاحات والمخاطر، ثم قدر الأرباح المتوقعة بعد عام من تنفيذ المشروع.

روابط أو برامج الكترونية:

atorwww.NLVM
Microsoft Mathmatics

المشروع

المشروع: شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع.
ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

ميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينفّذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفّر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومترابطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلّب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطّط له مسبقاً.

ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخّل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.
٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.
٣. تحديد خطوات سير المشروع.
٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، **(شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار و إبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).**
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلّي.

ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلّاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلّم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. **الأهداف** التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.

٢. **الخطة** من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحّدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.

٣. **الأنشطة** التي قام بها الطلبة من حيث، تنوّعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.

٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التى استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

المراجع

الجنابي، احمد نصيف (1980):، الرياضيات عند العرب ، منشورات دار الجاحظ للنشر، الجمهورية العراقية

الزغلول، عماد (2005)، الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.

فريدريك بل (1986):طرق تدريس الرياضيات:الجزء الثاني؛ (ترجمة محمد المفتي و ممدوح سليمان). قبرص:الدار العربية للنشر والتوزي

اللحام ، أنور (1990): الجبر ، ط4 ، مطبعة دار الكتاب ، دمشق

ريتش، بارنيت (2004) : الجبر الأساسي، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية –القاهرة- مصر

نورة ،دهبي (2008): الرياضيات ، دار الصفاء للنشر و التوزيع- عمان-الأردن

رمضان صبرا، أحمد عثمان، غريب موسى، روز زريقات (1997): الرياضيات العامة، دارالمناهج للنشر و التوزيع - عمان - الأردن

Kline, M,(1972): Mathematics Thought From Ancient to Modern Times, Oxford, N.Y

Lamborg.James(2005):Math reference,Wiley ,N.Y

Bell,E,T(1937): ,Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Friel,Suzan.Rashlin,Sid.Doyle,Dot.& others(2001): Navigating through Algebra in Grades 6-8. NCTM. RESTON, VIRGINIA .

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume1

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume2

لجنة المناهج الوزارية

د. صبري صيدم	**د. بصري صالح**	**م. فواز مجاهد**
أ. ثروت زيد	**أ. عزام ابو بكر**	**أ. علي مناصرة**
د. شهناز الفار	**د. سمية النخالة**	**م. جهاد دريدي**

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد صالح (منسقًا)	د. معين جبر	د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي	د. عادل فوارعة	أ. وهيب جبر	د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني	د.سعيد عساف	د. محمد مطر	د. علا الخليلي
د. شهناز الفار	د. علي نصار	د. أيمن الأشقر	أ. ارواح كرم
أ. حنان أبو سكران	أ. كوثر عطية	د. وجيه ضاهر	أ. فتحي أبو عودة
أ. عبد الكريم صالح	أ. أحلام صلاح	أ. نادية جبر	أ. نشأت قاسم
أ. نسرين دويكات	د. سمية النخالة	أ. احمد سياعرة	أ. قيس شبانة
أ. مبارك مبارك			

المشاركون في ورشات عمل الجزء الثاني من كتاب الرياضيات للصف العاشر

أ. إياد دويكات	أ. آنية رضوان	أ. دعاء شتية	أ. مها غانم	أ. هيا رواشدة
أ. رفيق الصيفي	أ. صلاح الترك	أ. خالد العلامي	أ. سهيل شبير	أ. باسم المدهون
أ. وفاء موسى	أ. ابتسام اسليم	أ. عارف السعافين	أ. شذى جبران	أ. ريم العويصات
أ. عهود طه	أ. خلود كايد	أ. رأفت عامر	أ. معزوز ضبابات	أ. محمد فايز
أ. نفين حماد	أ. شادن السعافين			