١١

الجزء الثاني

بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفرع العلمي والصناعي

فريق التأليف:

أ. وهيب جبر (منسقاً)
أ. حسين عرفات
أ. رائد ملاك
أ. عبد الحافظ الخطيب
أ. عريب الزبون

مركز المناهج

أ. قيس شبانة
أ. نسرين دويكات

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين

تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧ / ٢٠١٨م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائـــرة الفنية

إشراف فني	كمال فحماوي

تحكيم علمي	د. محمد نجيب
تحـرير لغوي	أ. عمر عبد الرحمن
قراءة	سهيلة بدر
متابعة المحافظات الجنوبية	د. سمية النّخالة

الطبعة الثانية

٢٠١٩ م/ ١٤٤٠ هـ

دولــة فلسطين

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

mohe.ps | moehe.pna.ps | moehe.gov.ps

.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

+970-2-2983250 فاكس | +970-2-2983280 هاتف

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

تـقـديـم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقررّة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم
مركز المناهج الفلسطينية
كانون أول / ٢٠١٧

مـقـدمـة

تُعد المرحلة الثانوية (١١-١٢) آخر مراحل التعليم المدرسي حيث تشهد أهم التّغيّرات التي يمرّ فيها الطالب وترسُم معالم شخصيته مستقبلاً،وفيها يكتسب المعارف والخبرات الأساسية،وفي الوقت نفسه يتمتع بحياة اجتماعية سليمة ليكون عضواً فاعلاً يواكب المستجدات في المجالات العلمية والتكنولوجية بما يخدم المجتمع.

وتلعب العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة دوراً كبيراً في تمكين الطلبة من المعارف والمهارات والخبرات باكتشاف المعرفة وتوظيفها في حلّ المشكلات الحياتية واتخاذ قرارات ذات علاقة بواقع حياتهم اليومية مما يُسهم في تحسين نوعية التعليم والتعلم وصولاً إلى طلبة باحثين مبدعين ومنتجين.

وتُعدّ الرياضيات من المباحث التي تخاطب عقل الطالب وتنمّي فيه مهارات متنوعة تكسبه القدرة على التعامل المنطقي مع محيطه ومن حوله؛ وبذلك تؤدي إلى تمكين الطالب من اكتساب معارف ومهارات واتجاهات وقيم تساعده في تنمية ذاته ومجتمعه، من خلال معرفته بمحيطه المادي والبشري وبالأنظمة المعرفية المختلفة، وحلّ ما يواجهه من مشكلات دراسية وعلمية في حاضره ومستقبله.

وقد تضمّن هذا الكتاب أنشطة منظمة للمفاهيم والمعارف التي تُحاكي السياقات الحياتية الواقعية وتمكنها ضمن أنشطة معروضة بسياقات حياتية واقعية، تُحاكي البيئة الفلسطينية وخصوصيتها وتركّز على التّعلم النشط مُراعية لقدرات الطلبة وحاجاتهم، إذ تتاح أمامهم الفرص لتبادل الخبرات من خلال المناقشة والحوار والعمل الجماعي وبالإفادة من وسائل تكنولوجية لتوظيفها في البحث عن المعلومات وتوظيفها بما يحقق التّعلم الفعّال.

يتكوّن هذا الكتاب من أربع وحدات دراسية، تناولت الوحدة الرابعة الاحتمالات والإحصاء ضمن أنشطة متعددة، والوحدة الخامسة المتتاليات والمتسلسلات وربطها مع سياقات حياتية ورياضية، والوحدة السادسة القطوع المخروطية، والوحدة السابعة النهايات والاتصال فهما تعميق وتطوير لمعارف الطلبة السابقة.

وأخيراً نتمنى أن نكون قد وُفقنا في إنجاز هذا الكتاب لما فيه خير لأولادنا ولفلسطين العزيزة.

فريق التأليف

المحتويات

الوحدة

٤

الاحتمالات والإحصاء

أناقش العبارة:

التطور التكنولوجي يقلص احتمال الحصول على فرص العمل أم ينقلنا الى عالم وفير بالإمكانات.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاحتمالات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

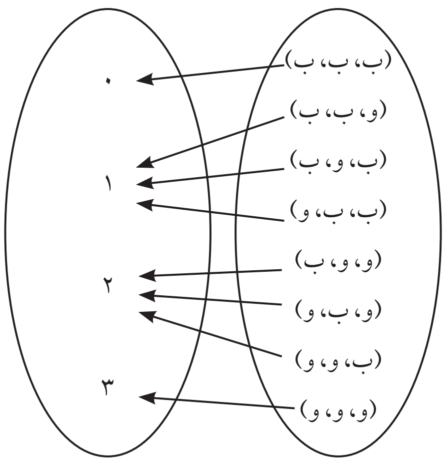
1. التعرف إلى اقتران المتغير العشوائي المنفصل.
2. إيجاد احتمالات قيم المتغير العشوائي، وتكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل.
3. حساب توقع المتغير العشوائي المنفصل.
4. حساب احتمال المتغير العشوائي ذي الحدين، وتوقعه.
5. التعرف إلى العلامة المعيارية، وتحويل العلامة الخام إلى علامة معيارية.
6. التعرف إلى التوزيع الطبيعي، والطبيعي المعياري.
7. حساب المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري.
8. استخدام منحنى التوزيع الطبيعي لحل مشكلات حياتية.

نشاط ١: زارت مديرة أحد المستشفيات الفلسطينية قسم الولادة، وسألت عن عدد الأطفال الذين ولدوا في تلك الليلة، فأجابتها الممرضة المناوبة أن عددهم ثلاثة أطفال.

برأيك كم تتوقع أن يكون عدد الذكور في حالات الولادة تلك؟

أكتب عناصر الفضاء العيني مرتبةً حسب الجنس، وتسلسل الولادة.

إن أي تجربة عشوائية يمكن ربط نتائجها بأعداد حقيقية، وهذا الربط يُنتج اقتراناً يسمى المتغير العشوائي، أي أنه يمكن تكوين اقتران مجاله عناصر الفضاء العيني Ω، ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية، يسمى مثل هذا الاقتران المتغير العشوائي المنفصل، ويمكن توضيحه بالمخطط السهمي كما في الشكل المجاور.



تعريف (المتغير العشوائي المنفصل):

هو اقتران مجاله الفضاء العيني و مداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية القابلة للعد، و يرمز له بإحدى الحروف الهجائية ق ، ك ، ع ، ...

مثال ١ : كيس يحتوي على ٥ بطاقات متماثلة منها ٣ بطاقات حمراء، وبطاقتين بيضاوين، سحبت منه بطاقتان عشوائياً على التوالي دون إرجاع:

١ أكتب الفضاء العينيّ.

٢ إذا دلَّ المتغير العشوائي ق على عدد البطاقات الحمراء المسحوبة. أجد مدى ق.

الحل :

١ إذا رمزنا للبطاقة الحمراء (ح) وللبطاقة البيضاء (ب) فإن:

Ω = { (ح،ح)، (ح،ب)، (ب،ح)، (ب،ب) }

٢ مدى ق = { ٢ ، ١ ، ٠ }

مثال ٢ : إذا كان احتمال أن يصيب خالد هدفاً ما يساوي ٠,٧ ، فإذا رمى خالد على الهدف مرتين، وكان ق يمثل عدد مرات إصابته الهدف:

١ أكتب الفضاء العينيّ.

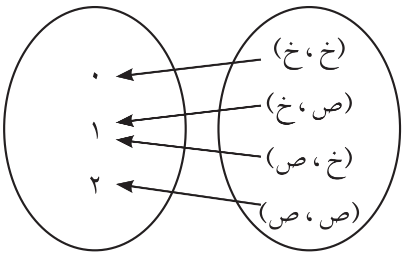
٢ أمثل ق بمخطط سهمي، وأجد مداه.

٣ أحسب احتمال كل عنصر من العناصر التي يأخذها المتغير العشوائي.

الحل :

١ إذا رمزنا إلى أن يصيب خالد الهدف (ص)، ويخطئ الهدف (خ)

Ω = {(ص،ص)، (ص،خ)، (خ،ص)، (خ،خ)}



٢ يمثل ق بالشكل المجاور

مدى ق = { ٠ ، ١ ، ٢ }

٣ ل(٠) = ل{(خ ، خ)}

= ٠,٣ × ٠,٣ = ٠,٠٩ (لماذا؟)

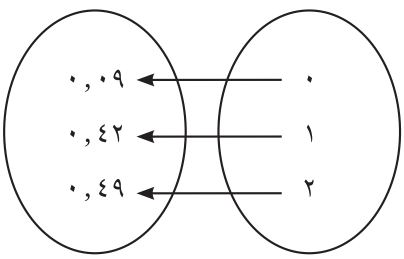
ل(١) = ل{(ص ، خ)} + ل{(خ ، ص)}

= ٢ × ٠,٧ × ٠,٣ = ٠,٤٢ (لماذا؟)

ل(٢) = ل{(ص ، ص)}

= ٠,٧ × ٠,٧ = ٠,٤٩ (لماذا؟)

ألاحظ أنه يمكن ربط كل عنصر من عناصر ق بعدد حقيقي، يمثل احتمال الحادث المرتبط بهذا العنصر، ويمكن توضيح ذلك كما في الشكل المجاور.



تمارين ٤ - ١

١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ في تجربة سحب ٣ أعداد عشوائياً دفعةً واحدةً من مجموعة الأعداد {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} إذا دلَّ المتغير العشوائي ص على أصغر الأعداد المسحوبة فما مدى ص؟

أ) {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ب) {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

جـ) {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} د) {١ ، ٢ ، ٣}

٢ صندوق فيه ٦ بطاقات متجانسة، أربع منها تحمل أعداداً فرديةً، والباقي مرقمة بأعداد زوجية، يسحب طالب بطاقةً تلو الأخرى دون إرجاع، ويتوقف عن السحب عند ظهور أول بطاقة تحمل عدداً فردياً، فما مدى المتغير العشوائي الذي يمثل عدد البطاقات المسحوبة ؟

أ) {١ ، ٢ ، ٣} ب) {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

جـ) {٠ ، ١ ، ٢} د) {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

٢ أكتب مدى المتغير العشوائي لكل من التجارب العشوائية الآتية:

١ في تجربة إلقاء حجريْ نرد منتظمين ومتمايزين مرةً واحدةً، إذا دلَّ المتغير العشوائي على أكبر العددين الظاهرين على الوجه العلوي إذا اختلفا، أو أحدهما إذا تساويا.

٢ في تجربة اختيار عينة عشوائياً من ٥ قطع من إنتاج أحد المصانع، إذا دلَّ المتغير العشوائي على عدد القطع المعيبة في تلك العينة.

٣ في تجربة سحب بطاقتين معاً من كيس يحوي ٥ بطاقات مرقمة ٤ ، ٣ ، ١ ، ٣ ، ٢ ، إذا دلَّ المتغير العشوائي على حاصل ضرب العددين الظاهرين على هاتين البطاقتين.

٤ في تجربة الإجابة عن ١٠ أسئلة من نوع الاختيار من متعدد عشوائياً، إذا دلَّ المتغير العشوائي على عدد الأسئلة التي يجيب عنها الطالب إجابةً صحيحةً.

٤ - ٢ التوزيع الاحتمالي Probability Distribution

نشاط ١: أعلن مركز الإحصاء الفلسطيني في رام الله النتائج الأساسية لمسح القوى العاملة في فلسطين للعام ٢٠١٥م، حيث جاء فيها أن ٢٥,٩٪ من الفلسطينيين يعانون من البطالة بما يقارب ٣٣٦ ألفاً، بواقع ١٩٣ ألفاً في قطاع غزة، و١٤٣ ألفاً في الضفة الغربية، وأوضح جهاز الإحصاء المركزي الفلسطيني أن نسبة البطالة في الضفة الغربية تبلغ حوالي ١٧,٣٪ بينما ترتفع إلى ٤١٪ في قطاع غزة، أما على مستوى الجنس، فقد بلغ المعدل ٢٢,٥٪ للذكور، مقابل ٣٩,٢٪ للإناث خلال العام نفسه.

أ) بناءً على الدراسة السابقة، ومن وجهة نظرك، ما الأسباب التي جعلت نسبة البطالة في قطاع غزة أكبر منها في الضفة الغربية؟

ب) اختيرت عينة من ثلاثة أشخاص فلسطينيين، ووجّه لكل واحد السؤال الآتي: هل أنت تعمل؟ أم أنك عاطل عن العمل؟ فإن الفضاء العيني لهذه التجربة = ...

جـ)
١) إذا دلَّ المتغير العشوائي (س) على عدد العاطلين عن العمل في هذه العينة، فإن مدى س = ...
٢) أحسب ل(ع،ع،ع) الذي يعني احتمال أن يكون الأشخاص الثلاثة في العينة عاطلين عن العمل.
٣) أحسب ل(٢) الذي يعني احتمال أن يكون في العينة المختارة شخصان عاطلان عن العمل.

تعريف التوزيع الاحتمالي: إذا كان ق متغيراً عشوائياً منفصلاً مداه {س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، ... ، س$_ن$}
فإن التوزيع الاحتمالي: هو اقتران مجاله مجموعة قيم المتغير العشوائي، ومداه مجموعة احتمالات الحوادث المرتبطة بمجموعة قيم المتغير العشوائي.
يسمى هذا الاقتران اقتران كثافة احتمالية ويرمز له بالرمز ل(س).

ويكتب التوزيع الاحتمالي على صورة مجموعة من الأزواج المرتبة:

{(س$_١$ ، ل(س$_١$)) ، (س$_٢$ ، ل(س$_٢$)) ، ... ، (س$_ن$ ، ل(س$_ن$))}

أو على صورة جدول، يسمى جدول التوزيع الاحتمالي:

س$_ر$	س$_١$	س$_٢$	....	س$_ن$
ل(س$_ر$)	ل(س$_١$)	ل(س$_٢$)	....	ل(س$_ن$)

مثال ١ : يلعب سامر اللعبة الآتية: يرمي حجر نرد منتظم مرتين متتاليين، ويلاحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة، فإذا ظهر عددان متساويان يكسب ١٠ نقاط، وإذا ظهر عددان مجموعهما ١١ يكسب ٥ نقاط وخلاف ذلك يخسر ٤ نقاط.

فإذا دلَّ المتغير العشوائي ع على عدد النقاط التي يكسبها سامر:

١ أكتب مدى المتغير العشوائي ع

٢ أكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير ع

٣ أكون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير ع

الحل :

١ مدى ع = { ١٠ ، ٥ ، –٤ }

ل(١٠) = $\frac{٦}{٣٦}$ ، ل (٥) = $\frac{٢}{٣٦}$ ، ل (–٤) = $\frac{٢٨}{٣٦}$ (لماذا؟)

٢ التوزيع الاحتمالي = { (١٠، $\frac{٦}{٣٦}$) ، (٥ ، $\frac{٢}{٣٦}$) ، (–٤ ، $\frac{٢٨}{٣٦}$) }

٣ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع

$س_ر$	١٠	٥	–٤
ل($س_ر$)	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٢٨}{٣٦}$

أتعلم:

١) ٠ ≤ ل($س_ر$) ≤ ١ ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن

٢) $\sum_{ر=١}^{ن}$ ل($س_ر$) = ١ حيث ن عدد قيم $س_ر$

مثال ٢ : إذا كان ق متغيراً عشوائياً منفصلاً توزيعه الاحتمالي:

{ (٤ ، ٠,٢)، (٨ ، س) ، (١٢ ، ٣س) } أجد قيمة س

الحل : $\sum_{ر=١}^{٣}$ ل($س_ر$) = ١ ، ٠,٢ + س + ٣س =١

ومنها س = ٠,٢

نشاط ٢: سيلعب المنتخب الوطني الفلسطيني لكرة القدم مباراة، وتشجيعاً للاعبين سيتم مكافأة كل لاعب بمنحة مالية مقدارها ٥٠٠ دينار في حالة الفوز، أو ٢٠٠ دينار في حالة التعادل ، أما في حالة الخسارة لن يحصل اللاعب على شيء، فإذا كان احتمال التعادل يساوي ٠,١ وكان احتمال الفوز مثليْ احتمال الخسارة.

أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق الذي يمثل قيمة المنحة التي سيحصل عليها اللاعب.

إذا رمزنا للفوز بالرمز ف، و للتعادل بالرمز ع، و للخسارة بالرمز خ

فإن Ω = {ف ، ع ، خ}

باستطاعتي إكمال جدول التوزيع الاحتمالي المطلوب:

قيم س	صفر	٢٠٠	٥٠٠
ل(س)	.....	.....	٢أ

أتأكد أن قيمة أ = ٠,٣

تمارين ومسائل ٤ - ٢

١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ متغير عشوائي مداه أ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } و توزيعه الاحتمالي هو:

{ (س، م س) : س ∈ أ، م ∈ ح } ، ما قيمة م ؟

أ) ٠,١ ب) ٠,٢ جـ) ٠,٣ د) ٠,٤

٢ أي من الآتي **لا يمثل** جدول توزيع احتمالي؟

أ)

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

ب)

س	٠	١	٢
ل(س)	٠,٠٥	٠,٨	٠,١٥

جـ)

س	٠	١	٢
ل(س)	٠,٣	٠,٤	٠,٣

د)

س	٠	١	٢
ل(س)	٠	١,٥	−٠,٥

٣ إذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي = { (٢ ، ٠,٤) ، (٣ ، ب) ، (٤ ، ٢ب)} ، فما قيمة ب؟

أ) ٠,١ ب) ٠,٢ جـ) ٠,٤ د) ٠,٦

٢ زرع شخص ٣ بذور من نوع واحد، فإذا كان احتمال إنبات البذرة الواحدة يساوي $\frac{٢}{٣}$ ، و كان المتغير العشوائي ق يمثل عدد البذور النابتة.

أ) أكتب مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي ق.

ب) أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق.

٣ صندوق فيه ٣ كرات حمراء، وَ ٥ كرات بيضاء متجانسة، قام ماجد بسحب عدد من الكرات على التوالي دون إرجاع، على أن يتوقف عن السحب عند ظهور أول كرة بيضاء. فإذا كان المتغير العشوائي ع يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة، أكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع .

٤ - ٣ التوقع Expectation

نشاط ١: ضمن مشروع تخضير المدارس في محافظة سلفيت، وقعت وزارة التربية والتعليم العالي ووزارة الزراعة الفلسطينيتين اتفاقية في العام ٢٠١٧م يقتضي بموجبها أن تقوم وزارة الزراعة بتزويد مدارس المحافظة بثلاثة آلاف شتلة حرجية، وبالفعل تم تنفيذ الاتفاقية، حيث تسلمت المدارس الأشتال، وتم زراعتها في حدائق المدارس ومحيطها.

إذا اخترت عينة عشوائية من مئة شتلة من هذه الأشتال، باعتقادك كم شتلة منها ستنمو؟

وهل تستطيع إيجاد عدد الأشتال التي ستنمو من الثلاثة آلاف شتلة التي زرعت؟

لا شك أننا بحاجة إلى معرفة قيمة احتمال نمو الشتلة الواحدة؛ لنتمكن من حساب توقع عدد الأشتال التي ستنمو؟

وللإجابة عن هذا السؤال بدقة سنناقش مفهوم التوقع.

تعريف: **إذا كان ق متغيراً عشوائياً منفصلاً مداه {$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_ن$}**

فإن توقع المتغير العشوائي ق هو: $ت(ق) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \times ل(س_ر)$

أتعلم: **يمثل التوقع الوسط الحسابي للقيم التي يأخذها المتغير العشوائي، مع الأخذ بعين الاعتبار احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي، إذا كررت التجربة عدد كبير من المرات.**

مثال ١: يربح بائع مرطبات ١٠ دنانير في اليوم الحارّ، وَ ٦ دنانير في اليوم المعتدل، ويخسر ديناراً واحداً في اليوم البارد. فإذا كان احتمال أن يكون الجو حارّاً في أحد الأيام يساوي ٠,٥ واحتمال أن يكون معتدلاً ٠,٣، اخترنا أحد الأيام عشوائياً، ودل المتغير العشوائي ق على المبلغ الذي يكسبه البائع في اليوم الواحد. أحسب توقع ق.

الحل: س = {١٠ ، ٦ ، -١} ، ل (-١) = ٠,٢ (لماذا)؟

$س_ر$	١٠	٦	-١
$ل(س_ر)$	٠,٥	٠,٣	٠,٢

$$ت(ق) = \sum_{ر=١}^{٣} س_ر \times ل(س_ر)$$

$$= ١٠ \times ٠,٥ + ٦ \times ٠,٣ + -١ \times ٠,٢ = ٦,٦ \text{ ديناراً}$$

وبطريقة أخرى:

عند قيام البائع بالعمل لمدة ١٠ أيام، فإنه سيكسب ١٠ دنانير يومياً على مدار ٥ أيام، وسيكسب ٦ دنانير يومياً على مدار٣ أيام، و سيخسر ديناراً يومياً في كل من الأيام المتبقية.

وسيكون الوسط الحسابي لمكسب هذا البائع $= \frac{١٠ \times ٥ + ٦ \times ٣ + -١ \times ٢}{١٠} = ٦,٦$ ديناراً

ماذا ألاحظ في كل من الطريقتين؟

نشاط ٢: اتفق شخص مع صديقه على أن يسحب أحدهما كرتيْن على التوالي دون إرجاع من صندوق فيه كرة واحدة حمراء و٧ كرات بيضاء. فإذا دلّ المتغير العشوائي ق على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، أحسب توقع ق.

Ω = {(ب،ب)، (ح، ب)، (ب،ح)}

∴ مدى المتغير العشوائي = ...

ألاحظ أن ل(٠) = ل(ب ، ب)= $\frac{٤٢}{٥٦}$ ... (لماذا؟)

أكمل تعبئة جدول التوزيع الاحتمالي اللاحق:

$س_ر$	٠	١
$ل(س_ر)$		

$$∴ ت(ق) = \sum_{ر=١}^{٢} س_ر \times ل(س_ر) = \frac{١٤}{٥٦}$$ (لماذا؟)

أتعلم: إذا كان ق ، ك متغيرين عشوائيين معرفين على الفراغ العيني Ω فإن :

ت(ب) = ب حيث ب $\in$ ح

ت(أق ± ب) = أ ت(ق) ± ب حيث أ ، ب $\in$ ح

ت(ق ± ك) = ت(ق) ± ت(ك)

مثال ٢ : إذا كان ق ، ع متغيرين عشوائيين في فراغ عيني و كان ت(ق) = ٧ ، ت(ع) = ٤ أجد:

١ ت(٣ ق + ٤)

٢ ت(٣ع – ق – ١)

الحل :

١ ت(٣ ق + ٤) = ٣ ت(ق) + ٤ = ٢٥

٢ ت(٣ع – ق – ١) = ٣ت(ع) –ت (ق) – ١ = ٤

تمارين ومسائل ٤ – ٣

١ في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين ومتمايزين، إذا دل المتغير العشوائي ق على الفرق المطلق بين العددين الظاهرين على الوجهين العلويين، أكتب التوزيع الاحتمالي ثم أجد التوقع.

٢ إذا كان ق متغيراً عشوائياً مداه مجموعة قيم س = {–٢ ، ٣ ، ٤ }

وكان ل (س = ٣) = ١ , ٠ ، ت(ق) = ٥ , ١ ، أجد ل (س = ٤)

٣ مدير مستشفى لا يسمح بإعطاء إجازة لأكثر من ثلاث ممرضات في يوم العمل الواحد، فإذا كان احتمال أن يكون عدد الممرضات اللواتي في إجازة في أي يوم هو ل(س) = $\frac{أ}{س + ١}$ حيث س عدد الممرضات اللواتي في إجازة:

١ ما قيمة أ ؟

٢ كم أتوقع أن يكون مجموع الإجازات خلال ٥٠ يوم عمل؟

٤ - ٤ التوزيع ذو الحدين Binomial Distribution

نشاط ١: اشترك جمال في مسابقة للرماية، واقتضت المسابقة الرماية على هدف مرتين، وكان احتمال إصابة جمال للهدف في الرمية الواحدة = ٠,٨

لو أردنا حساب احتمال إصابة الهدف في رمية واحدة، ربما سنلجأ لإيجاد الفضاء العيني

Ω = {(ص، ص) ، (ص،خ) ، .... ، ....}

الحادث الذي يعبر عن إصابة الهدف مرة واحدة ={.............. ، ....}

لحساب احتمال إصابة الهدف مرةً واحدةً أجد ل(١) = ل(ص، خ) + ل(خ، ص)

= (٠,٨) (٠,٢) + (٠,٢) (٠,٨)

= ٢ (٠,٨) (٠,٢) = ٠,٣٢

نشاط ٢: زرعت ندين ٤ بذور متجانسة في النوع والصلاحية في حديقة المنزل، وكان احتمال إنبات البذرة الواحدة يساوي $\frac{٢}{٣}$ ودلَّ المتغير العشوائي ق على عدد البذور التي ستنبت من البذور الأربعة.

إذا رمزنا للبذرة التي ستنبت :ن ، وللبذرة التي لن تنبت :غ

(أستعين بالشجرة لكتابة عناصر Ω).

فإن الحادث ح$_١$ الذي يدلّ على أنه ستنبت بذرة واحدة فقط هو ....

ألاحظ أن عدد عناصر ح$_١$ يساوي ٤ = عدد طرق اختيار بذرة من ٤ بذور = $\binom{٤}{١}$

وأن احتمال كل عنصر من عناصر هذا الحادث يساوي $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{١}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣}$ حيث ل(ن) = $\frac{٢}{٣}$ ،

ل(غ) = $\frac{١}{٣}$ واعتماداً على ذلك فان : ل(ح$_١$) = $\binom{٤}{١}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{١}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣}$

كما أن الحادث ح$_٢$ الذي يدل على أنه ستنبت بذرتان فقط هو ....

ألاحظ أنه ينتمي للحادث ٦ عناصر و يساوي $\binom{٤}{٢}$ = عدد طرق اختيار بذرتين من ٤ بذور،

وأن احتمال العنصر الواحد $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$ و من ذلك نستنتج أن:

ل (ح$_٢$) = $\binom{٤}{٢}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$

أكمل جدول التوزيع الاحتمالي، إذا كان المتغير العشوائي ق يدل على عدد البذور التي ستنبت:

$س_ر$	٠	١	٢	٣	٤
$ل(س_ر)$		$\binom{٤}{١}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{١}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣}$	$\binom{٤}{٢}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$		

ألاحظ من التجارب العشوائية السابقة، وهي: إطلاق النار على هدف، وزراعة عدد من البذور، هي تجارب تم تكرارها عدداً من المرات (ن مرة) وفي كل مرة يكون نتيجتها إما النجاح (وقوع الحادث الذي يحدده السؤال) أو الفشل (عدم وقوعه)، وهما حادثان متتامان، وهي كذلك تجارب مستقلة ومتماثلة، أي أن نتيجة إجراء التجربة في المحاولة الواحدة لا يؤثر على نتيجة المحاولة الأخرى، واحتمال النجاح في كل محاولة من محاولات التجربة يبقى نفسه. مثل هذه التجارب تسمى تجارب ذات الحدين (تجارب برنولي).

وبشكل عام إذا كرر إجراء التجربة ن مرة، و كان احتمال نجاح التجربة في المرة الواحدة يساوي أ فإن احتمال فشلها في المرة الواحدة يساوي (١ – أ).
واحتمال نجاح التجربة في ر من المرات يساوي $ل(ر) = \binom{ن}{ر} أ^{ر} (١ - أ)^{ن-ر}$

نظرية : إذا كان ق متغيراً عشوائياً ذا حدين، فيه عدد مرات تكرار التجربة يساوي ن ، واحتمال نجاح التجربة في كل مرة = أ ، فإن احتمال نجاح التجربة في ر من المرات يساوي:

$$ل(ر) = \binom{ن}{ر} أ^{ر} (١ - أ)^{ن-ر} :\ ر \in \{٠ ، ١ ، ٢ ، \dots ، ن\}$$

مثال ١ : اشترك طالب في مسابقة علمية تتكون من ٤ أسئلة، كان احتمال إجابته عن السؤال الواحد إجابة صحيحة عشوائياً = $\frac{٣}{٤}$ ، وكان ق يمثل عدد الإجابات الصحيحة.

١ ما احتمال أن يجيب إجابةً صحيحةً عن سؤالين فقط؟
٢ ما احتمال أن يخطىء في الإجابة عن الأسئلة جميعها؟
٣ ما احتمال أن يجيب إجابةً صحيحةً عن سؤال واحد على الأقل؟

الحل : مدى المتغير العشوائي ق = { ٠، ١، ٢، ٣، ٤ }

١ ل(٢) = احتمال أن يجيب عن سؤالين فقط

$= \binom{٤}{٢} \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢} \left(\frac{١}{٤}\right)^{٤-٢} = \frac{٢٧}{١٢٨}$ (لماذا؟)

٢ ل(٠) $= \binom{٤}{٠} \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٠} \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{٤} = \frac{١}{٢٥٦}$ (لماذا؟)

٣ ل(س $\geq$ ١) = ل(١) + ل(٢) + ل(٣) + ل(٤)

$= ١ - $ ل(٠) $= \frac{٢٥٥}{٢٥٦}$ (لماذا؟)

نشاط ٣: إذا كان احتمال نجاح الطالب في الاختبار العملي لقيادة السيارات = $\frac{٢}{٣}$ ، واخترنا ٣ طلاب عشوائياً ممن تقدموا للاختبار، وكان المتغير العشوائي ك يمثل عدد الناجحين منهم.

١ أكتب جدول التوزيع الاحتمالي.

٢ أحسب ت (ك)

٣ أحسب ن × أ

٤ ما العلاقة بين ما توصلت إليه في الفرعين ٢ ، ٣ السابقين؟

مدى المتغير العشوائي = { ٠، ١، ٢، ٣ }

احتمال نجاح الطالب = أ = $\frac{٢}{٣}$

١

$س_ر$	٠	١	٢	٣
ل($س_ر$)				

٢ اعتماداً على الجدول في فرع أ فإن التوقع = ٢ (لماذا؟)

٣ ن × أ = ٣ × $\frac{٢}{٣}$ = ٢

٤ نلاحظ أن النتيجتين متساويتان أي أن ت(ك) = ن أ .

نظرية : إذا كان ق متغيراً عشوائياً ذا حدين، فيه عدد المحاولات يساوي ن واحتمال النجاح في المحاولة الواحدة = أ، فإن ت(ق) = ن × أ

مثال ٢ : تقدم ١٠ طلاب لامتحان القبول في إحدى الجامعات الفلسطينية، و كان احتمال قبول أي طالب = $\frac{٤}{٥}$ ، ما توقع عدد الطلاب الذين سيتم قبولهم في الجامعة؟

الحل : ت(ق) = ن × أ = ١٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٨ طلاب.

تمارين ومسائل ٤ - ٤

١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ينتج مصنع للأحذية ٣ نماذج من الأحذية أ ، ب ، جـ بنسبة ٢ : ٣ : ٥ على الترتيب اخترنا ٤ أحذية من إنتاج المصنع عشوائياً، ما احتمال أن يكون حذاء واحد فقط من بينها من النوع أ؟

أ) ٥ × $\left(\frac{١}{٥}\right)$ × $\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٣}$ ب) ٥ × $\left(\frac{١}{٥}\right)^{٤}$ × $\left(\frac{٤}{٥}\right)^{١}$

جـ) ٤ × $\left(\frac{١}{٥}\right)$ × $\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٣}$ د) ٤ × $\left(\frac{٤}{٥}\right)$ × $\left(\frac{١}{٥}\right)^{٣}$

٢ متغير عشوائي ذو حدين فيه ن = ٧ ، ل(٣) = ٤ ل(٤) ، ما احتمال نجاح التجربة في المرة الواحدة؟

أ) $\frac{٣}{٤}$ ب) $\frac{١}{٥}$ جـ) $\frac{٣}{٧}$ د) $\frac{٤}{٧}$

٣ تم إلقاء قطعة نقود غير منتظمة ١٢ مرة، و كان المتغير العشوائي ع يمثل عدد مرات ظهور الصورة، وكان ت(ع) = ٨ ، ما احتمال ظهور الكتابة في الرمية الواحدة؟

أ) $\frac{١}{٨}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ جـ) $\frac{١}{١٢}$ د) $\frac{١}{٣}$

٢ إذا كان ق متغيراً عشوائياً ذا حدين مداه { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}، وكانت أ = $\frac{١}{٣}$

أ ما قيمة ل(٠) ، ل(١) ، ل(ر $\leq$ ١)

ب أحسب ت(ق)

٣ رمي حجر نرد منتظم ٦ مرات ما احتمال الحصول على عدد يقبل القسمة على ٣:

أ في ٣ رميات فقط.

ب في ٥ رميات على الأقل.

٤ يعطي نوع من أنواع الورود لونين من الأزهار، إما أبيض أو أحمر بنسبة ٣: ١ على الترتيب فإذا زُرعت ٨ بذور:

أ ما احتمال أن تكون أزهار بذرتين فقط ذات لون أبيض؟

ب ما توقع عدد البذور التي ستنتج أزهاراً حمراء؟

٥ قام قسم التطوير في وزارة الزراعة بتهجين نباتات الفلفل، فحصل على لونيْن من الثمار الأصفر والأحمر، فإذا كان احتمال إنتاج اللون الأصفر مثليْ احتمال إنتاج اللون الأحمر، كم بذرةً علينا أن نزرع في حديقة المنزل، ليكون احتمال الحصول على نبتة واحدة على الأقل تنتج ثماراً باللون الأحمر يساوي $\frac{٢١١}{٢٤٣}$؟

نشاط ١: يريد ولي أمر أحد الطلبة المقارنة بين علامتي ولده في امتحاني الرياضيات واللغة الإنجليزية، ومعرفة في أي منهما كان تحصيله أفضل، حيث حصل على العلامة ٩٠ في الرياضيات، وحصل على العلامة ٨٥ في اللغة الانجليزية، فهل يمكنك مساعدته في ذلك؟

بما أن ٩٠ > ٨٥ فقد يتبادر إلى ذهنك أن العلامة ٩٠ أفضل، وهذا صحيح في التوزيع الواحد، لكن لا تستطيع الحكم بأفضلية علامتيه هكذا دون اتباع إجراء يجب السير فيه، لأنهما من توزيعين مختلفين، وهذا الإجراء يقتضي حساب العلامتين المعياريتين للعلامتين اللتين حصل عليهما، ولإيجادهما لا بد من معرفة الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعلامات الطلاب في المبحثيْن.

تذكر أن:

الوسط الحسابي: $\mu = \dfrac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن}$ ، الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{ر=1}^{ن} (س - \mu)^2}{ن}}$

نشاط ٢: إذا كانت علامات ٧ طلاب في امتحان الرياضيات كالآتي: ٦ ، ٨ ، ١١ ، ٩ ، ١٠ ، ٥ ، ٧ .

أجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعلامات الطلبة.

$$\mu = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن} = ...$$

لحساب الانحراف المعياري σ أكوّن جدولاً يضم : س ، س – μ ، (س – μ)^2 ثم أكمل الحل.

العلامة الخام: هي البيانات التي نقوم بجمعها حول ظاهرة ما قبل معالجتها إحصائياً.

العلامة المعيارية: هي عدد الانحرافات المعيارية للمشاهدة س عن الوسط الحسابي. ويرمز لها بالرمز ع ، حيث ع $= \dfrac{س - \mu}{\sigma}$.

والآن إذا علمت أن الوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف في اختبار الرياضيات ٨٥ ، والانحراف المعياري ٥، والوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف في اختبار اللغة الانجليزية ٧٤ وانحراف معياري قدره ٣.
وبعد معرفتك مفهوم العلامة المعيارية وطريقة إيجادها، هل يمكنك مساعدة الأب في معرفة أي المادتين كان تحصيل الابن فيها أفضل؟

مثال ١ : إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة قيم توزيع ما هو ٧٠، والانحراف المعياري لها ٤، ما العلامة المعيارية المقابلة للقيمة ٦٢؟

الحل : $ع = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{٦٢ - ٧٠}{٤} = -٢$

نشاط ٣: معتمداً على الجدول الآتي أكمل:

	الرياضيات	اللغة العربية
الوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف	٦٤	٧٠
الانحراف المعياري لعلامات طلاب الصف	١٠	٥
علامة محمد	٨٢	٨٠
علامة علي	٦٤	٧٠
علامة حسن	٦٠	٦٠

١ ع (محمد في الرياضيات) = $\frac{٨٢ - ٦٤}{١٠} = ١,٨$
٢ ع (محمد في اللغة العربية) = ...
٣ تحصيل محمد أفضل في ....
٤ تحصيل علي أفضل في ....
٥ تحصيل حسن أفضل في ....

ماذا ألاحظ على إشارة العلامة المعيارية؟

نشاط ٤: لديّ القيم الآتية: ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٣ ، ٩ :

أجد الوسط الحسابي للقيم الخام المعطاة.

أحسب الانحراف المعياري للقيم الخام المعطاة.

باستخدام القاعدة ع = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ أجد القيم المعيارية المقابلة لكل قيمة خام على الترتيب.

أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات المعيارية.

أتعلم: أن مجموع العلامات المعيارية لتوزيع ما يساوي صفر، ووسطها الحسابي يساوي صفر، وانحرافها المعياري يساوي ١ .

مثال ٢ : كانت جميع العلامات المعيارية لتوزيع ما كما يأتي: صفر ، ٠,٥ ، ل ، -١,٥ ، -٠,٥ ما قيمة ل؟

الحل : مجموع العلامات المعيارية للتوزيع = صفر

∴ صفر + ٠,٥ + ل + -١,٥ + -٠,٥ = صفر

⇐ ل = -١,٥

نشاط ٥: الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجموعة من القيم هما ٧٢، ٩ على الترتيب.

أحسب العلامة المعيارية المقابلة للقيمة ٦٣ .

إذا عُدِّلت القيم الخام حسب العلاقة ص = ٣ س + ٢ حيث س العلامة الخام قبل التعديل، ص العلامة الخام بعد التعديل أجد:

١. العلامة الخام الجديدة المقابلة للعلامة ٦٣ = ٣ × ٦٣ + ٢ = ١٨٩ + ٢ = ١٩١
٢. الوسط الحسابي بعد التعديل $\mu_{ص}$ ....
٣. الانحراف المعياري بعد التعديل $\sigma_{ص}$ ....
٤. العلامة المعيارية للقيمة ٦٣ بعد هذا التعديل ....

أفكر وأناقش: هل تتأثر العلامة المعيارية بتغير العلامات الخام في حالة الإضافة «الجمع»، والضرب في مقدار ثابت؟

مثال ٣ : إذا كانت علامتا طالبين في امتحان العلوم ٥٠ ، ٩٠ وكانت العلامتان المعياريتان المناظرتان −٢ ، ٢ على الترتيب. أجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعلاماتهما في الامتحان.

الحل : $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

$-٢ = \frac{٥٠ - \mu}{\sigma} \Leftarrow ٥٠ - \mu = -٢\sigma$ .... (١)

$٢ = \frac{٩٠ - \mu}{\sigma} \Leftarrow ٩٠ - \mu = ٢\sigma$ .... (٢)

بحل المعادلتين:

$\sigma = ١٠$ ، $\mu = ٧٠$ (أتحقق من ذلك).

تمارين ٤ - ٥

١ في امتحان الرياضيات كان الوسط الحسابي للعلامات يساوي ٦٥ والانحراف المعياري يساوي ٨، ما العلامتان المعياريتان لطالبين حصلا على العلامتين ٥٧، ٩١ ؟

٢ أعتمد البيانات الواردة في الجدول، لمقارنة مستوى أداء سارة في المباحث الثلاثة:

	كيمياء	فيزياء	أحياء
علامة سارة	٧٢	٧٥	٦٩
الوسط الحسابي	٦٠	٧٠	٦٨
الانحراف المعياري	٣	٢	٤

٣ إذا حُوّلت مفردات توزيع ما إلى علامات معيارية، فكانت كالآتي:

صفر ، −٥,٠ ، ل ، −٥,١ ، ٣ ل، فما قيمة ل؟

٤ إذا كان الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لمجموعة من القيم هما ٧٠، ٥ على الترتيب.

أ ما العلامة المعيارية المقابلة للقيمة ٧٥ ؟

ب حُوّلت القيم الخام حسب العلاقة ص = −٢ س + ٣ حيث س القيمة الخام قبل التعديل، ص القيمة الخام بعد التعديل. كم تصبح العلامة المعيارية للقيمة ٧٥ بعد هذا التعديل؟

٤ - ٦ التوزيع الطبيعي (المعتدل) The Normal Distribution

نشاط ١: بلغ عدد الطلبة الذين تقدموا لامتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة (التوجيهي) للعام الدراسي ٢٠١٦ / ٢٠١٧م في فلسطين حوالي ٧٣ ألفاً متقدم في الفروع كافةً. وكان معدل علاماتهم ٦٥,٣.

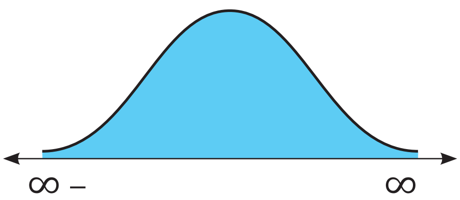
١ كيف يمكن تمثيل علاماتهم في اللغة العربية بيانياً؟

٢ كيف يمكن تمثيل الزمن الذي استغرقه الطلبة لإنهاء امتحان الرياضيات بيانياً؟

٣ هل نستطيع حساب نسبة الطلبة الذين حصلوا على علامات تزيد عن ٩٠ ؟

التوزيع الطبيعي:

تشير الدراسات الإحصائية لكثير من الظواهر الطبيعية والاجتماعية التي تتضمن مجموعةً كبيرةً من المفردات، إلى اقتراب المنحنيات الخاصة بتوزيعات هذه الظواهر من التوزيع الطبيعي، وهو أحد صور التوزيعات التكرارية وأهمها، ويمتاز بأنه متماثل حول الوسط الحسابي، ويأخذ شكل منحناه شكل الجرس، ويسمى توزيع جاوس نسبة للعالم الألماني جاوس الذي طوره في القرن السابع عشر، ومن الأمثلة عليه: توزيعات الأطوال والكتل، ودرجات الحرارة، ومعاملات الذكاء وغيرها. ويوصف التوزيع الطبيعي بمعادلة رياضية تحدد منحناه، وهي تتعين بمعرفة التوقع (الوسط الحسابي) μ والانحراف المعياري σ .



أهم خصائص المنحنى الطبيعي:

١. متماثل حول الوسط الحسابي μ .

٢. الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.

٣. له قمة واحدة وطرفاه يمتدان إلى $-\infty$، ∞ (لا يقطع محور السينات) .

التوزيع الطبيعي المعياري:

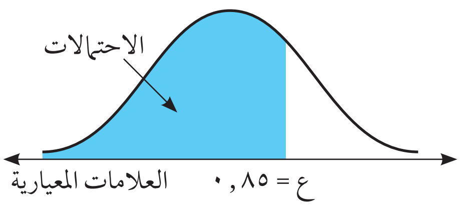
عند تحويل القيم الخام الخاصة بتوزيع طبيعي إلى علامات معيارية، وتمثيل هذه العلامات المعيارية بيانياً، فإنها تتمثل بمنحنى طبيعي يسمى المنحنى الطبيعي المعياري، وهو توزيع وسطه الحسابي يساوي صفراً وتباينه ١، وتكون المساحة تحته = ١

نظرية: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س هو التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي μ، وانحرافه المعياري σ فإن $\frac{س - \mu}{\sigma}$ هو توزيع طبيعي معياري وسطه الحسابي = صفر، وانحرافه المعياري = ١.

جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

قام العلماء ببناء جدول خاص بالتوزيع الطبيعي، يربط بين العلامات المعيارية وأجزاء المساحة المناظرة لها تحت المنحنى، وهناك عدة أنماط لجداول التوزيع الطبيعي المعياري، وسنستخدم الجدول الذي يعطي المساحة على يسار قيمة معيارية مثل ع. وبالنظر إلى الجدول (١) الوارد في نهاية الكتاب، فإن الهامش الرأسي في يمين الجدول يمثل العدد الصحيح والجزء العشري الأول، بينما يمثل الهامش الأفقي في أعلى الجدول الجزء العشري الثاني(جزء من مائة). أما الأعداد في داخل الجدول فهي تمثل احتمالات وقوع المتغير ع في الفترة ($-\infty$، أ) أي المساحة تحت المنحنى على يسار أ.

ولإيجاد ل(ع <٠,٨٥) أي مساحة المنطقة المظللة تحت القيمة المعيارية ٠,٨٥، نبحث عن العدد الذي يمثل تقاطع الصف البادىء بـ ٠,٨ (في الهامش الرأسي) والعمود البادىء بـ ٠,٠٥ في الهامش الأفقي وهو ٠,٨٠٢٣.

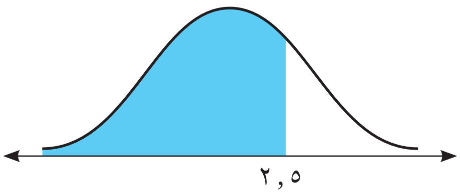


ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣

مثال ١ : إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري. أجد:

١ ل(ع ≤ ٢,٥)

٢ ل(ع ≥ ١,٤)



الحل : باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري

١ ل(ع ≤ ٢,٥) = ٠,٩٩٣٨

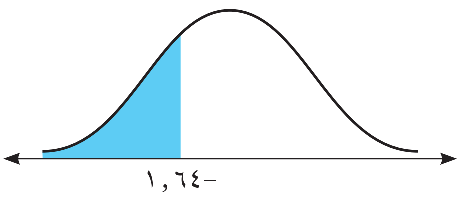
٢ ل(ع ≥ ١,٤) = ١ − ل (ع < ١,٤)

= ١ − ٠,٩١٩٢ = ٠,٠٨٠٨

مثال ٢ : إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري. أجد:

١ ل(ع ≤ −١,٦٤)

٢ ل(ع ≥ −١,٧)



الحل : باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري

١ ل(ع ≤ − ١,٦٤) = ٠,٠٥٠٥

٢ ل(ع ≥ −١,٧) = ل(ع ≤ ١,٧) (لماذا؟)

= ٠,٩٥٥٤

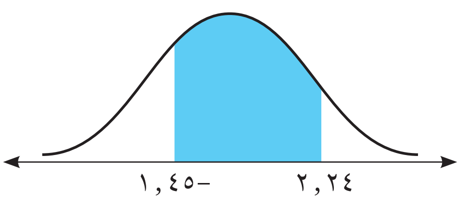
هل يوجد حلّ آخر؟

نشاط ٢: باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد: ل(−١,٤٥ ≤ ع ≤ ٢,٢٤)

١ أجد ل(ع ≤ −١,٤٥) = ...

٢ أجد ل(ع ≤ ٢,٢٤) = ...

٣ أجد ل(−١,٤٥ ≤ ع ≤ ٢,٢٤) = ...



مثال ٣ : إذا كان ع متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً، أجد قيمة ك في كل من الحالات الآتية:

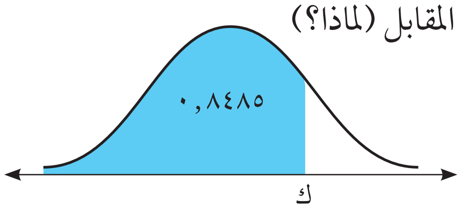
١ ل(ع ≥ ك) = ٠,٨٤٨٥

٢ ل(ع ≤ ك) = ٠,٦٦٢٨

٣ ل(-٠,٤٤ ≥ ع ≥ ك) = ٠,٥٥٨٨

الحل :

١ ك تقع في الفترة الموجبة، كما هو موضح بالشكل المقابل (لماذا؟)

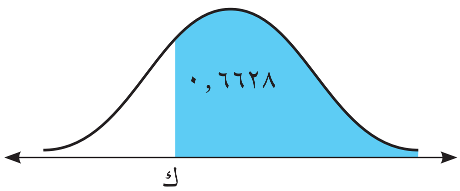


ل (ع ≥ ك) = ٠,٨٤٨٥

أبحث في الجدول عن المساحة ٠,٨٤٨٥

لنجد ك = ١,٠٣

٢ ك تقع في الفترة السالبة، كما هو موضح بالشكل المقابل (لماذا؟)



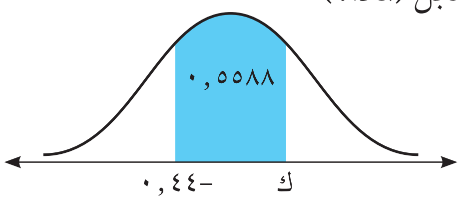
ل(ع ≤ ك) = ٠,٦٦٢٨

ومنها ل (ع ≥ ك) = ١ - ٠,٦٦٢٨ = ٠,٣٣٧٢

أبحث في الجدول عن العدد ٠,٣٣٧٢

فأجد ك = -٠,٤٢

٣ ك تقع في الفترة الموجبة، كما هو موضح بالشكل المقابل (لماذا؟)



ل (-٠,٤٤ ≥ ع ≥ ك) = ٠,٥٥٨٨

ل(ع ≥ ك) - ل(ع ≥ -٠,٤٤) = ٠,٥٥٨٨

ل(ع ≥ ك) -٠,٣٣ = ٠,٥٥٨٨

ل(ع ≥ ك) = ٠,٨٨٨٨، ومنها ك = ١,٢٢

مثال ٤ : إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً، بوسط حسابي μ = ٧٢، وانحراف معياري σ = ٢,٥.

أجد أ بحيث ل(س ≥ أ) = ٠,٧٨٨١

الحل : ع المقابلة لهذه المساحة = ٠,٨

لكن ع = $\frac{\text{أ} - \mu}{\sigma}$ ، ٠,٨ = $\frac{\text{أ} - ٧٢}{٢,٥}$ ومنها أ = ٧٤

نشاط ٣: إذا كان المتغير العشوائي س يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه μ = ١٥ وانحرافه المعياري σ = ٥ ، أجد ل (١٨ > س > ٢١).

أجد القيمة المعيارية المناظرة لكل من ١٨، ٢١ بالتعويض في العلاقة: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

عندما $س_١$ = ١٨ ، $ع_١$ = ٠,٦

عندما $س_٢$ = ٢١ ، $ع_٢$ = ١,٢

∴ ل (١٨ > س > ٢١) = ل(..... > ع > ....)

= ل(ع > ١,٢) − ل (ع > ٠,٦) = ٠,١٥٩٢

تمارين ٤ - ٦

١ إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أجد:

أ ل(ع ≥ ١,٢٥) ب ل(ع ≤ ٢,٤٨)

جـ ل(ع ≤ −١,٤٦) د ل(−٢,٣٧ ≥ ع ≥ ١,٧)

٢ إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أجد القيمة المعيارية ك بحيث:

أ ل(ع ≥ ك) = ٠,٩٩٠٩ ب ل(ع < ك) = ٠,٩٤٩٥

جـ ل(ع ≥ ك) = ٠,١٩٧٧ د ل(ك ≥ ع ≥ ٢,١) = ٠,٢٩٠٦

٣ إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، وكان ل(ع ≥ ك) = ٠,١٧٣٦

أجد ل(ك ≥ ع ≥ ١,٧).

٤ إذا كان س متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي وسطه الحسابي ٦٠ وانحرافه المعياري ٥ ، أجد:

أ ل(س≥٥٠) ب ل(٥٥ ≥ س ≥ ٧٥)

٥ إذا كان س متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري يساوي ٢

وكان ل(س < ٧٨) = ٠,٠٢٢٨ ، أجد الوسط الحسابي للتوزيع.

٦ إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً، وسطه = μ = ٨ وانحرافه المعياري σ = ٢

وكان ل(ع ≤ ك) = ٠,١٠٥٦ أجد:

أ قيمة ك ب ل(س ≥ ١٢).

٤ - ٧ تطبيقات Applications

بيّنّا سابقا أهمية التوزيع الطبيعي، وذلك لارتباطه بكثير من التطبيقات الحياتية، والظواهر التربوية والاقتصادية، ككتل الأطفال حديثي الولادة، وعلامات امتحان ما كامتحان الثانوية (التوجيهي)، والمبيعات اليومية لمحل تجاري وغيرها. وسنقوم بعرض أمثلة ومسائل تطبيقية في هذا المجال:

مثال ١ : تقدم ٢٠٠٠ شخص لاختبار الذكاء (IQ) والذي كانت نتائجه قريبةً من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي μ = ١٠٠، وانحراف معياري σ = ١٥.

أ ما نسبة الأشخاص الذين تقع معاملات ذكائهم بين ٨٠ و ١٢٠ ؟

ب ما عدد الأفراد الذين تزيد معاملات ذكائهم عن ٨٠ ؟

الحل :

أ لنفترض أن: س متغير عشوائي طبيعي يعبر عن معامل الذكاء.

المطلوب إيجاد ل(٨٠ < س < ١٢٠)

ومنها ل(٨٠ < س < ١٢٠) = ل(-١,٣٣ < ع < ١,٣٣) (لماذا؟)

= ل(ع < ١,٣٣) - ل(ع < -١,٣٣)

= ٠,٩٠٨٢ - ٠,٠٩١٨

= ٠,٨١٦٤

أي أن حوالي ٨١,٦٤ ٪ من الأشخاص لديهم معامل ذكاء يقع بين ٨٠ ، ١٢٠

ب ل(س> ٨٠) = ل(ع > -١,٣٣)

= ٠,٩٠٨٢

عدد الأفراد الذين تزيد معاملات ذكائهم عن ٨٠

= ٢٠٠٠ × ٠,٩٠٨٢

= ١٨١٦,٤

≈ ١٨١٦ فرداً

مثال ٢ : إذا كانت علامات الطلبة في امتحان الثانوية العامة قريبة من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٦٥، وانحراف معياري ٧، وقررت وزارة التربية والتعليم العالي قبول الطلبة الذين تكون علاماتهم ضمن أعلى ٢٠٪ من العلامات في الجامعات الحكومية، فما أدنى علامة تقبل في الجامعات الحكومية؟

الحل : نفرض أن أقل علامة تحصل على قبول في الجامعات الحكومية هي س، والعلامة المعيارية المقابلة لها ع

$$ل\left(ع \geq \frac{س - ٦٥}{٧}\right) = ٠,٢ \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$\Leftarrow \quad ل\left(ع < \frac{س - ٦٥}{٧}\right) = ٠,٨ \approx ٠,٧٩٩٥$$

ومن الجدول قيمة ع = ٠,٨٤ ومنها س = ٧٠,٨٨ (لماذا؟)

تمارين ٤ - ٧

١ مثلت علامات ١٠٠٠ طالب توزيعاً طبيعياً، وتم حساب العلامات المعيارية لهم، ومُثّلت على توزيع طبيعي معياري. أجد عدد الطلبة الذين تقل علاماتهم المعيارية عن – ٢,١٥

٢ إذا علم أن علامات الطلبة في اختبار القدرات في مادة الرياضيات، يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٦٩ وانحراف معياري ٤ أجد ما يأتي:

أ احتمال أن تكون علامة الطالب أكبر من ٧٥

ب احتمال أن تكون علامة الطالب بين ٦٠ ، ٧٠

جـ نسبة الطلاب الذين حصلوا على علامة أقل من ٦٩

٣ إذا كان الدخل الشهري لـ ٢٠٠ أسرة في مدينة غزة يمثل متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٢٠٠ دينار ، وانحراف معياري ١٠ دنانير. أجد:

أ عدد الأسر التي تحصل على دخل شهري أعلى من ٢٢٠ ديناراً.

ب الحد الأعلى للدخل لنسبة الـ ١٠٪ من الأسر التي تحصل على أدنى دخل.

٤ تمنح إدارة مدرسة جوائز نقدية لأعلى ٥ ٪ من طلابها، فإذا كانت علامات الطلاب تخضع لتوزيع طبيعي فيه: μ = ٧٠ ، σ = ١٠ فما أقل علامة تحصل على جائزة؟

تمارين عامة

١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كان الوسط الحسابي لعلامات ٣٠ طالباً يساوي ٧٥ والانحراف المعياري يساوي ٥، فإن العلامة المعيارية المناظرة للعلامة ٦٥ تساوي :

أ) −٢ ب) ٢ جـ) ٧ د) ٩

٢ إذا كانت العلامة المعيارية لإحدى القيم الخام تساوي ٣ ، ثم ضربت كل قيمة من القيم الأصلية في ٤ فإن العلامة المعيارية الجديدة تصبح :

أ) ٤ ب) ٣ جـ) ١٢ د) ٧

٣ في توزيع طبيعي وسطه الحسابي ٥٠ وانحرافه المعياري ١٠ تكون نسبة المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين ٤٠ ، ٧٠ تساوي :

أ) ١٣ ٪ ب) ٣٤ ٪ جـ) ٦٨ ٪ د) ٨٢ ٪

٤ حجر نرد منتظم عليه الأرقام ١ ، ١ ، ١ ، ٢ ، ٢ ، ٥ تم رميه ٣٠ مرة، كم مرةً تتوقع أن يظهر الرقم ١ ؟

أ) ٢٠ ب) ١٥ جـ) ١٠ د) ٥

٥ متغير عشوائي ذو حدين عدد مرات تكرار تجربته = ٦ وتوقعه يساوي ٤ ، ما احتمال نجاح التجربة في المرة الواحدة؟

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٦}$ جـ) $\frac{٢}{٦}$ د) $\frac{٢}{٣}$

٢ إذا كان جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق هو:

س	٣	٨	٩	١٢	١٥
ل(س)	أ	ب	٠,٣	٣ب	٢أ

أحسب توقع المتغير العشوائي ق .

٣ قطعة نقود غير منتظمة، احتمال ظهور الصورة على وجهها العلوي عند إلقائها يساوي مثليْ احتمال ظهور الكتابة، تم إلقاؤها مع قطعة نقد منتظمة مرةً واحدةً، فإذا كان المتغير العشوائي ق يمثل عدد الصور الظاهرة على الوجه العلوي.

أ أحسب التوقع للمتغير العشوائي ق .

ب أحسب التوقع للمتغير العشوائي ق إذا كُررت التجربة ١٠ مرات.

٤ كم مرةً يتوجب علينا إلقاء قطعة نقد منتظمة، لتزيد الفرصة عن ٠,٧٩ لظهور صورة واحدة على الأقل؟

٥ إذا كانت أطوال الطلاب في جامعة بيرزيت تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي μ وانحرافه المعياري ٨سم، أجد قيمة μ إذا كانت العلامة المعيارية لطالب طوله ١٨٠سم هي ١,٢٥ .

٦ إذا كانت درجات الحرارة خلال أحد الشهور في مدينة صفد تتوزع توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي ١٧,٥ °م وانحرافه المعياري $\frac{١}{٣}$٣ °م . أجد احتمال أن تقع درجة الحرارة بين ٢٠ °م، ٢٤ °م.

٧ تتخذ علامات (٥٠٠٠) طالب في امتحان الثانوية العامة شكلاً قريباً من التوزيع الطبيعي وسطه الحسابي ٧٦ وانحرافه المعياري ٩، فإذا كانت نسبة الطلبة الذين تقل علاماتهم عن علامة القبول في كلية الهندسة هي ٠,٨٦٤٣، أجد علامة القبول.

أقيّم ذاتي أعبر بلغتي عن كيفية توظيف مفاهيم في هذه الوحدة في حياتي العملية بما لا يزيد عن ٣ أسطر.

فكرة رياديّة

لدى أبو وليد قطعة أرض مساحتها ٦ دونمات، يفكر بالاستثمار بها بمشاريع زراعيه أو صناعيه. ما رايك أن تقدم له مساعده بارشاده الى الفرص الممكنه لاستثمار قطعة الارض هذه موضحا أهمية كل فرصه وإمكانيات نجاحها، وتكلفتها والتهديدات والمخاطر التي يمكن أن يواجهها والعائد المادي المتوقع لكل فرصة متاحه، يمكنك عرض اقتراحاتك وفق النموذج التالي:

الفرصة	التكلفة	الربح المتوقع	المخاطر والتهديدات	نقاط القوة	مؤشرات النجاح	نقاط الضعف
انشاء دفيئات حرارية	البحث عن تكلفة الدونم الواحد	تحديد نوع المزروعات والربح المتوقع لكل نوع	(الرياح ، الفيضانات، الآفات الزراعيه...)	القرب من السوق المركزي، امكانيات التصدير ...	كمية الانتاج، الأسعار ...	الخبره، امكانيات التصدير ...
.						
.						
.						

روابط إلكترونية

- https://www.mathsisfun.com/data/probability.html
- http://mathworld.wolfram.com/topics/Probability.html
- http://www.statisticshowto.com/probability-and-statistics/z-score/

الوحدة

٥

المتتاليات والمتسلسلات

أناقش العبارة:

«فلسطين أحداث متتالية ونضالات متسلسلة مستمرة».

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المتتاليات والمتسلسلات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

1. التعرف الى مفهوم المتتالية ومفهوم المتسلسلة .
2. التعرف إلى المتتالية الحسابية والمتسلسلة الحسابية .
3. التعرف إلى المتتالية الهندسية والمتسلسلة الهندسية.
4. استنتاج الحدّ العـام لكل من المتتاليتين الحسابية والهندسية.
5. إيجاد مجموع (ن) من حدود المتتـاليتين الحسابية والهندسية.
6. توظيف قوانين المتتاليات والمتسلسلات في مسائل حياتية.
7. توظيف برامج حاسوبية في إيجاد مجموع متسلسلات معطاه.

٥ - ١ المتتاليات Sequences

نشاط ١: جلس أحمد مع جدّته التي يبدو على جبينها ملامح الشيخوخة، وتنعكس على وجهها منحنيات هموم الرحيل عن بلدتها صبّارين، وأخذت تسرد لأحمد حكايات التنكيل والتهجير، وشرعت تختبر حفيدها بمعلومات عن أحداث عصفت بشعبنا الفلسطيني، فسألته عن أبرز الأحداث التي حصلت في السنوات الميلادية الآتية:

١٩١٧، ١٩٣٦، ١٩٤٨، ١٩٦٧، ١٩٦٩، ١٩٨٢، ١٩٨٧، ٢٠٠٠.

فأجابها أحمد: في عام ١٩١٧م حصل وعد بلفور المشؤوم ، وفي عام ١٩٣٦م كان ....
وفي عام ١٩٤٨م حصلت .... وفي عام ١٩٦٩م حصل ....
ثم أضافت الجدّة، إن تلك الأحداث المتتالية تشكل منعطفات في مصير شعبنا، ويجب علينا تناقلها من جيل إلى آخر.

نشاط ٢: يبيّن الجدول الآتي أطوال أفراد عائلة مكونة من ٥ أفراد:

رقم الفرد	١	٢	٣	٤	٥
طول الفرد (بالسنتيمتر)	١٨٥	١٧٠	١٥٠	٩٠	٦٠

يمكن كتابة هذه الأطوال على صورة مجموعة من الأزواج المرتبة:

{(١ ، ١٨٥) ، .... }

و هذه المجموعة تمثل اقتراناً مجاله { .... } وهي مجموعة جزئية من ط*

و مداه {١٨٥ ، ١٧٠،..................... } وهي مجموعة جزئية من ح

تعريف: **المتتالية هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية (ط*) ، أو مجموعة جزئية منها على صورة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن }، ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية (ح).**
وتقسم المتتاليات إلى نوعين: منتهية عندما يكون فيها المجال مجموعة جزئية من ط* على الصورة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن }، وغير منتهية عندما يكون المجال ط*.
ويرمز للحدّ الأول بالرمز $ح_١$ والحدّ الثاني بالرمز $ح_٢$ وهكذا...،
يرمز للحدّ الذي ترتيبه ن بالرمز $ح_ن$ ويسمى الحدّ العام (الحدّ النوني).

مثال ١ : إذا كان الحدّ العام للمتتالية $ح_{ن} = ن^{٣} + ١$

١ أكتب الحدود الخمسة الأولى من هذه المتتالية.

٢ أكتب الحدّ العاشر من المتتالية.

الحل :

١ بتعويض قيم ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ في الحدّ العام نحصل على:

$ح_{١} = ١^{٣} + ١ = ٢$ ، $ح_{٢} = ٢^{٣} + ١ = ٩$ ، $ح_{٣} = ٢٨$ ، $ح_{٤} = ٦٥$ ، $ح_{٥} = ١٢٦$

٢ $ح_{١٠} = ١٠^{٣} + ١ = ١٠٠١$

نشاط ٣: أجد الحدّ العام للمتتاليات.

١ ٣ ، ٧ ، ١١ ، .....

٢ ١ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، .....

٣ ١١ ، ١٠١ ، ١٠٠١

بالربط بين قيمة كل حدّ وترتيبه، أجد:

١ $ح_{١} = ٣ = (٤ \times ١) - ١$

$ح_{٢} = ٧ = (٤ \times ٢) - ١$

$ح_{٣} = ١١ = (٤ \times ٣) - ١$

فيكون $ح_{ن} = ٤ن - ١$

٢ $ح_{١} = ١ = \frac{١}{١^{٣}}$ ، $ح_{٢} = \frac{١}{٨} = \frac{١}{٢^{٣}}$ ، $ح_{٣} = \frac{١}{٢٧} =$ ....

فيكون $ح_{ن} =$ ....

٣ $ح_{ن} =$ ....

مثال ٢ : أكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية التي فيها:

$ح_١ = ٢$ ، $ح_٢ = ٣$ ، $ح_{ن+٢} = ح_ن \times ح_{ن+١}$

الحل : $ح_١ = ٢$ ، $ح_٢ = ٣$ معطى

عندما $ن = ١$ ، $ح_٣ = ح_١ \times ح_٢ = ٢ \times ٣ = ٦$

وعندما $ن = ٢$ ، $ح_٤ = ح_٢ \times ح_٣ = ٣ \times ٦ = ١٨$

تمارين و مسائل ٥ - ١

١ أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات الآتية:

أ $ح_ن = ٥ ن^٢ - ٩$

ب $ح_١ = ٣$ ، $ح_٢ = -١$ ، $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} \times ح_ن$ $\forall ن \in ص^+$

٢ أكتب الحدّ العام لكل من المتتاليات الآتية:

أ $\frac{٢}{١}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، .....

ب ٢ ، ٩ ، ٢٨ ، ....

جـ ٤ ، -٨ ، ١٦ ، -٣٢ ، ..... ، -١٢٨

٣ في المتتالية التي حدّها العام هو $ح_ن = ٣ \times ٢^{(ن-٥)}$ ، أبين أن:

$(ح_٥)^٢ = ح_٢ \times ح_٨$

٤ لدى بائع شرائح اتصالات مئة شريحة، فإذا باع في اليوم الأول ٨ شرائح، وباع في الثاني ٩ شرائح، وباع في الثالث ١٠ شرائح، وهكذا:

أ أكتب متتالية عدد الشرائح غير المباعة خلال الأيام المختلفة.

ب ما ترتيب اليوم الذي لا يحقق هذا النمط من البيع؟

٥ - ٢ المتسلسلات Series

نشاط ١: تعتبر الحديقة المنزلية جزءاً من حياة المواطن الفلسطيني، و لتعميق قيم حب الأرض والانتماء لها، طلب أبو حسن من ابنه حسن استثمار وقته في العطلة الصيفية بزراعتها بأنواع الخضراوات المختلفة، على أن يكافئه بثلاثة دنانير في اليوم الأول، و ٥ دنانير في اليوم الثاني، و ٧ دنانير في اليوم الثالث وهكذا لمدة أسبوع. يمكن كتابة المبالغ على شكل متتالية، و هي ....

أما الحدّ العام للمبالغ $ح_ن$ = ...

وبعد أن أنهى حسن مهمته، قام بكتابة مبالغ المكافآت التي حصل عليها بالصورة الآتية:

٣ + ٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣ + ١٥ ، إن كتابة هذه المكافآت بهذه الصورة يسمى متسلسلة.

ويمكن كتابة هذا المجموع باستخدام الرمز $\sum$ ويقرأ (سيجما) حيث يمكننا كتابة هذه المتسلسلة على الصورة الآتية $\sum_{ر=١}^{٧} (٢ر + ١)$

ألاحظ أن هذه المتسلسلة منتهية، وعدد عناصرها ٧.

ويمكن التعبير عن المتسلسلة -١ + ٦ + ٢٥ + ٦٢ + ... على الصورة

$\sum_{ر=١}^{\infty} (ر^٣ - ٢)$ حيث ر $\in$ ط*، وهي متسلسلة غير منتهية.

مثال ١: أجد مفكوك المتسلسلة الآتية $\sum_{ر=١}^{٤} (٣ر + ١)$:

الحل: عندما ر = ١ ، $ح_١$ = ٣ × ١ + ١ = ٤

عندما ر = ٢ ، $ح_٢$ = ٣ × ٢ + ١ = ٧ وهكذا

$\sum_{ر=١}^{٤} (٣ر + ١) = ٤ + ٧ + ١٠ + ١٣$

نشاط ٢: أكتب كلاً من المتسلسلات الآتية باستخدام الرمز ($\sum$)

١ $٥ + ١٠ + ١٥ + ... + ١٥٠$

٢ $٢ + ١٦ + ٥٤ + ١٢٨ + ٢٥٠$

٣ $١ \times ٢ + ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + ...$

١ $٥ \times ١ + ٥ \times ٢ + ٥ \times ٣ + ... + ٥ \times ٣٠$

ألاحظ أن ن = ٣٠ ، $ح_ر = ٥$ ر فتكون المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٣٠} ٥$ ر

٢ ن = ٥ ، $ح_ر =$ .... فتكون المتسلسلة ....

٣ ن = ... ، $ح_ر =$ .... فتكون المتسلسلة ....

مثال ٢ : أجد مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر^٢ + ١)$

الحل : $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر^٢ + ١) = ٣ + ٩ + ١٩ + ٣٣ + ٥١$

ومنها مجموع المتسلسلة = ١١٥

خصائص المجموع $\sum$

١ $\sum_{ر=١}^{ن} أ = أن$ ، $\forall أ \in ح$

٢ $\sum_{ر=١}^{ن} أس_ر = أ \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$ ، $أ \in ح$

٣ $\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر \pm ص_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \pm \sum_{ر=١}^{ن} ص_ر$

أتعلم:

١ $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن + ١)}{٢}$

٢ $\sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن + ١)(٢ن + ١)}{٦}$

نشاط ٣: أجد مجموع المتسلسلة $\sum\limits_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{٥}} (\text{ر}^{\text{٢}} - \text{٣ ر})$ بطريقتين.

❶ بالتعويض المباشر المجموع = $\sum\limits_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{٥}} (\text{ر}^{\text{٢}} - \text{٣ ر})$ =.............

❷ باستخدام خصائص المجموع $\sum\limits_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{٥}} (\text{ر}^{\text{٢}} - \text{٣ ر}) = \sum\limits_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{٥}} \text{ر}^{\text{٢}} - \text{٣} \sum\limits_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{٥}} \text{ر}$

$$\frac{\text{ن (ن + ١) (٢ن + ١)}}{\text{٦}} - \text{٣} \times \frac{\text{ن (ن + ١)}}{\text{٢}}$$

$$= (\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ ) - \text{٣} \times \frac{\text{٥ (٥ + ١)}}{\text{٢}} = \text{٥٥ − ٤٥ = ١٠}$$

ويمكن توظيف برنامج Microsoft Mathematics في أيجاد مجموع متسلسلة، ويكون ذلك:

❶ الدخول إلى البرنامج
❷ اختيار Calculus
❸ الضغط على أيقونة ($\sum$)
❹ إدخال رتبتي حدي المتسلسلة الأول (n = 1) والأخير (n = 5)، وحدها العام (n^2 - 3n)
❺ الضغط على Enter

مثال ٣: إذا كان $\sum\limits_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{١٠}} (\text{ر}^{\text{٢}} + \text{أ ر} - \text{٧}) = \text{٤٢٥}$ ، أجد قيمة أ.

الحل : باستخدام خصائص المجموع ($\sum$)

$$\sum\limits_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{١٠}} (\text{ر}^{\text{٢}} + \text{أ ر} - \text{٧}) = \sum\limits_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{١٠}} \text{ر}^{\text{٢}} + \text{أ} \times \sum\limits_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{١٠}} \text{ر} - \sum\limits_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{١٠}} \text{٧} = \text{٤٢٥}$$

$$= \frac{\text{ن (ن + ١) (٢ن + ١)}}{\text{٦}} + \text{أ} \times \frac{\text{ن (ن + ١)}}{\text{٢}} - \text{٧} \times \text{ن} = \text{٤٢٥}$$

بتعويض ن = ١٠ ينتج:

$$\frac{١٠(١٠+١)(٢\times١٠+١)}{٦} + أ \times \frac{١٠(١٠+١)}{٢} - ٧\times١٠ = ٤٢٥$$

$$\Leftarrow ٣٨٥ + ٥٥أ - ٧٠ = ٤٢٥$$

$$\Leftarrow ٥٥أ = ١١٠ ،\ أ = ٢$$

تمارين و مسائل ٥ - ٢

١ أكتب كلا من المتسلسلات الآتية، باستخدام رمز المجموع ($\sum$)

أ $ك^{٣} + ك^{٦} + ك^{٩} + ...$

ب $\frac{٣}{٤} + \frac{٤}{٥} + \frac{٥}{٦} + ... \frac{١٠٠}{١٠١}$

٢ أتحقق من $\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{٢ن+١}{٣} \sum_{ر=١}^{ن} ر$

٣ أكتب مفكوك كلٍ من المتسلسلتين الآتيتين، ثم أجد مجموع كلٍ منهما، وأتحقق من صحة المجموع باستخدام برنامج Microsoft Mathematics :

أ $\sum_{ر=١}^{٩٩٩} لـو \frac{ر}{ر+١}$

ب $\sum_{ر=١}^{١٠٠} (\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١})$

٤ أجد مجموع المتسلسلات الآتية:

أ $\sum_{ر=١}^{٣} (ر^{٢} + ٢ر + ٥)$

ب $\sum_{ر=١}^{٨٥} (-١)^{ر}$

جـ $\dfrac{\sum_{ر=١}^{٤٠} ر^{٢}}{\sum_{ر=١}^{٤٠} ٢ر}$

د $\sum_{ر=١}^{٤٠} \frac{ر}{٢}$

٥ بدأ جسم الحركة في خط مستقيم بحيث قطع في الدقيقة الاولى ١١م، وفي الدقيقة الثانية ١٤م، وفي الدقيقة الثالثة ١٩م، وهكذا :

أ اكتب متسلسلة المسافات التي قطعها الجسم في الدقائق المختلفة مستخدما رمز المجموع.

ب أتحقق من أن مجموع ما قطعه الجسم في الدقائق الخمسة الأولى أقل مما قطعه في الدقيقة العاشرة.

٥ - ٣ المتتاليات الحسابية (العددية) Arithmetic Sequences

نشاط ١: اشتهرت يافا ببيّارات برتقالها الجميلة، ويملك الحاج كنعان إحدى تلك البيّارات المزروعة بأشجار البرتقال، والمرتبة في صفوف على شكل خطوط مستقيمة، زُرِعت أول شجرة على بعد ٧ أمتار، من طريق البيّارة، ثم زرعت بقية الأشجار، وكانت المسافة بين الشجرة والشجرة السابقة لها ٥ أمتار، وكانت الأبعاد عن الطريق على الترتيب، هي:

٧ ، ١٢ ، ١٧ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ... ، ١٠٧

ألاحظ أن ١٢ – ٧ = ١٧ – ١٢ = ٢٢ – ١٧ = ... = ٥

ماذا يمكن أن نسمي ترتيب هذه الأعداد؟

تعريف: المتتالية الحسابية: هي المتتالية التي يكون فيها الفرق بين أي حدّ والحد السابق له مباشرة، يساوي مقداراً ثابتاً، يسمى أساس المتتالية الحسابية، ويرمز له بالرمز(د).

نشاط ٢: أميز المتتاليات الحسابية من غيرها فيما يأتي:

١ ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١

٢ ٨ ، ٤ ، ٢ ، ١

٣ ١ ، –١ ، ١ ، –١ ، ١

٤ المتتالية التي حدّها النوني $ح_ن$ = ٣ن + ١

١ المتتالية حسابية، لأن ٥ – ٣ = ٧ – ٥ = ٩ – ٧ = ٢ = د

٢ ليست حسابية، لأن ٤ – ٨ ≠ ٢ – ٤

٣ ليست حسابية، لأن ....

٤ حدود المتتالية، هي: ..... ، ...... ، .... ، .... وهي متتالية ....

الحدّ العام للمتتالية الحسابية:

الصورة العامّة للمتتالية الحسابية التي حدّها الأول = أ وأساسها = د

هي أ ، أ + د ، أ + ٢د ، .... وعليه، فإن

ح$_{١}$ = أ ، ح$_{٢}$ = أ + د ، ح$_{٣}$ = أ + ٢د ، ... ، ح$_{ن}$ = أ + (ن−١) د

تعريف: الحدّ العام للمتتالية الحسابية هو : ح$_{ن}$ = أ + (ن−١) د ، حيث أ : الحدّ الأول، د : الأساس

مثال ١ : أجد الحدّ العاشر في المتتالية الحسابية التي حدّها الأول = ٥ وأساسها = ٢

الحل : أ = ٥ ، د = ٢

ح$_{ن}$ = أ + (ن − ١) د

ح$_{١٠}$ = أ + ٩ د

= ٥ + ٩ × ٢ = ٢٣

نشاط ٣: انطلق قارب سياحي من نقطة تبعد ٢٠ م عن ميناء غزة في خط مستقيم مبتعداً عنه بمعدل ٧م / د ، أجد:

١ بعد القارب عن الميناء في نهاية الدقيقة ٢٥ .

٢ الحدّ العام للمتتالية.

متتالية أبعاد القارب عن الميناء هي: ٢٠ ، ٢٧ ، ٣٤ ، ٤١ ، ...

وهي متتالية حسابية يكون فيها أ = ٢٠ ، د = ...

بعد القارب عن الميناء في نهاية الدقيقة ٢٥ هو ح$_{٢٦}$ = ...

الحدّ العام ح$_{ن}$ = ...

مثال ٢ : أجد رتبة أول حدّ سالب في المتتالية الحسابية ١٠٠ ، ٩٧ ، ٩٤ ، ...

الحل : أ = ١٠٠ ، د = ٩٧ − ١٠٠ = −٣

أفرض أن $\text{ح}_{\text{ن}}$ هو أول حدّ سالب.

∴ $\text{ح}_{\text{ن}}$ = أ + (ن − ١) د < ٠

⇐ ١٠٠ + (ن − ١) × −٣ < ٠

⇐ ١٠٠ −٣ن + ٣ < ٠

⇐ − ٣ن < −١٠٣

⇐ ن > $\frac{\text{١٠٣}}{\text{٣}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ ٣٤

∴ $\text{ح}_{\text{٣٥}}$ هو أول حدّ سالب. (لماذا؟).

مثال ٣ : متتالية حسابية حدّها الثالث يساوي ٥ وحدها التاسع يساوي ١٧

١ أكتب حدود هذه المتتالية.

٢ هل العدد ٣٠٠ أحد حدود هذه المتتالية؟

الحل :

١ $\text{ح}_{\text{٣}}$ = ٥ ⇐ أ + ٢ د = ٥ .... (١)

$\text{ح}_{\text{٩}}$ = ١٧ ⇐ أ + ٨ د = ١٧ .... (٢)

بطرح المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن ٦د = ١٢ ومنها د = ٢

بالتعويض في المعادلة (١) عن قيمة (د) ينتج أن أ = ١

∴ المتتالية هي ١ ، ٣ ، ٥ ، ....

أفكر بطرق أخرى للحل.

٢ أفرض أن $\text{ح}_{\text{ن}}$ = أ + (ن − ١) د = ٣٠٠

١ + (ن − ١) × ٢ = ٣٠٠

١ + ٢ن − ٢ = ٣٠٠ ⇐ ٢ن = ٣٠١ بالقسمة على ٢ ينتج أن:

ن = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ١٥٠ ، ألاحظ أن ن ∌ ط* ومنها ٣٠٠ ليست أحد حدود المتتالية.

تعريف: الوسط الحسابي للعددين أ ، ب هو $\frac{أ + ب}{٢}$

ألاحظ أن الأعداد أ ، $\frac{أ + ب}{٢}$ ، ب تشكل متتالية حسابية.

بوجه عام: إذا أدخلنا أوساطاً حسابية $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$ بين العددين أ ، ب

فإن الأعداد: أ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$ ، ب تشكل متتالية حسابية عدد حدودها (ن + ٢)

مثال ٤ : أدخل ٤ أوساط حسابية بين العددين ١٧ ، ١٠٧

الحل : عند إدخال ٤ أوساط حسابية بين العددين ١٧ ، ١٠٧ تتكون المتتالية الحسابية:

١٧ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$ ، ١٠٧

أ = ١٧ ، $ح_٦$ = ١٠٧

$ح_٦$ = أ + ٥ د = ١٠٧ ⟸ ١٧ + ٥ د = ١٠٧ ⟸ ٥ د = ٩٠ ومنها د = ١٨

المتتالية هي : ١٧ ، ٣٥ ، ٥٣ ، ٧١ ، ٨٩ ، ١٠٧

الأوساط الحسابية هي: ٣٥ ، ٥٣ ، ٧١ ، ٨٩

أتعلم: لإدخال أوساط حسابية بين العددين أ ، ب عددها ن يكون أساس المتتالية د = $\frac{ب - أ}{ن + ١}$

نشاط ٤: أدخل خمسة أوساط حسابية بين العددين −٥ ، ١٣.

المتتالية: −٥ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$ ، $س_٥$ ، ١٣

أساسها د = $\frac{ب - أ}{ن + ١}$ = ...

الحد الخامس من المتتالية هو ....

تمارين ومسائل ٥ - ٣

١ متتالية حسابية فيها $ح_٤ = -٣٣$ ، $ح_٩ = -١٣$

أجد: أ حدود المتتالية.

ب رتبة أول حدّ موجب فيها.

٢ متتالية حسابية مجموع حدّيها الثاني والثالث ١٥٢ وحدّها السادس يزيد عن حدّها الثامن بمقدار ٨، أكتب حدود هذه المتتالية الحسابية.

٣ إذا كوّنت الأعداد ٧ ، س ، .... ، ١٠س + ٩ ، ١٢٣ متتالية حسابية، أجد:

أ قيمة س

ب عدد حدود هذه المتتالية.

٤ تتكون كومة من ٢٠٠م^٣ من الرمل، ينقل سائق شاحنة يوميا منها ٨ م^٣، إلى ورشات البناء، أجد :

أ بعد كم يوم يبقى من الكومة ١١٢م^٣ من الرمل؟

ب بعد كم يوم تنفذ كمية الرمل نهائياً؟

٥ إذا أدخلنا ن من الأوساط الحسابية بين ١ ، ٣٧ وكانت النسبة بين الوسط الحسابي الخامس والوسط الحسابي الذي ترتيبه (ن – ٢) هي ٤ : ٧ فما قيمة ن؟

٥ - ٤ مجموع المتسلسلة الحسابية Arithmetic Series Sum

نشاط ١: صدر قانون العمل الفلسطيني؛ ليحفظ للعامل حقوقه، لذا يتوجب على كل عامل فلسطيني قراءته حتى يكون على دراية بحقوقه وواجباته.

في مشغل للنسيج يعمل لدى علي ٥ عاملات برواتب شهرية يوضّحها الجدول الآتي:

رقم العاملة	١	٢	٣	٤	٥
راتب العاملة (بالدينار)	٢٨٠	٣٠٠	٣٢٠	٣٤٠	٣٦٠

برأيك هل تتوافق هذه الرواتب مع قانون العمل الفلسطيني ؟

هل تشكل هذه الرواتب متتالية حسابية؟ لماذا؟

أراد علي معرفة المبلغ الذي سيرصده ليعطي كل عاملة راتبها في نهاية الشهر، فقام بجمع المبالغ كالتالي ٢٨٠ + ٣٠٠ + ٣٢٠ + ٣٤٠ + ٣٦٠ = ...

أتعلم: مجموع أول ن حدٍ من حدود المتسلسلة الحسابية التي حدّها الأول (أ) وحدّها الأخير (ل)

هو $جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$

ويمكن استنتاج صورة أخرى للمجموع، وذلك بوضع ل = أ + (ن - ١) د

$$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١) د]$$

أفكر وأناقش: كيف يمكن اثبات الصيغتين السابقتين؟

مثال ١ : أجد مجموع أول ١٥ حدّاً من المتسلسلة ٢٠ + ١٦ + ١٢ + ...

الحل : أ = ٢٠ ، د = ١٦ − ٢٠ = −٤ ، ن = ١٥

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (٢أ + (ن − ١) × د)$

$= \frac{١٥}{٢} (٤٠ + ١٤ × −٤) = −١٢٠$

نشاط ٢: بدأ موظف فلسطيني حياته العملية براتب سنوي قدره ٥٠٠٠ دينار، وكان يأخذ علاوةً سنويةً ثابتةً قدرها ٢٠٠ دينار.

١ كم يصبح راتبه في السنة العشرين؟

٢ ما مجموع المبالغ التي تقاضاها خلال هذه الفترة؟

١ تكون الرواتب السنوية المتتالية: ٥٠٠٠ ، ٥٢٠٠ ، ٥٤٠٠،.........

متتالية حسابية فيها أ = ... ، د = ...

راتب الموظف في السنة العشرين هو: $ح_{٢٠}$ = أ + ١٩ د = ... = ٨٨٠٠ ديناراً.

٢ $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل) = ... = ١٣٨٠٠٠ ديناراً.

مثال ٢ : أجد قيمة $\sum_{ر=١}^{٦٠}$ (١٠ − ر)، وأتحقق من الحل باستخدام برنامج Microsoft Mathematics:

الحل : المجموع = (١٠ − ١) + (١٠ − ٢) + (١٠ − ٣) + ... + (١٠ − ٦٠)

= ٩ + ٨ + ٧ + ... + (−٥٠)

أ = ٩ ، ل = −٥٠ ، ن = ٦٠

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

$= \frac{٦٠}{٢} × (٩ − ٥٠) = ٣٠ × −٤١ = −١٢٣٠$

وللتحقق من الحل ندخل $\sum_{n=1}^{60} (10 - n)$ باختيار Calculus ثم اختيار أيقونة المجموع ($\sum$)، ثم الضغط على Enter .

مثال ٣ : أجد مجموع الأعداد المحصورة بين ١ و ١٠٠ والتي يقبل كل منها القسمة على ٧.

الحل : مجموع الأعداد= (٧ × ١) + (٧ × ٢) + (٧ × ٣) + ... (٧ × ١٤)

يكون متسلسلة حسابية فيها أ = ٧ ، ل = ٩٨، ن = ١٤

$$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢} (أ + ل) = ٧ \times (٧ + ٩٨) = ٧ \times ١٠٥ = ٧٣٥$$

مثال ٤ : إذا كان مجموع أول ن حدٍّ من حدود متسلسلة حسابية يعطى بالعلاقة $جـ_{ن} = ن \times (٢ن + ١)$

أجد هذه المتسلسلة.

الحل : $ح_{١} = جـ_{١} = ١ \times (٢ + ١) = ٣$ (لماذا؟)

$ح_{٢} = جـ_{٢} - جـ_{١} = ٢ \times ٥ - ٣ = ٧$

أ = ٣، د = ٧ - ٣ = ٤

المتسلسلة، هي: ٣ + ٧ + ١١ + ...

تمارين ومسائل ٥ - ٤

١ أجد مجموع أول ٢٠ حدٍّ من المتسلسلة ٣٠ + ٢٧ + ٢٤ + ...

٢ أجد المتسلسلة الحسابية التي مجموع الحدود العشرة الأولى منها ١٢٠ ومجموع الحدود الستة التالية لها ١٦٨.

٣ متسلسلة حسابية حدّها الأول ٧ و حدّها الأخير (-١٢) و مجموع حدودها (-٥٠) أجد المتسلسلة.

٤ متسلسلة حسابية تتكون من ٢٥ حدّاً، حدّها الأوسط يساوي ٣٨، ومجموع الحدود الثلاثة الأخيرة منها يساوي ٢١٣. أجد المتسلسلة، وأجد مجموعها.

٥ أثبت أن

$$\frac{\sum_{ر=١}^{٢ن} (٦ + ٤ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} (١ + ٢ر)} = ٨$$

٥ – ٥ المتتالية الهندسية Geometric Sequence

نشاط ١: يعتبر النحل من مصادر الثروة الحيوانية في فلسطين، ويُعنى بعض المزارعين في مناطق الريف الفلسطيني بتربية النحل، ولزيادة إنتاج العسل يتم فصل خلية النحل كل عام إلى خليتين، وفي العام التالي يتم فصل الخليتين لتصبحا أربع خلايا وهكذا ...

ألاحظ أن ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ... هي حدود المتتالية التي تمثل عدد خلايا النحل

وألاحظ كذلك أن نسبة $ح_{٢}$ إلى $ح_{١}$ = ٢ و نسبة $ح_{٣}$ إلى $ح_{٢}$ = ...

ونسبة $ح_{٤}$ إلى $ح_{٣}$ = ... ماذا ألاحظ؟

تعريف: تسمى المتتالية متتاليةً هندسيةً،إذا كانت النسبة بين كل حدّ والحدّ السابق له مباشرة، تساوي مقداراً ثابتاً، ويسمى المقدار الثابت أساس المتتالية الهندسية، ويرمز له بالرمز (ر).

ويمكن كتابة حدود المتتالية الهندسية التي حدّها الأول (أ) وأساسها (ر) على الصورة

أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، ......، وعليه، فإن الحدّ العام يعطى بالقاعدة: $ح_{ن}$ = أ ر$^{ن-١}$

نشاط ٢: أميز المتتالية الهندسية عن غيرها من المتتاليات الآتية، ثم أكتب الحدّ العام للمتتالية الهندسية منها:

١ ٢، ٦، ١٨، ......

٢ ٣٢، ٨، ٢، ......

٣ ١، ٤، ٦، ....

٤ س ، س^{٣} ، س^{٥} ، ..... : س ≠ ٠

١ ألاحظ أن $\frac{٦}{٢} = \frac{١٨}{٦} = ٣$ إذن المتتالية هندسية، الحد العام $ح_{ن}$ = ...

٢ ....، الحد العام $ح_{ن}$ = ...

٣ ألاحظ أن $\frac{٤}{١} \neq \frac{٦}{٤}$ المتتالية ليست هندسية.

٤ ....

مثال ١ : أجد الحدّ السادس من المتتالية الهندسية ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ،.........

الحل : أ = ٥ ، ر = $\frac{١٠}{٥}$ = ٢ ، $ح_٦$ = ٥ × $٢^٥$ = ١٦٠

مثال ٢ : إذا كان ١٥٣٦ هو أحد حدود المتتالية الهندسية : ٣ ، ٦ ، ١٢ ،... فما رتبة هذا الحدّ؟

الحل : أ = ٣ ، ر = $\frac{٦}{٣}$ = ٢ ، $ح_ن$ = ١٥٣٦ ، ن = ؟

$ح_ن$ = أ $ر^{ن-١}$

١٥٣٦ = ٣ × $٢^{ن-١}$ بالقسمة على ٣ ⇐ $٢^{ن-١}$ = ٥١٢ ∴ $٢^{ن-١}$ = $٢^٩$.

ومنها ن − ١ = ٩ ∴ ن = ١٠

نشاط ٣: تريد شركة استشارية فلسطينية إنشاء برج للإسكان، إذا علم أن ثمن بيع الشقة السكنية في الطابق الأول ٥٠٠٠٠ دينار، وأن ثمن الشقة في أي طابق يقل بنسبة ٢٪ عن ثمنها في الطابق الذي تحته مباشرة. أجد ثمن الشقة في الطابق السادس.

أ = ٥٠٠٠٠ ، ر = ...

ثمن الشقة في الطابق السادس هو $ح_٦$ = أ × $ر^٥$ = ...

مثال ٣ : مجموع الحدود الثلاثة الأولى من متتالية هندسية يساوي ٢١، ومجموع الحدود الثلاثة التي تليها مباشرة = ١٦٨، فما المتتالية ؟

الحل : $ح_١$ + $ح_٢$ + $ح_٣$ = ٢١

⇐ أ + أ ر + أ $ر^٢$ = ٢١

∴ أ (١ + ر + $ر^٢$) = ٢١ .... (١)

$ح_٤$ + $ح_٥$ + $ح_٦$ = ١٦٨

$\Leftarrow$ أ ر^٣ + أ ر^٤ + أ ر^٥ = ١٦٨

$\therefore$ أ ر^٣(١ + ر + ر^٢) = ١٦٨ .... (٢)

بقسمة (٢) على (١) ينتج أن ر^٣ = ٨ ومنها ر = ٢

بالتعويض عن ر = ٢ في المعادلة رقم (١) ينتج أ = ٣

ومنها المتتالية هي: ٣ ، ٦ ، ١٢ ،...

مثال ٤ : إذا كانت س + ٣ ، ٤ ، س − ٣ تكون متتالية هندسية: فما قيمة / قيم س؟

الحل : $\frac{٤}{س + ٣} = \frac{س - ٣}{٤} \Leftarrow$ (س − ٣)(س + ٣) = ١٦

س^٢ − ٩ = ١٦ $\Leftarrow$ س^٢ = ٢٥ ، س = ± ٥

تعريف: الوسط الهندسي للعددين أ ، ب اللذين لهما الإشارة نفسها هو جـ = ± $\sqrt{أ \times ب}$

ألاحظ أ ، جـ ، ب تشكل متتالية هندسية.

مثال ٥ : أدخل ٤ أوساط هندسية بين ٢٤٣ ، ١

الحل : ٢٤٣ ، س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، س$_٤$ ، ١ تكون متتالية هندسية فيها

أ = ٢٤٣ ، ح$_٦$ = أ ر^٥ = ١

٢٤٣ ر^٥ = ١ $\Leftarrow$ ر^٥ = $\frac{١}{٢٤٣}$ ومنها ر = $\frac{١}{٣}$

إذن الأوساط الهندسية هي: ٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ٣

تمارين ومسائل ٥ - ٥

١ أجد الحدّ السابع من المتتالية الهندسية ٣ ، -٩ ، ٢٧ ، ....

٢ متتالية هندسية مجموع حدّيها الأول والثاني ١٢، ومجموع حدّيها الثالث والرابع يساوي ١٠٨. أجد هذه المتتالية.

٣ ثلاثة أعداد تكون متتاليةً هندسيةً مجموعها ٣٥، إذا أضيف إلى العدد الثاني ٦ وإلى العدد الثالث ٧ تكونت متتاليةً حسابيةً، أجد هذه الأعداد.

٤ عاملان بدأ كل منهما العمل براتب سنوي قدره ٥٠٠٠ دينار، وكان الأول يحصل على علاوة سنوية ثابتة قدرها ٥٠ ديناراً، والثاني يحصل على علاوة سنوية قدرها ٥ ٪ من راتبه في السنة السابقة، أجد راتب كل منهما في السنة الخامسة والعشرين من بدء العمل. وكم يجب أن تكون العلاوة السنوية للأول حتى يتساوى راتبه مع راتب زميله في تلك السنة؟

٥ - ٦ المتسلسلة الهندسية المنتهية، ومجموعها Finite Geometric Series and Sum

نشاط ١: تعاني معظم التجمعات السكانية الفلسطينية من نقص في مياه الشرب؛ بسبب سياسات الاحتلال الصهيوني التي تسيطر على المياه الجوفية الفلسطينية، ولعلاج النقص الحاصل قام المجلس المحلي لتلك القرية ببناء خزان ماء سعته ٥٠٠٠ م^{٣}، ضخ فيه في اليوم الأول ٦٠٠ م^{٣} وفي اليوم الثاني ضخ فيه ثلثا الكمية التي ضخت في اليوم الأول، وفي اليوم الثالث ضخ فيه ثلثا كمية المياه التي ضخت في اليوم الثاني وهكذا ...

كمية الماء التي ضخت في الأيام الخمسة الأولى: ....

ما مجموع المتسلسلة أ + أ ر + أ ر^{٢} + ... + أ ر$^{ن-٢}$ + أ ر$^{ن-١}$

حيث أ هو الحدّ الأول، ر أساس المتتالية الهندسية؟

للإجابة عن هذا السؤال سوف نرمز للمجموع بالرمز = جـ$_{ن}$

جـ$_{ن}$ = أ + أ ر + أ ر^{٢} + ... + أ ر$^{ن-٢}$ + أ ر$^{ن-١}$ .... (١)

بالضرب في ر ينتج أن جـ$_{ن}$ × ر = أ ر + أ ر^{٢} + أ ر^{٣} + ... + أ ر$^{ن-١}$ + أ ر^{ن} ..... (٢)

وبطرح المعادلتين يكون:

جـ$_{ن}$ − جـ$_{ن}$ ر = أ − أ ر^{ن}

أي أن: جـ$_{ن}$ (١ − ر) = أ (١ − ر^{ن})

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{ن})}{١ - \text{ر}} \quad ، \quad \text{ر} \neq ١$$

أفكر وأناقش: عندما ر = ١ فإن جـ$_{ن}$ = أ ن

أتعلم: مجموع أول ن حدٍ من حدود متسلسلة هندسية حدّها الأول أ، وأساسها ر يعطى بالقاعدة:

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{\text{أ} - \text{ل ر}}{١ - \text{ر}}$$ ، حيث ل الحدّ الأخير.

ألاحظ أنه يمكن كتابة: $\text{جـ}_{ن} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{ن})}{١ - \text{ر}}$ ، ر ≠ ١ بالصورة الآتية:

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{ن} - ١)}{\text{ر} - ١} \quad ، \quad \text{ر} \neq ١ \quad \text{(لماذا؟)}$$

مثال ١ : أجد مجموع أول ٨ حدود من حدود المتتالية الهندسية : ٢ ، ٦ ، ١٨ ،.......

الحل : أ = ٢ ، ر = ٣ ، ن = ٨

$$جـ_٨ = \frac{٢ \times (١ - ٣^٨)}{١ - ٣} = ٦٥٦٠$$

نشاط ٢: أجد مجموع أول ٦ حدود من المتتالية الهندسية : ٨ ، ٤ ، ٢ ....

أ = ... ، ر = ... ، ن = ...

$$جـ_٦ = \frac{أ(ر^٦ - ١)}{ر - ١}$$

جـ$_٦$ = ... ؟

مثال ٢ : متتالية هندسية حدّها الخامس ١٦ ، وحدّها الثامن ١٢٨ ، أجد:

١ المتتالية.

٢ مجموع الحدود السبعة الأولى منها.

الحل :

١ ح$_٥$ = ١٦ ، أ ر^٤ = ١٦ .... (١)

ح$_٨$ = ١٢٨ ومنها أ ر^٧ = ١٢٨ .... (٢)

وبقسمة (٢) على (١) ينتج أن: $\frac{أ ر^٧}{أ ر^٤} = \frac{١٢٨}{١٦} \Leftarrow$ ر^٣ = ٨ ومنها ر = ٢

بالتعويض في المعادلة (١) ينتج أن ١٦ أ = ١٦ ومنها أ = ١

المتتالية هي ١ ، ٢ ، ٤ ،..............

٢ $$جـ_٧ = \frac{١ \times (١ - ٢^٧)}{١ - ٢} = \frac{١ \times (١ - ١٢٨)}{-١} = ١٢٧$$

مثال ٣ : إذا كان مجموع حدود متسلسلة هندسية ٥١٠ وكان حدّها الأول يساوي ٢ وحدها الأخير ٢٥٦ أجد المتتالية.

الحل :
$جـ_ن = ٥١٠ ، أ = ٢ ، ل = ٢٥٦ ، ر = ؟$

$$جـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} \Leftarrow \frac{٥١٠}{١} = \frac{٢ - ٢٥٦ ر}{١ - ر}$$

$\therefore$ $٥١٠ - ٥١٠ ر = ٢ - ٢٥٦ ر$

$\therefore$ $٢٥٤ ر = ٥٠٨$ $\therefore$ $ر = ٢$

$\therefore$ المتتالية هي : ٢ ، ٤ ، ٨ ، ....

نشاط ٣: إذا كان مجموع ن حد من متسلسلة هندسية = ٣٦٤ وحدّها الأول = ٢٤٣ وحدّها الأخير = ١ ، أكتب أول ثلاثة حدود منها.

$جـ_ن = ٣٦٤ ، أ = ٢٤٣ ، ل = ١ ، ر = ؟$

$$جـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر} = ...$$

ومنها $٣٦٣ ر = ١٢١$ ومنها $ر = \frac{١}{٣}$

$ح_١ = ٢٤٣ ، ح_٢ = ٨١ ، ح_٣ = ٢٧$

مثال ٤ : أجد عدد الحدود التي يمكن أخذها من المتسلسلة ٣ + ٦ + ١٢ + ... ابتداءً من الحدّ الأول ليكون مجموعها يساوي ٩٣ ؟

الحل :
$أ = ٣ ، ر = ٢ ، جـ_ن = ٩٣ ، ن = ؟$

$$جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$$

$$٩٣ = \frac{٣ \times (٢^ن - ١)}{٢ - ١}$$

$\Leftarrow$ $٩٣ = \frac{٣ \times (٢^ن - ١)}{١}$ بالقسمة على ٣ ينتج أن:

$٢^ن - ١ = ٣١$ $\Leftarrow$ $٢^ن = ٣٢$ $\Leftarrow$ $٢^ن = ٢^٥$ ومنها $ن = ٥$

تمارين ومسائل ٥ - ٦

١ إذا كان الحدّ الأول من متسلسلة هندسية = ١، والحدّ الأخير = ٦٤، ومجموع حدودها = ٨٥، أجد أساسها.

٢ مجموع متسلسلة هندسية = ٣٩٠٥، وحدّها الأخير = ٣١٢٥، وأساسها = ٥، فما حدّها الأول؟ وما عدد حدودها؟

٣ أجد $\sum_{ر=١}^{١٠} ٣^{ر-٨}$ ، وأتحقق باستخدام برنامج Microsoft Mathematics .

٤ متسلسلة هندسية جميع حدودها موجبة، والوسط الحسابي لحدّيها الثاني والرابع يساوي ٥ ووسطها الهندسي يساوي ٤، أجد المتسلسلة، ثم أجد مجموع الحدود العشرة الأولى منها.

٥ تسقط كرة من ارتفاع ٨م بحيث كلما تصطدم بالأرض في كل مرة يقل ارتفاعها بمقدار ربع ارتفاعها السابق، أجد :

أ ارتفاع الكرة بعد الصدمة السادسة.

ب بعد كم صدمة يكون مجموع ارتفاعاتها يساوي $\frac{٧٨١}{٣٢}$ م.

٦ يتأرجح بندول بحيث يصنع في أول تأرجح قوسا طوله ٨,١ سم، وكان طول القوس في كل تأرجح لاحق يساوي ثُلث طوله في التأرجح السابق، أجد مجموع المسافات التي قطعها البندول في نهاية التأرجح الخامس.

تمارين عامة

١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما الحدّ العام للمتتالية ١ ، -١ ، ١ ، -١ ، ... ؟

أ) $ح_ن = (-١)^ن$ ب) $ح_ن = (-١)^{ن+١}$

جـ) $ح_ن = ن^ن$ د) $ح_ن = (-ن)^ن$

٢ ما قيمة $ح_{١٠١}$ في المتتالية التي حدّها العام $ح_ن$ = جا $(\frac{ن\pi}{٤})$ ؟

أ) -١ ب) $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ د) $\frac{١}{٢}$

٣ ما مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{١٧٥} (-١)^{ر+١}$ ؟

أ) -١ ب) ٠ جـ) ١ د) ٢

٤ ما قيمة $\frac{\sum_{ر=١}^{١٠٠} ر^٢}{\sum_{ر=١}^{١٠٠} ر}$ ؟

أ) ٦٧ ب) ٧٠ جـ) ٨٠ د) ١٠٠

٥ ما رتبة الحدّ الذي قيمته -٣٢ في المتتالية ٤ ، ٢ ، ٠ ، ...

أ) ١٨ ب) ١٩ جـ) ٢٠ د) ٢١

٦ ما المتتالية الحسابية من بين المتتاليات التي حدّها النوني $ح_ن$ (أ ≠ صفر)؟

أ) $ح_ن$ = أن + ب ب) $ح_ن$ = $أن^٢$ + ب

جـ) $ح_ن$ = أ × $٢^ن$ + ب د) $ح_ن$ = $أن^٣$ + ب

٧ ما مجموع المتتالية الحسابية التي حدّها الأول = ٣، وحدّها الأخير = ١٣، وعدد حدودها = ٦؟

أ) ٤٢ ب) ٤٤ جـ) ٤٦ د) ٤٨

٨ ما رتبة الحدّ الذي قيمته -٥١٢ في المتتالية -٨ ، ١٦ ، -٣٢ ، ......

أ) ٦ ب) ٧ جـ) ٨ د) ٩

٩ متتالية هندسية فيها $ح_٣$ = ١٢ ، $ح_٥$ = ٤٨، ما قيمة حدّها الأول؟

أ) -١٢ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤

١٠ إذا كان مجموع أول ن حداً من متتالية هندسية يعطى بالعلاقة $جـ_{ن} = ٢^{ن+٢} - ٤$، ما قيمة $ح_{٥}$ ؟

أ) ١٦ ب) ٣٢ جـ) ٦٤ د) ١٢٨

٢ أجد أساس المتتالية الهندسية التي حدّها الأول = ٣ ، وحدّها الأخير ١٥٣٦ و مجموع حدودها ٣٠٦٩

٣ في المتتالية الهندسية : ٢ ، ٤ ، ٨ ، ... أجد مجموع ثمانية حدود ابتداءً من الحد الخامس.

٤ إذا كان ب هو الوسط الحسابي للعددين أ ، جـ أثبت أن: $\frac{ب + ٢أ}{ب - جـ} + \frac{ب + ٢جـ}{ب - أ} = ٤$

٥ أجد مجموع ٢٥ حداً الأولى من المتتالية التي حدها العام $ح_{ن} = \begin{cases} ٢ن + ١ ، & ن \in \{١، ٣، ٥، ...\} \\ ٥ن + ١ ، & ن \in \{٢، ٤، ٦، ...\} \end{cases}$

٦ إذا أدخلنا أربعة أوساط هندسية بين عددين، وكان الوسط الرابع يزيد عن الثاني بمقدار ٨٤ ، والوسط الثالث ٥٦، أجد هذه الأوساط.

٧ إذا كان مجموع الحدود الستّة الأولى من متتالية هندسية يساوي ٩ أمثال مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها، وإذا كان حدّها العاشر = ٦٤ فما المتتالية؟

٨ خزان ماء سعته ٦٢,٥ م^{٣}، يضخ منه خُمس كمية الموجودة فيه يومياً، أجد كمية الماء التي تبقى في الخزان بعد ستة أيام.

أقيّم ذاتي أكمل الجدول الآتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	متدني
أميّز بين أنواع المتتاليات			
أجد أي حد لمتتالية			
أوظف المتسلسلات في حل مشكلات حياتية			

فكرة رياديّة

ضمن خطة الحكومة لدعم صمود أهلنا في القدس «العاصمة الأبدية لفلسطين» وإيجاد فرص عمل للعاطلين عن العمل، عرضت عليك اللجنة المكلفة مشروعاً لإنشاء مصنع صغيرٍ لإنتاج الحليب ومشتقاته. يراد استخدام ماكنات لديها في أربعة خطوط إنتاج: خط لإنتاج الحليب، خط لإنتاج اللبن، خط لإنتاج اللبنة، وخط لإنتاج الجبنة، بدأت مشروعك بثلاث ماكنات، اعمل دراسة عن هذا المشروع موضحا ما يلي:

الفرص (عدد العبوات التي يمكن إنتاجها يوميا من كل ماكنة)	التكلفة اليومية	الربح المتوقع	المخاطر التهديدات	نقاط القوة	مؤشرات النجاح	نقاط الضعف
.						
.						
.						
.						
.						
.						

روابط إلكترونية

- http://www.coolmath.com/algebra/-19sequences-series/-07geometic-sequences01-
- http://www.mathsisfun.com/algebra/sequences-series.html

الوحدة
٦

القطوع المخروطية

أناقش العبارة:
تُطلَق الأقمار الصناعية في الفضاء فلا تضيع فيه ولا تسقط نحو الأرض.

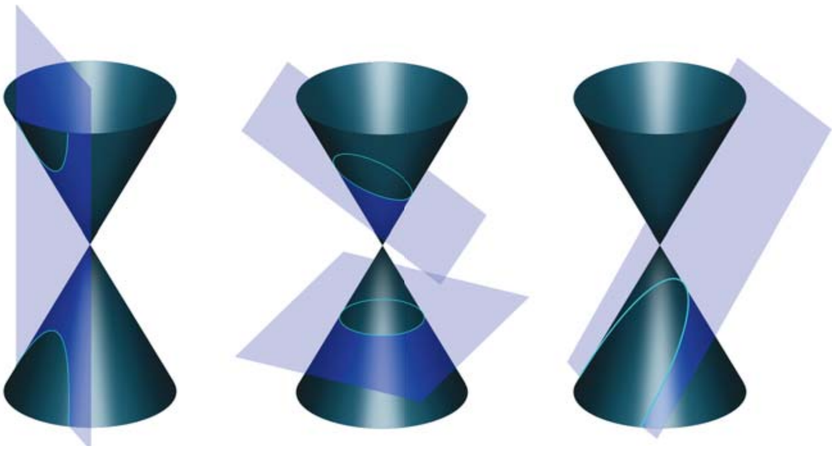
يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف القطوع المخروطية في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

1. التعرف على القطع المكافئ، وكتابة معادلته في الوضع القياسي، وتعيين: بؤرته، ودليله، ومحور تماثله.
2. التعرف على القطع الناقص، وكتابة معادلته في الوضع القياسي، وتعيين: بؤرتيه، ورأسيه، ومحوريه الأكبر والأصغر، وطوليهما، واختلافه المركزي.
3. التعرف على القطع الزائد، وكتابة معادلته في الوضع القياسي، وتعيين: بؤرتيه، ورأسيه، ومعادلتي محوريه، والقاطع والمرافق وطوليهما، واختلافه المركزي.
4. تمثيل القطوع المخروطية بيانياً في الوضع القياسي.
5. حل مسائل تطبيقية على القطوع المخروطية.
6. توظيف برامج حاسوبية لرسم منحنيات القطوع المخروطية.

القطوع المخروطية Conic Sections

القطع المخروطي هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى الديكارتي ضمن شروط محددة، وهذه القطوع هي: الدائرة والقطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد.

وسنركز هنا على دراسة القطوع المخروطية الثلاث، وهي: المكافئ، والناقص، والزائد، ونترك دراسة الدائرة التي سبق لنا ودرسناها في صفوف سابقة، وسنقتصر في هذه الوحدة على دراسة القطوع المخروطية الثلاث في الوضع القياسي، وهذا ما سنوضحه لاحقاً. أنظر الشكل الآتي:



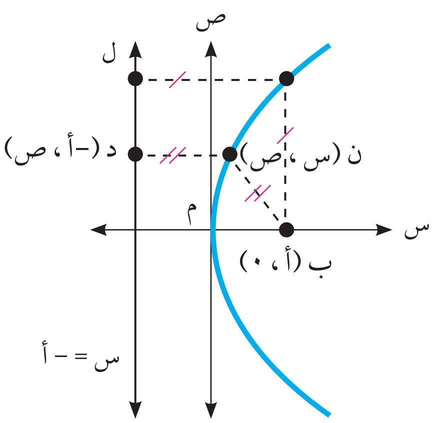
٦ - ١ القطع المكافئ Parabola

نشاط ١: أصبح العالم اليوم قرية صغيرة بفضل الاتصالات والأقمار الصناعية، وإذا نظرت إلى أحد صحون البث للأقمار الصناعية فإن أحد مقاطع هذا الصحن هو قطع مكافئ، كما في الشكل المجاور، وللقطع المكافئ تطبيقات كثيرة في البصريات مثل النظارات الطبية، وفي مرايا السيارات ومصابيحها الأمامية، والفيزياء مثل: .... ، والهندسة في التصميم المعماري، مثل: ....، ومجالات أخرى.

القطع المكافئ: هو المحل الهندسي للنقطة ن(س، ص) التي تتحرك في المستوى بشرط أن يكون بُعْدها عن نقطة ثابتة ب يساوي بعدها عن مستقيم معلوم ل. تسمى النقطة الثابتة ب البؤرة، ويسمى المستقيم المعلوم ل الدليل.

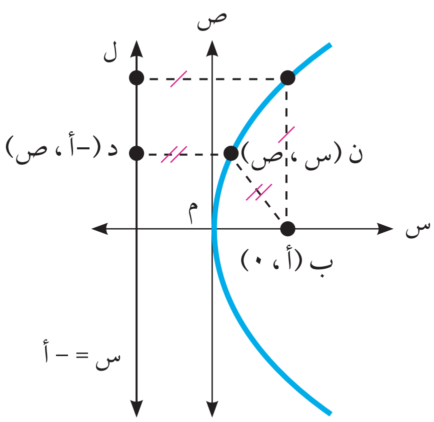
يلاحظ من الشكل أن القطع المكافئ متماثل حول المستقيم المار بالبؤرة ب والعمودي على الدليل $\overleftrightarrow{ل}$ ، ويسمى هذا المستقيم محور القطع، وتسمى النقطة م الواقعة في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل رأس القطع، وكما تسمى المسافة بين الرأس والبؤرة بالبعد البؤري.

سنقتصر في هذه الوحدة على دراسة القطع المكافئ في الوضع القياسي، والذي يكون فيه الرأس نقطة الأصل، ومحور التماثل أحد المحورين الإحداثيين، وهناك أربعة أوضاع ينتج عنها أربع معادلات للقطع المكافئ، تختلف تبعاً لاتجاه فتحة هذا القطع.



الحالة الأولى: القطع المكافئ مفتوح لليمين

الرأس (٠ ، ٠) وتقع البؤرة على الجزء الموجب لمحور السينات أي أن إحداثيات البؤرة ب (أ ، ٠)، أ > ٠ وبالاستعانة بالشكل المجاور، وحسب تعريف القطع المكافئ فإن:



ن ب = ن د

أي أن: $\sqrt{(س - أ)^2 + (ص - ٠)^2} = \sqrt{(س + أ)^2 + (٠)^2}$

إذن معادلة هذا القطع المكافئ : ص^2 = ٤ أ س (لماذا؟)

نشاط ٢: إليك القطع المكافئ الذي معادلته ص^2 = ٨ س ،

١ أملأ الجدول كما هو مطلوب :

الرأس	البؤرة	معادلة الدليل	معادلة محور تماثل القطع	البعد البؤري
(٠ ، ٠)			ص = ٠	

ألاحظ أن ص^2 = ٨ س هي معادلة القطع المكافئ القياسي الذي فتحته لليمين، ومحور تماثله هو محور السينات.

لإيجاد البؤرة : نجعل ٤ أ = ٨ ومنها أ = ٢

٢ أرسم منحنى هذا القطع.

مثال ١ : أكتب معادلة القطع المكافئ القياسي الذي بؤرته (٣، ٠) ، ثم أجد معادلة دليله.

الحل : بما أن البؤرة (٣ ، ٠) فإن القطع مفتوح لليمين. إذن معادلته ص^2 = ٤ أ س

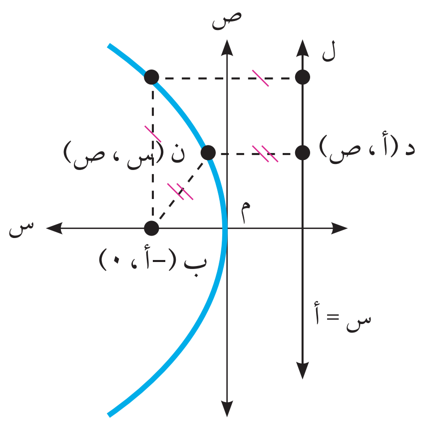
وكذلك بما أن البؤرة (٣ ، ٠) فإن أ = ٣

أي أن معادلته هي ص^2 = ١٢ س معادلة دليله هي س = −٣

الحالة الثانية: القطع المكافئ مفتوح لليسار

الرأس (٠ ، ٠) وتقع البؤرة على الجزء السالب من محور السينات أي أن: ب (−أ ، ٠) ، أ > ٠

والمعادلة في هذه الحالة هي: ص^{٢} = −٤أ س (لماذا؟)



نشاط ٣: أكتب معادلة القطع المكافئ القياسي الذي بؤرته ب (−٣ ، ٠)

البؤرة (−٣ ، ٠) تقع على محور ....

الثابت أ = ...

القطع المكافئ مفتوح لليسار، معادلة القطع المطلوبة هي : ....

مثال ٢ : أكتب معادلة القطع المكافئ القياسي الذي معادلة دليله س = ٤ .

الحل : بما أن القطع المكافئ بالصورة القياسية، إذن رأسه نقطة الأصل.

وبما أن معادلة دليله س = ٤ إذن القطع المكافئ مفتوح لليسار، أ = ٤

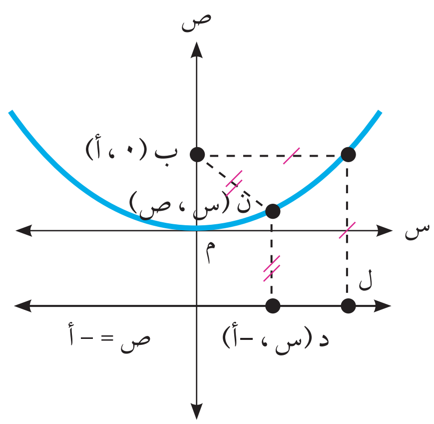
إذن معادلة القطع المكافئ هي : ص^{٢} = −٤ أ س   إذن ص^{٢} = −١٦ س

الحالة الثالثة: القطع المكافئ مفتوح للأعلى

الرأس (٠ ، ٠) وتقع البؤرة على الجزء الموجب من محور الصادات

أي أن ب (٠ ، أ) ، أ > ٠

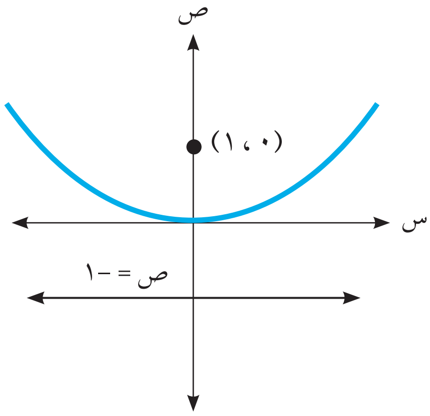
والمعادلة في هذه الحالة هي: س^{٢} = ٤أ ص (لماذا؟)



نشاط ٤ : اعتماداً على الشكل المجاور، أملأ الجدول الآتي:

محور التماثل	دليل القطع	البعد البؤري	معادلة القطع
	ص = -١		

ألاحظ أن القطع المكافئ قياسي رأسه م (٠،٠)
وبؤرته ب (٠، ١)

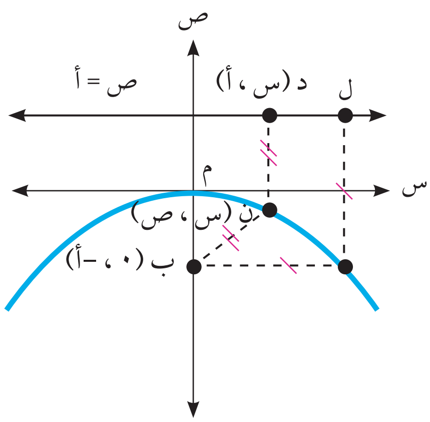


مثال ٣ : ما إحداثيات البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ الذي معادلته: س^{٢} = ٢٠ ص

الحل : س^{٢} = ٢٠ ص هي معادلة قطع مكافئ مفتوح للأعلى
٤أ = ٢٠ ومنها أ = ٥ ومنها البؤرة (٠ ، ٥)، ومعادلة الدليل ص = -٥

الحالة الرابعة: القطع المكافئ مفتوح للأسفل

الرأس (٠ ، ٠) و تقع البؤرة على الجزء السالب من محور الصادات
أي أن: ب (٠ ، - أ)، أ > ٠
والمعادلة في هذه الحالة هي: س^{٢} = -٤أ ص



مثال ٤ : قطع مكافئ رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (٠ ، -٣)
أجد معادلته، ومعادلة دليله.

الحل : بما أن البؤرة (٠ ، -٣)
إذن معادلته هي: س^{٢} = -٤أ ص ، أ > ٠
و بما أن أ = ٣ فإن س^{٢} = -١٢ ص، ومعادلة دليله هي ص = ٣

نشاط ٥: ما المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى

حيث أن س = جتا هـ ، ص = ١ + جتا ٢هـ ؟

س = جتاهـ إذن $س^٢$ = ...

نعلم أن جتا ٢هـ = ٢$جتا^٢$هـ − ١

لكن ص = ١ + جتا ٢هـ

إذن ص = ١ + ...

= ....

= ٢$س^٢$

∴ $س^٢$ = ...

إذن المحل الهندسي للنقطة المتحركة حسب الشروط المعطاة، هو قطع مكافئ صادي مفتوح للأعلى.

تمارين ٦ - ١

١ أجد كلاً من: الرأس، و البؤرة، ومعادلة الدليل، ومعادلة محور التماثل، لكل من القطوع المكافئة الآتية:

أ $ص^٢$ = −٤ س

ب $س^٢$ = −٨ ص

٢ أجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) ويمر بالنقطة (−٣ ، ٦) ومحور تماثله محور السينات.

٣ قطع مكافئ رأسه (٠ ، ٠) ومفتوح لجهة اليمين، فإذا كانت النقطة ($س_١$ ، ٦) الواقعة عليه تبعد عن بؤرته ١٠ وحدات، أجد معادلة هذا القطع؟

٤ قطع مكافئ قياسي يمر بالنقطة (٢ ، ٨). أكتب معادلته (أكتب جميع الحالات الممكنة).

٥ تتحرك النقطة و (س ، ص) في المستوى بحيث أن موقعها يتحدد بالمعادلتين

س = $\frac{٤}{ظا^٢(٢هـ) + ١}$ ، ص = ١ − ٢$جا^٢$ هـ ، أكتب معادلة المحل الهندسي للنقطة.

٦ - ٢ القطع الناقص The Ellipse

نشاط ١: ماجد وعبد الرزاق طالبان في الفرع الصناعي تخصص نجارة في مدرسة الخليل الصناعية طلب منهما المعلم صنع طاولة شكلها بيضاوي كما في الشكل المجاور، فدار بينهما الحوار الآتي:

ماجد: لقد تعلمنا رسم الدائرة من صغرنا فاستخدمنا أداة تسمى الفرجار وأتذكر حين خرجنا مع معلم الرياضيات ورسمنا دوائر في ساحة المدرسة مستخدمين الخيط والمسمار.

عبد الرزاق: نعم هذا سهل ولكن كيف نرسم الشكل البيضاوي؟

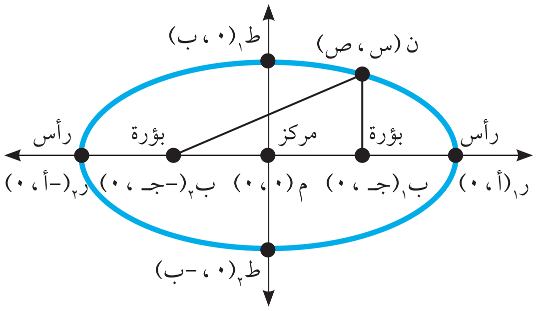
هل يمكن استخدام الطريقة نفسها؟

ماجد: لقد درسنا في العلوم في الصفوف السابقة أن الأرض تدور حول الشمس في مدار بيضاوي (إهليليجي) وإن لهذا الشكل بؤرتين تكون الشمس إحدى بؤرتيها.

عبد الرزاق: لقد خطرت لي فكرة، يمكن رسم الشكل البيضاوي باستخدام خيط ومسمارين دعنا نجرب.

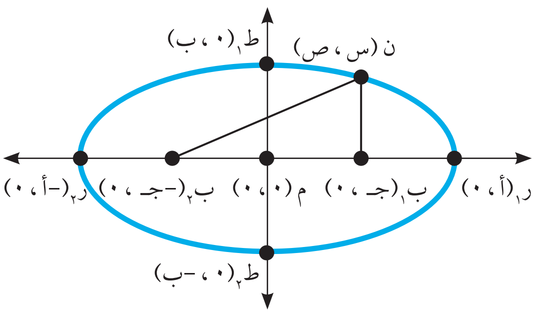
ترى ما هي الفكرة التي خطرت لعبدالرزاق ؟

تعريف: القطع الناقص هو المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) والتي تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتاً أكبر من البعد بينهما، تسمى النقطتان الثابتتان بالبؤرتين.



سنقتصر في هذا البند على الوضع القياسي للقطع الناقص وهو الوضع الذي يكون فيه المركز نقطة الأصل (٠ ، ٠)، ومحوراه ينطبقان على محوري الإحداثيات. وهناك حالتان للقطع الناقص:

الحالة الأولى: القطع الناقص السيني:



الشكل المجاور يمثل قطعاً ناقصاً سينياً، فيه:

١ البؤرتان : النقطتان ب$_{1}$(جـ ، ٠) ، ب$_{2}$(−جـ ، ٠)

٢ الرأسان: النقطتان ر$_{1}$ (أ ، ٠) ، ر$_{2}$(−أ ، ٠)

٣ المحور الأكبر وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين ر$_{1}$ ، ر$_{2}$ وطوله ن ب$_{1}$ + ن ب$_{2}$ = ٢أ ، أ > ٠

٤ المحور الأصغر وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين ط$_{1}$ (٠ ، ب) و ط$_{2}$(٠ ، −ب) وطوله = ٢ب ، ب > ٠

٥ المركز وهي النقطة م (٠ ، ٠) والتي تقع في منتصف المسافة بين البؤرتين.

٦ البعد البؤري وهو البعد بين البؤرتين ويساوي ٢جـ (جـ > ٠)

٧ الاختلاف المركزي هـ وهو النسبة بين البعد البؤري إلى طول المحور الأكبر ويرمز له بالرمز هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ < ١ (لماذا؟) ويبين مدى تفلطح الشكل البيضاوي (الإهليليجي).

٨ معادلة هذا القطع هي: $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ١$

حيث أ^{2} > ب^{2} ، جـ^{2} = أ^{2} − ب^{2}

مثال ١ : تتحرك النقطة و(س ، ص) في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين (∓٨ ، ٠) يساوي ٢٠ وحدة.

١ أكتب معادلة هذا المحل الهندسي.

٢ أمثّل هذا القطع بيانياً محدداً عليه جميع عناصره.

٣ أجد طول كل من محوريه واختلافه المركزي.

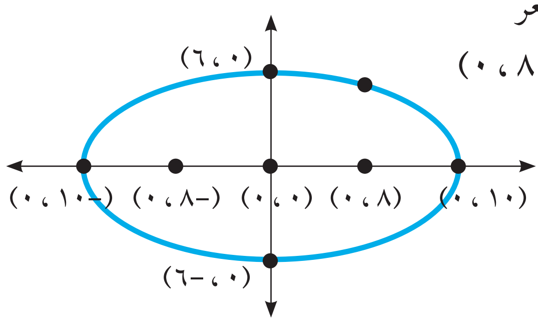
الحل :

١ المحل الهندسي يمثل قطعاً ناقصاً سينياً لأن النقطتين الثابتتين تقعان على محور السينات، فيه:
البؤرتان (∓ جـ ، ٠) = (∓٨ ، ٠) ومنها جـ = ٨ ، ٢أ = ٢٠ ومنها أ = ١٠ نجد قيمة ب:
$\text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{جـ}^2$ ، $\text{ب}^2 = ١٠٠ - ٦٤ = ٣٦$ ، اذن ب = ٦ .

معادلة هذا القطع هي: $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ١$ ، $\frac{\text{س}^2}{١٠٠} + \frac{\text{ص}^2}{٣٦} = ١$

٢ الرأسان (∓ ١٠ ، ٠)، طرفا المحور الأصغر
(٠ ، ∓ ٦) ، المركز (٠ ، ٠)، البؤرتان (∓ ٨ ، ٠)

٣ طول المحور الاكبر = ٢أ = ٢٠
طول المحور الأصغر = ٢ب = ١٢
الاختلاف المركزي هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٨}{١٠}$



نشاط ٢: لدى حميد النجار لوح خشبي مستطيل الشكل بعداه ٢٦٠سم، ١٠٠سم، أراد أن يقص منه شكلا على صورة قطع ناقص، طولا محوريه يساويان بعدي المستطيل، ليثبت عليه مرآة لتوضع في أحد المحلات التجارية ، ترى كيف تصرف النجار حميد ليرسم الشكل المناسب؟

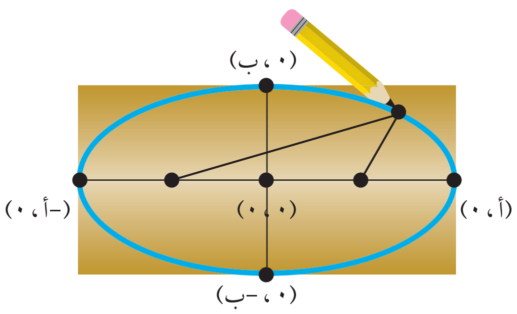
فكر حميد لبرهة من الزمن ، فنصف أضلاع اللوح في أربع نقاط ورسم منها محورين متعامدين كما في الشكل المجاور وأجرى الحسابات الآتية:

٢أ = ٢٦٠ ومنها أ = ...

٢ب = ... ومنها ب = ...

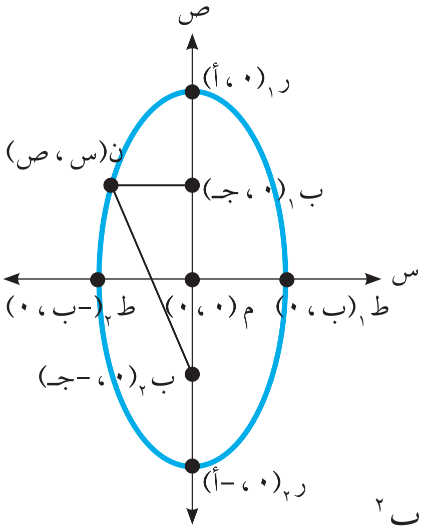
ولتحديد البورتين استخدم حميد العلاقة :

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$ ومنها حـ = ...



أحضر خيطا بطول مناسب وثبت طرفيه في النقطتين .... ، ....
وشده بقلم رصاص وحرك القلم والخيط مشدود فرسم القطع الناقص المطلوب
ما طول الخيط اللازم؟ وما معادلة القطع الناقص المرسوم؟

الحالة الثانية: القطع الناقص الصادي:



نشاط ٣: الشكل المقابل يمثل قطعاً ناقصاً صادياً:

١ مركزه هو ....

٢ رأساه هما ....

٣ بؤرتاه هما (٠ ، ∓ جـ)

٤ البعد البؤري = ...

٥ معادلة محوره الأكبر س = ٠ ، وطوله = ...

٦ معادلة محوره الأصغر .... ، وطوله = ...

٦ الاختلاف المركزي هـ = ...

٨ معادلة هذا القطع هي: $\frac{ص^2}{أ^2} + \frac{س^2}{ب^2} = ١$ ، أ^2 > ب^2

مثال ٢ : جد معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات رأسيه (٠ ، ± ١٠) وإحداثيات بؤرتيه (٠ ، ± ٨).

الحل : القطع الناقص هو صادي لأن البؤرتين تقعان على محور الصادات

أ = ١٠ ، جـ = ٨ ، ب^2 = أ^2 − جـ^2 ومنها ب^2 = ١٠٠ − ٦٤ = ٣٦ ، ب = ٦

المعادلة هي $\frac{ص^2}{أ^2} + \frac{س^2}{ب^2} = ١$ اذن $\frac{ص^2}{١٠٠} + \frac{س^2}{٣٦} = ١$

مثال ٣ : قطع مخروطي معادلته ١٤٤ − ١٦س^2 − ٩ص^2 = ٠

١ أحدد نوع هذا القطع ٢ أجد طولي محوريه. ٣ أجد إحداثيات بؤرتيه.

الحل :

١ ١٤٤ − ١٦س^2 − ٩ص^2 = ٠ ، ومنها ١٤٤ = ١٦س^2 + ٩ص^2 بالقسمة على ١٤٤

$\frac{ص^2}{١٦} + \frac{س^2}{٩} = ١$ ، هذه معادلة قطع ناقص صادي ..... لماذا؟

٢ أ^2 = ١٦ ⇐ أ = ٤ ، ب^2 = ٩ ⇐ ب = ٣

طول المحور الاكبر = ٢أ = ٨ ، طول المحور الأصغر = ٢ب = ٦

٣ جـ^2 = ١٦ − ٩ = ٧ ⇐ جـ = $\sqrt{٧}$ ، البؤرتان (٠، ±$\sqrt{٧}$) ، الرأسان (٠ ، ± ٤)

نشاط ٤: النقطة و(س ، ص) تتحرك في المستوى بحيث إن إحداثيها السيني في لحظة ما هو:

س = ٥ جتاهـ، واحداثيها الصادي في أي لحظة هو: ص= ٧جاهـ

ما هي معادلة هذا المحل الهندسي وما نوعه؟

س = ٥جتاهـ ، $\frac{\text{س}}{\text{٥}}$ = ... ومنها $\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢٥}}$ = ...

ص = ٧جاهـ ، $\frac{\text{ص}}{\text{٧}}$ = ... ومنها $\frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٤٩}}$ = ... لكن جا$^{\text{٢}}$هـ + جتا$^{\text{٢}}$هـ = ١

$\frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٤٩}} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢٥}}$ = ١ هذا المحل الهندسي هو ....

مثال ٤ : أجد معادلة القطع الناقص القياسي السيني والذي يمر بالنقطتين (٦ ، ٢) ، (٤ ، ٣) .

الحل : المعادلة هي $\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{أ}^{\text{٢}}} + \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}}$ = ١ نعوض النقطتين في المعادلة

بتعويض (٦ ، ٢) في المعادلة ينتج $\frac{\text{٣٦}}{\text{أ}^{\text{٢}}} + \frac{\text{٤}}{\text{ب}^{\text{٢}}}$ = ١

ومنها ٣٦ ب$^{\text{٢}}$ + ٤أ$^{\text{٢}}$ = أ$^{\text{٢}}$ ب$^{\text{٢}}$ ....(١)

وبتعويض النقطة الثانية (٤ ، ٣) ينتج ان ١٦ب$^{\text{٢}}$ +٩أ$^{\text{٢}}$ = أ$^{\text{٢}}$ ب$^{\text{٢}}$ ....(٢)

من معادلة (١) و(٢) ينتج ٣٦ب$^{\text{٢}}$ + ٤أ$^{\text{٢}}$ =١٦ب$^{\text{٢}}$ +٩أ$^{\text{٢}}$ ، منها ينتج أن أ$^{\text{٢}}$ = ٤ب$^{\text{٢}}$ ......(٣)

نعوض قيمة أ$^{\text{٢}}$ في معادلة (١) فينتج أن ب$^{\text{٢}}$ = ١٣ ، بتعويض قيمة ب$^{\text{٢}}$ في معادلة (٣) ينتج أن

أ$^{\text{٢}}$ = ٥٢ فتصبح معادلة القطع الناقص هي $\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٥٢}} + \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{١٣}}$ = ١

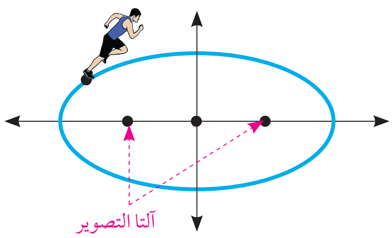
نشاط ٥: في سباق رياضي يجري لاعب حول ملعب على صورة قطع ناقص معادلته $\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٦٤٠٠}} + \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٢٨٠٠}}$ = ١ (الوحدات بالأمتار). وتوجد آلتا تصوير في بؤرتي الملعب تصوران اللاعب، أجد المسافة بين اللاعب وآلة التصوير القريبة منه عندما يمر بأحد رأسي القطع.

أ$^{\text{٢}}$ = ... ومنها أ = ...

ب$^{\text{٢}}$ = ... ومنها ب = ...

جـ$^{\text{٢}}$ = ... ومنها جـ = ٦٠م

المطلوب: أ − جـ = ...



تمارين ٦ - ٢

١ أضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ قطع ناقص معادلته $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$، ما طول المحور الأكبر؟

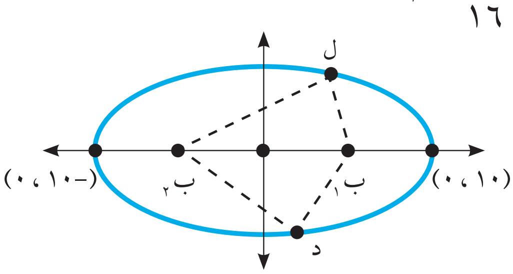
أ) ٨ ب) ٥ جـ) ١٠ د) ١٦

٢ قطع ناقص سيني مركزه (٠ ، ٠) وطول محوره الأكبر = ١٠ وحدات وطول محوره الأصغر = ٦ وحدات ما معادلته؟

أ) $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$ ب) $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

جـ) $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$ د) $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

٣ يمثل الشكل المجاور منحنى قطع ناقص بؤرتيه $ب_١$ ، $ب_٢$ ما محيط الشكل الرباعي ل $ب_١$ د $ب_٢$؟



أ) ٢٠ ب) ٤٠

جـ) ٣٢ د) ٢٤

٢ قطع مخروطي معادلته $٤س^٢ + ٩ص^٢ = ١$، أحدد نوع القطع، وأجد الرأسين والبؤرتين وجد طولي المحورين ومعادلتيهما.

٣ قطع ناقص صادي البعد بين إحدى بؤرتيه والرأس القريب منها يساوي ٢ وحدة طول، والبعد بينها وبين الرأس البعيد منها يساوي ٨. أجد معادلة هذا القطع.

٤ النقطة و(س ، ص) تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين (± ٥ ، ٠) يساوي ١٢ وحدة ما المحل الهندسي للنقطة وما معادلته؟

٥ جسر على شكل نصف قطع ناقص، محوره الأكبر أفقي، إذا كان طول قاعدة القوس ٢٤م، وتبعد أعلى نقطة في القوس فوق الطريق الأفقية ٦م، أجد ارتفاع القوس على بعد ٤م من مركز القاعدة.

٦ - ٣ القطع الزائد The Hyperbola

نشاط ١: الشكل المجاور يمثل صورة لأبراج تبريد تستخدم في المفاعلات النووية. وهذه الأبراج عادة تتخذ هذا الشكل لزيادة سرعة البخار عند منطقة الوسط ومن ثم تتسع الفتحة عند الطرف العلوي لتقليل سرعة خروج البخار من الفوهة. هل يمكنك وصف الحواف الجانبية لهذه الأبراج؟ أرسم شكلا تقريبيا لهذه الحواف.

تعريف: القطع الزائد هو المحل الهندسي للنقطة ن (س، ص) التي تتحرك في المستوي بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتاً أصغر من البعد بينهما، وتسمى النقطتان الثابتتان بالبؤرتين.

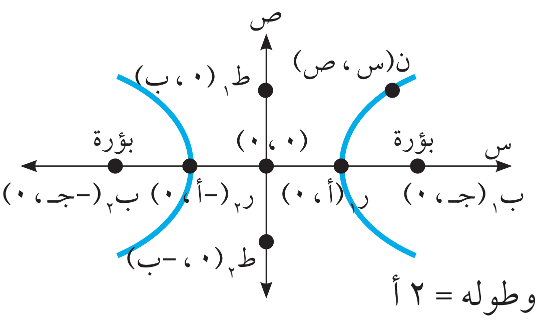
وسنقتصر في دراستنا هذه الدرس على الوضع القياسي للقطع الزائد وهناك حالتان:

الحالة الاولى: القطع الزائد السيني

يبين المنحنى المجاور قطعاً زائداً سينياً فيه:

البؤرتان $ب_{١}$ (جـ ، ٠) ، $ب_{٢}$ (− جـ ، ٠)، والبعد بينهما يسمى البعد البؤري للقطع الزائد = ٢ جـ ،

النقطة م (٠ ، ٠) المركز.



الرأسان $ر_{١}$(أ ، ٠) ، $ر_{٢}$(−أ ، ٠)، وهما طرفا المحور القاطع وطوله = ٢ أ

النقطتان $ط_{١}$(٠ ، ب) ، $ط_{٢}$(٠، −ب) ، وهما طرفا المحور المرافق وطوله = ٢ب.

ويشكل محورا القطع الزائد (القاطع والمرافق) محوري تماثل له.

معادلة هذا القطع هي $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ ، حيث يكون معامل $س^{٢}$ موجباً.

الاختلاف المركزي للقطع الزائد = هـ = $\frac{جـ}{أ} > ١$ ، $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$

$|ن ب_{١} - ن ب_{٢}| = ٢أ$ لأي نقطة مثل ن.

مثال ١ : تتحرك النقطة ن(س ، ص) في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين الثابتتين (∓ ١٠ ، ٠) يساوي ١٦.

١ أجد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن. ٢ أمثل هذا القطع بيانياً وأحدد عليه عناصره.

الحل : ١ هذا المحل يمثل قطعاً زائداً سينياً فيه: م (٠ ، ٠)، ٢أ = ١٦ ومنها أ = ٨ ،

بؤرتاه (∓ جـ ، ٠) = (∓ ١٠ ، ٠)

⇐ جـ = ١٠ ، جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} ، ومنها ب = ٦ معادلته :

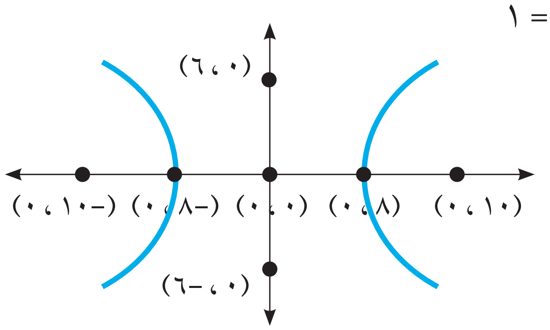
$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١ \Leftarrow \frac{س^{٢}}{٦٤} - \frac{ص^{٢}}{٣٦} = ١$$

٢ الرأسان (∓ أ ، ٠) = (∓ ٨ ، ٠)

طول المحور القاطع = ٢أ = ١٦

طول المحور المرافق = ٢ب = ١٢

الاختلاف المركزي = هـ = $\frac{١٠}{٨}$ > ١



نشاط ٢: قطع زائد رأساه (∓ ١٢ ، ٠)، وطول محوره المرافق ١٠ وحدات.

١ أكتب معادلته. ٢ أحسب اختلافه المركزي.

الرأسان (∓ أ ، ٠) = ... إذن أ = ... ، ٢ب = ... ومنها ب = ... ، جـ = ...

١ معادلته هي : .... ٢ هـ = ...

مثال ٢ : قطع مخروطي معادلته (٢س − ٣ص) (٢س + ٣ص) − ٣٦ = ٠

١ أحدد نوع هذا القطع . ٢ أكتب عناصره.

الحل : ١ (٢س − ٣ص) (٢س + ٣ص) − ٣٦ = ٠، ومنها ٤س^{٢} − ٩ص^{٢} = ٣٦،

وبالقسمة على ٣٦ ينتج ان: $\frac{س^{٢}}{٩} - \frac{ص^{٢}}{٤} = ١$

وهذه معادلة قطع زائد سيني (إشارة س^{٢} موجبة) فيه :

٢ أ = ٣ ، ب = ٢ ، جـ = $\sqrt{١٣}$ ، م (٠ ، ٠)، بؤرتاه (∓ جـ ، ٠) = (∓ $\sqrt{١٣}$ ، ٠)

الرأسان (∓ أ ، ٠) = (∓ ٣ ، ٠).طول المحور القاطع = ٢أ = ٦.

طول المحور المرافق = ٢ب = ٤. الاختلاف المركزي = هـ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$ > ١

الحالة الثانية:- القطع الزائد الصادي

يبين المنحنى المجاور قطعاً زائداً صادياً فيه:

البؤرتان ب$_{١}$ (٠، جـ) ، ب$_{٢}$ (٠، −جـ)

والبعد بينهما يسمى البعد البؤري وطوله = ٢ جـ

النقطة م (٠ ، ٠) المركز.

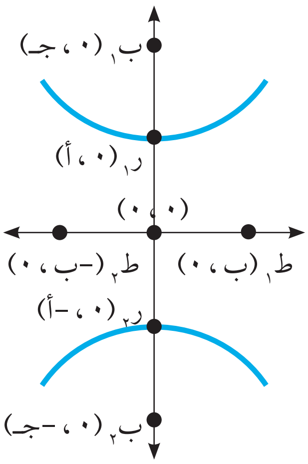
الرأسان ر$_{١}$(٠، أ) ، ر$_{٢}$(٠ ، −أ)

وهما طرفا المحور القاطع وطوله = ٢ أ.

النقطتان ط$_{١}$(ب ، ٠) ، ط$_{٢}$(− ب ، ٠)

وهما طرفا المحور المرافق وطوله = ٢ب.

معادلة هذا القطع هي $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$



نشاط ٣: قطع مخروطي في وضع قياسي رأساه (٠ ، ∓ ٦) ، واختلافه المركزي = $\frac{٥}{٣}$ ،

١ أكتب معادلته. ٢ أجد احداثيات بؤرتيه.

الرأسان (٠ ، ∓ ٦)، هـ > ١ اذن هذا قطع .... لماذا؟

فيه أ = ٦، هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٥}{٣}$

إذن جـ = ١٠ ، ب = ٨ .... لماذا؟

١ معادلته هي : ....

٢ احداثيات بؤرتيه هما ....

مثال ٣: تتحرك النقطة و(س ، ص) في المستوى بحيث أن إحداثيها السيني في أي لحظة يتحدد بالعلاقة س = ظان، وإحداثيها الصادي في أي لحظة يتحدد بالعلاقة ص = قان، $٠ < ن < \frac{\pi}{٢}$

١ أكتب معادلة هذا المحل الهندسي.

٢ أجد الاختلاف المركزي .

الحل :

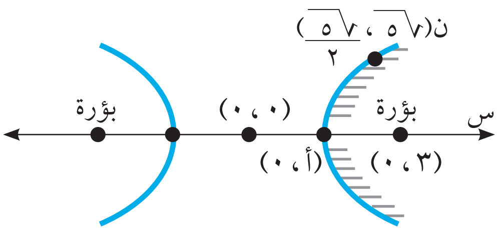
١ س = ظان ⇐ س^٢ = ظا^{٢}ن ، ص = قان ⇐ ص^٢ = قا^{٢}ن

ص^٢ – س^٢ = قا^{٢}ن – ظا^{٢}ن = ١ (لماذا؟)

ص^٢ – س^٢ = ١ هي معادلة قطع زائد صادي فيه أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = $\sqrt{٢}$

٢ الاختلاف المركزي = هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\sqrt{٢}$

نشاط ٤: إذا كانت النقطة ($\sqrt{٥}$ ، $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$) إحدى النقاط الواقعة على سطح مرآة محدبة (على شكل قطع زائد)، والنقطة (٣ ، ٠) إحدى بؤرتي المرآة، مر بها شعاع فانعكس ماراً بالبؤرة الثانية، أجد رأس هذه المرآة.



البؤرة (٣ ، ٠) ومنها جـ = ...

الرأس (أ ، ٠)

لكن جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢

ومنها ب^٢ = جـ^٢ – أ^٢ أي أن ب^٢ = ...

معادلة القطع هي: ....

النقطة ($\sqrt{٥}$ ، $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$) تحقق معادلة المنحنى ومنها .... = ١

ومنها ٤أ^٤ – ٦١ أ^٢ + ١٨٠ = صفر

أي أن (............)(............) = صفر

ومنها أ = ٢ لماذا ؟

إذن رأس المرآة هو (٢ ، ٠)

تمارين ٦ - ٣

١ أجد إحداثيات البؤرتين و الرأسين وطولي المحورين والاختلاف المركزي لكل من القطوع المخروطية التالية ثم أرسم منحنى تقريباً في كل حالة:

أ $٩س^٢ - ص^٢ = ٣٦$ ب $٦ص^٢ - ٢س^٢ = ٣$ جـ $٩س^٢ - ١٦ص^٢ = ١$

٢ قطع مخروطي معادلته $١٦س^٢ - ٩ص^٢ - ١٤٤ = $ صفر، أجد الفرق المطلق للبعد بين النقطة $(\frac{٣\sqrt{٥}}{٢} ، ٢)$ و بؤرتي القطع .

٣ ما معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠ ، ٠) وإحدى بؤرتيه هي نفس بؤرة القطع المكافئ $س^٢ = ٢٠ ص$ واختلافه المركزي يساوي $\frac{٥}{٣}$ ؟

٤ أجد معادلة القطع الزائد القياسي الذي طول محوره القاطع يساوي ٨ وحدات، واختلافه المركزي $هـ = \frac{٥}{٤}$ (أكتب جميع الحلول الممكنة) .

٥ قطع زائد معادلته $\frac{س^٢}{ك} - \frac{ص^٢}{٤ - ك} = ١$ ، حيث $٠ < ك < ٤$ ، واختلافه المركزي $\frac{٣}{٢}$.
إذا كانت ن (س ، ص) نقطة تنتمي للقطع الزائد فجد الفرق المطلق للبعد بين ن ، وبؤرتي القطع الزائد.

تمارين عامة

١ أضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (٠ ، −٢)؟

أ) $س^٢ = ٨$ ص ب) $س^٢ = −٨$ ص جـ) $ص^٢ = ٨$ س د) $ص^٢ = −٨$ س

٢ ما معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله س =٢,٥ ؟

أ) $س^٢ = ١٠$ص ب) $س^٢ = −١٠$ص

جـ) $ص^٢ = ١٠$س د) $ص^٢ = −١٠$س

٣ اذا كان القطع المكافئ $ص^٢ = ٤$أ س يمر بالنقطة (١ ، ٢) فما معادلة دليل هذا القطع؟

أ) س = −١ ب) س = ١ جـ) ص = −١ د) ص = ١

٤ ما نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$ ؟

أ) قطع ناقص صادي ب) قطع ناقص سيني

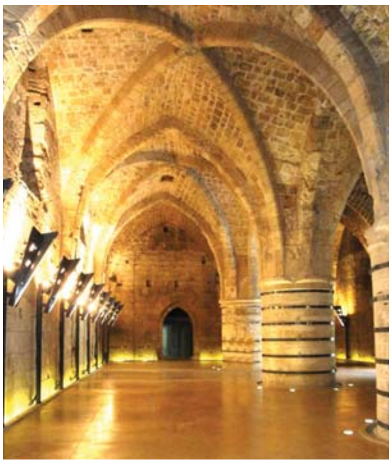
جـ) قطع زائد سيني د) قطع زائد صادي

٥ ما البعد البؤري للقطع $٣٦ س^٢ + ١٠٠ ص^٢ = ٣٦٠٠$؟

أ) ١٢وحدة ب) $٢\sqrt{١٣٦}$ وحدة جـ) ٨ وحدات د) ١٦ وحدة

٢ أجد بؤرتي القطع الزائد $\frac{ص^٢}{٢٥ - د} - \frac{س^٢}{١٦ - د} = ١$

٣ أجد معادلة القطع الزائد الذى مركزه نقطة الاصل ومحوره القاطع ينطبق على محور الصادات ويمر بالنقطتين (٤ ، ٦) ، (١ ، −٣) ؟



٤ المعادلتان س = $٢ن^٢$ ، ص = ٦ن حيث ن ≥ ٠، تحددان موقع جسم على منحنى في اللحظة ن، أكتب معادلة المنحنى الذي يتحرك عليه الجسم على صورة س = ق(ص)، وأعين نوع المنحنى.

٥ تشتهر المباني الفلسطينية القديمة بأقواسها، إذا كان طول قاعدة أحد الأقواس في سجن عكا على شكل قطع مكافئ يساوي ٨م، وبعد أعلى نقطة في القوس عن قاعدته يساوي ٣م، أكتب معادلة هذا القوس (علماً أنه في الوضع القياسي).

أقيّم ذاتي أكمل الجدول الآتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	متدني
أميّز بين القطوع المخروطية ومعادلاتها			
أحل مسائل متنوعة على القطوع المخروطية			
أوظف المعادلات للقطوع المخروطية في حل مشكلات حياتية			

تطبيقات حاسوبية:

أختار أحد البرامج الحاسوبية مثل ميكروسوفت ماثيماتيكس أو جيوجبرا، وأقوم بتوظيفه لتمثيل القطوع المخروطية:

١ $ص^٢ - ٦س = ٠$

٢ $\frac{ص^٢}{٤} - \frac{س^٢}{١٦} = ١$

٣ $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

٤ $٤س^٢ - ٩ص^٢ = ٣٦$

٥ $\frac{ص^٢}{٤ + س^٢} = ١$

وفي كل حالة وضح ما هو نوع القطع المخروطي وما هي عناصره؟

فكرة رياديّة

الطاقة البديلة هو مصطلح يستعمل للدلالة على بعض مصادر الطاقة غير التقليدية ذات الضرر القليل على البيئة. للاستفادة من الشمس كمصدر متجدد للطاقة، صمم وعاءً يمكن الاستفادة منه لاستخدام الطاقة الشمسية للطهو آخذا بعين الاعتبار شكل الوعاء، وكيف يمكن تصميمه للحصول على أكبر قدر من الطاقة الشمسية يمكن استخدامها في متطلبات الحياة اليومية.

روابط إلكترونية

- https://www.mathway.com/Algebra
- http://mathworld.wolfram.com/Ellipse.html
- https://www.mathsisfun.com/geometry/conic-sections.html
- http://www.purplemath.com/modules/index.htm

الوحدة

٧

النهايات والاتصال

أناقش هذه العبارة:

«هناك أوقات تشعرنا بأنها النهاية، ثم نكتشف أنها البداية. وهناك أبواب نظنها مغلقة، ثم نكتشف أنها المدخل الحقيقي». (د. إبراهيم الفقي)

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف النهايات والاتصال في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

٢ التعرف على النهاية من جهة اليسار، والنهاية من جهة اليمين.

٣ إيجاد نهايات الاقتران متعدد القاعدة عند نقاط التحول.

٤ إيجاد نهايات الاقترانات الكسرية .

٥ التعرف على نهايات الاقترانات الدائرية.

٦ توظيف برامج حاسوبية في حساب نهاية اقتران عند نقطة أو المالانهاية.

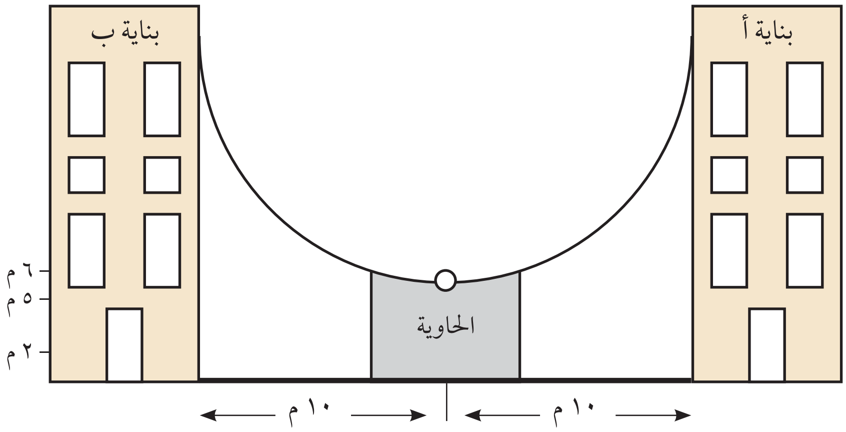
٧ التعرف على اتصال اقتران عند نقطة.

٨ البحث في اتصال اقتران على مجاله.

٩ تطبيق نظريات الاتصال على اقترانات مختلفة.

٧ - ١ نهاية الاقتران عند نقطة Limit of a Function at a Point

نشاط ١: بنايتان أ ، ب قيد الإنشاء، يقوم العمال بإلقاء المخلفات في أكياس بلاستيكية من أعلى البنايتين إلى حاوية موجودة على الأرض (انظر الشكل).



١ إذا ألقى عامل كيس نفايات من البناية أ فإنه عند اقتراب الكيس من فتحة الحاوية (من جهة اليمين) فإن ارتفاعه عن سطح الأرض يقترب من ....

٢ إذا ألقى عامل كيس نفايات من البناية ب فإنه عند اقتراب الكيس من فتحة الحاوية (من جهة اليسار) فإن ارتفاعه عن سطح الأرض يقترب من ....

مثال ١ : ماذا يحدث لقيم الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س} + ٢ ، & \text{س} \neq ٢ \\ ٥ ، & \text{س} = ٢ \end{cases}$ عندما تقترب قيم س من العدد ٢

الحل : عندما تقترب س من العدد ٢ فهذا يعني أن س ≠ ٢ وإنما س عدد يقل عن العدد ٢ بمقدار صغير جداً، أو يزيد عن العدد ٢ بمقدار صغير جداً، لذلك:

إذا كانت س > ٢ وأخذت قيم س تزداد، لتقترب من العدد ٢ فهذا يعني أن س تقترب من العدد ٢ من جهة اليسار.

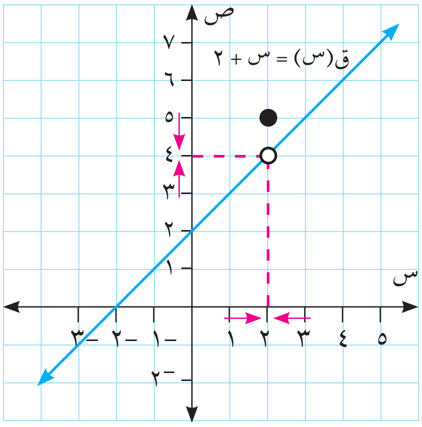
وإذا كانت س > ٢ وأخذت قيم س تقل، لتقترب من العدد ٢ فهذا يعني أن س تقترب من العدد ٢ من جهة اليمين.

الآن ماذا يحدث لقيم ق(س) في كلتا الحالتين؟ الجدول الآتي يبين قيم الاقتران ق(س) عندما س تقترب من العدد ٢

س	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	...	٢	...	١,٩٩٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩
ق(س)	٤,٠١	٤,٠٠١	٤,٠٠٠١	...	٥	...	٣,٩٩٩٩	٣,٩٩٩	٣,٩٩

ألاحظ أنه كلما اقتربت قيم س من العدد ٢ من جهة اليسار، تقترب قيمة الاقتران ق(س) من العدد ٤، وكلما اقتربت قيم س من العدد ٢ من جهة اليمين، تقترب قيم ق(س) من العدد ٤ أيضاً.

ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل المقابل:



تعريف: إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً بجوار العدد أ*، وكانت قيم ق(س) تقترب من العدد ل كلما اقتربت قيم س من العدد أ من جهة اليسار ومن جهة اليمين، فإن نهاية الاقتران ق(س) عندما س تقترب من العدد أ تساوي ل. ويعبر عن ذلك رياضياً على النحو الآتي: نهـــا(س←أ) ق(س) = ل.

أتعلم:

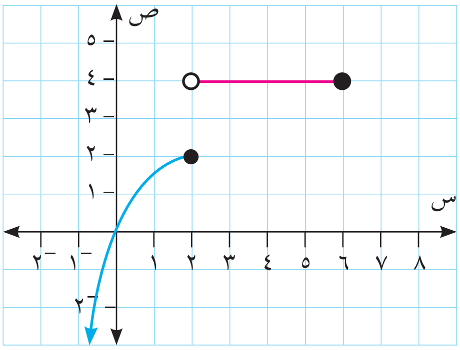
١ نهـــا(س←أ) ق(س) تعني أن س ≠ أ وإنما س عدد إما أن يكون أقل من العدد أ بمقدار صغير جداً وتسمى النهاية في هذه الحالة النهاية من جهة اليسار، وتكتب رياضياً على النحو: نهـــا(س←أ⁻) ق(س).
أو أن يكون أكبر من العدد أ بمقدار صغير جداً، تسمى النهاية في هذه الحالة النهاية من جهة اليمين، وتكتب رياضياً على النحو: نهـــا(س←أ⁺) ق(س)

٢ حتى تكون نهـــا(س←أ) ق(س) موجودة يجب أن تكون نهـــا(س←أ⁻) ق(س) = نهـــا(س←أ⁺) ق(س)

٣ لإيجاد نهـــا(س←أ) ق(س) ليس من الضروري أن يكون ق(س) معرفاً عند س = أ وإنما يجب أن يكون ق(س) معرفاً بجوار العدد أ.

* جوار العدد أ هو فترة مفتوحة قصيرة حول العدد أ.

مثال ٢ : بالإعتماد على الشكل الآتي، أجد



١ $\lim\limits_{\text{س}\to ٢}$ ق(س)

٢ جميع قيم أ التي تجعل $\lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}^+}$ ق(س) = ٤

٣ جميع قيم ب التي تجعل $\lim\limits_{\text{س}\to \text{ب}}$ ق(س) = ٤

الحل :

١ لدى دراسة قيم الاقتران، عندما س تقترب من العدد ٢ نجد أن:

$\lim\limits_{\text{س}\to ٢^-}$ ق(س) = ٢ ، $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^+}$ ق(س) = ٤

بما أن $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^-}$ ق(س) $\neq$ $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^+}$ ق(س) ، إذن $\lim\limits_{\text{س}\to ٢}$ ق(س) غير موجودة.

٢ أ $\in$ [٢،٦[

٣ ب $\in$]٢،٦[

نشاط ٢: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + ١ ، & \text{س} \leq -١ \\ \text{س} + ٣ ، & \text{س} > -١ \end{cases}$ أمثل ق(س) بيانياً، ثم أجد $\lim\limits_{\text{س}\to -١}$ ق(س).

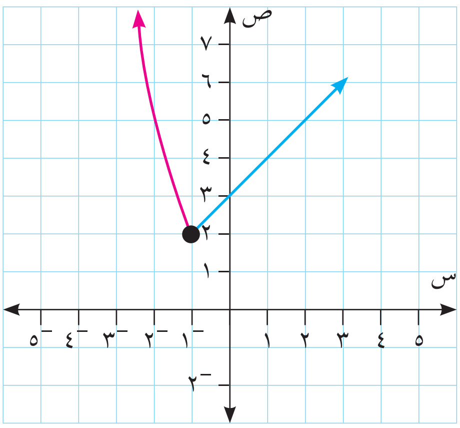
منحنى س^٢ + ١ هو انسحاب لمنحنى س^٢ ....

منحنى س + ٣ يمثل خطّاً مستقيماً،

ق(−٠,٩٩) = ...

ق(٠) = ...

إذن يمكن تمثيل الاقتران ق(س) بيانياً كالآتي:



من الرسم، أجد أن:

$\lim\limits_{\text{س}\to -١^-}$ ق(س) = ...، $\lim\limits_{\text{س}\to -١^+}$ ق(س) = ...

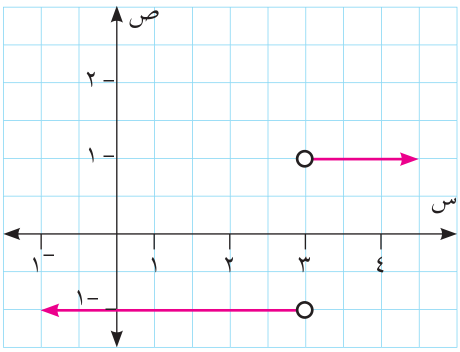
إذن $\lim\limits_{\text{س}\to -١}$ ق(س) = ...،

نشاط ٣: إذا كان $\text{ق(س)} = \frac{|\text{س} - ٣|}{\text{س} - ٣}$ ، $\text{س} \neq ٣$ ، أمثل ق(س) بيانياً، ثم أجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س).

نعيد تعريف ق(س) ونكتبه على صورة اقتران متعدد القاعدة، فيكون:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{-(\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} < ٣ \\ \frac{(\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} > ٣ \end{cases} = \begin{cases} -١ & ، \text{س} < ٣ \\ ١ & ، \text{س} > ٣ \end{cases} \quad \text{(لماذا؟)}$$

نمثل ق(س) بيانياً على النحو الآتي:



من المنحنى المقابل أجد أن:

$\underset{\text{س} \leftarrow ٣^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ...

$\underset{\text{س} \leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ...

إذن $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) ....

تمارين ومسائل ٧ - ١

١. إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}^٢ - ٢\text{س}$، أمثل ق(س) بيانياً، ثم أجد $\underset{\text{س} \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}$ ق(س).

٢. أستخدم جدولاً مناسباً لإيجاد $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{|\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢|}{\text{س} - ٣}$ إن وجدت.

٣. إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س} - [\frac{\text{س}}{٢}]$ أمثل ق(س) بيانياً، ثم أجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) .

٤. إذا كان $\text{ق(س)} = \sqrt{\text{س} - ٢}$ ، أمثل ق(س) بيانياً، ثم أجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س).

٥. إذا كان ق(س) = جاس ، أمثل ق(س) بيانياً، ثم أجد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}$ ق(س).

٧ - ٢ نظريات في النهايات Theorems of Limits

نشاط ١: حـقّ العـودة للاجئـين هو حـقّ ثابـت، ضمنته جميـع الشرائـع الأممية والمجتمعـات الدوليـة. فالفلسـطيني الـذي أبعـد عـن أرضـه ووطنـه قـصراً، لـه الحـق في العـودة إلى وطنـه. ويبقـى الحـقّ قائـماً مهـما تغـيرت الظـروف والأحـوال.

إلامَ ستؤول نهاية هذا الحق؟

نظرية (١):

- إذا كان ق(س) اقتراناً كثير حدود فإن $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ق(أ)
- إذا كان ق(س) = $\frac{ك(س)}{هـ(س)}$ اقتراناً نسبياً فإن $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = $\frac{ك(أ)}{هـ(أ)}$ ، هـ(أ) ≠ ٠

مثال ١ : أجد نهاية كل مما يأتي:

١) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (س^{٣} − ٢ س + ٥)

٢) $\lim_{س \leftarrow ٥}$ $\frac{س^{٣} - س + ٤}{س + ٣}$

الحل :

١) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (س^{٣} − ٢ س + ٥) = ٨ − ٤ + ٥ = ٩

٢) $\lim_{س \leftarrow ٥}$ $\frac{س^{٣} - س + ٤}{س + ٣}$ = $\frac{١٢٥ - ٥ + ٤}{٨}$ = $\frac{٣١}{٢}$

نشاط ٢: إذا كانت $\lim_{س \leftarrow أ}$ (أس + ٣أ) = ١٠ ، أجد قيمة / قيم أ.

$\lim_{س \leftarrow أ}$ (أس + ٣أ) = ... = ١٠

إذن أ^{٢} + ٣أ − ١٠ = ٠ ، ومنها أ = ...

نظرية (٢): إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ل ، $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = م ، ل ، م ∈ ح فإن:

- $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ (ق ± هـ)(س) = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) ± $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ل ± م
- $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ك ق(س) = ك $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ك ل ، حيث ك ∈ ح
- $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ (ق × هـ)(س) = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) × $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ل × م
- $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \dfrac{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\text{ق(س)}}{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\text{هـ(س)}} = \dfrac{\text{ل}}{\text{م}}$ ، م ≠ ٠
- $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ $(\text{ق(س)})^{ن}$ = $(\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\text{ق(س)})^{ن}$ = $\text{ل}^{ن}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب
- $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ $(\text{ق(س)})^{\frac{1}{ن}}$ = $(\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\text{ق(س)})^{\frac{1}{ن}}$ = $(\text{ل})^{\frac{1}{ن}}$ بشرط أن ل > ٠ عندما ن عدد زوجي

مثال ٢ : إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = −٢ أجد قيمة ما يأتي:

١) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (٣ق + ٥هـ)(س)

٢) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}\right)$

٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (٢ق(س) − $\text{هـ}^{٣}$(س) + $\text{س}^{٢}$)

٤) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{ق(س)} + ٦}$

الحل :

١) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (٣ق + ٥هـ)(س) = ٣ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) + ٥ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ٩ − ١٠ = −١

٢) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}\right) = \dfrac{٣}{-٢}$ (لماذا؟)

٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (٢ق(س) − $\text{هـ}^{٣}$(س) + $\text{س}^{٢}$)

= ٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) − $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ $\text{هـ}^{٣}$(س) + $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ $\text{س}^{٢}$ = ١٨

٤) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{ق(س)} + ٦} = \sqrt{٣ + ٦}$ = ٣ (لماذا؟)

مثال ٣ : أجد قيمة ما يأتي: ❶ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^٢ - \text{س}}$ ❷ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ - \text{س} - ٣)^٥$

الحل :

١ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^٢ - \text{س}} = \sqrt{\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ - \text{س})} = \sqrt{٣^٢ - ٣} = \sqrt{٦}$

٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ - \text{س} - ٣)^٥ = (\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ - \text{س} - ٣))^٥ = -١$

أتعلم: تقسم النقاط التي تنتمي إلى مجال ق(س) في [أ ، ب] إلى قسمين:

❶ نقاط طرفية، وفي هذه الحالة تكون النهاية موجودة من جهة واحدة.

❷ نقاط داخلية وتقسم إلى قسمين:

أ نقاط تحول: وهي النقاط التي تتغير قاعدة الاقتران في جوارها، وفي هذه الحالة نجد النهاية من اليمين ومن اليسار.

ب ليست نقاط تحول، وهي النقاط التي لا تتغير قاعدة الاقتران في جوارها، وفي هذه الحالة نبحث في النهاية في جوار النقطة.

نشاط ٣: إذا كان ق(س) = $[-\frac{١}{٢}\text{س} + ٢]$ ، س $\in [-٢ ، ٤]$ ، أجد:

❶ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$ ❷ $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$ ❸ $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$

أعيد تعريف ق(س) وأكتبه على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٣ & ، \text{س} = -٢ \\ ٢ & ، -٢ < \text{س} \leq ٠ \\ ١ & ، ٠ < \text{س} \leq ٢ \\ ٠ & ، ٢ < \text{س} \leq ٤ \end{cases}$$

١ لإيجاد $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$ ألاحظ أن ق(س) يغير قاعدته في جوار س = ٢ (نقطة تحول) لذلك أجد النهاية من اليسار واليمين: $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = ١$ ، بينما $\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} =$ ....

بما أن $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} \neq \underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$ ، إذن $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} =$ ....

٢ نهــا ق(س) = نهــا .... = ... (ألاحظ أن س = -١ هي نقطة داخلية، وليست نقطة تحول)
   س ← -١   س ← -١

٣ نهــا ق(س) = ... (ألاحظ أن س = ٤ هي نقطة طرفية)
   س ← ٤

مثال ٤ : أجد نهــا (|س^{٢} - ٩| + |س - ٣|)
               س ← ٣

الحل : أعيد تعريف ق(س) وأكتبه على صورة اقتران متعدد القاعدة: س^{٢} - ٩ = ٠ ، ومنها س = ± ٣

س - ٣ = ٠   ومنها س = ٣

س > ٣	-٣ < س < ٣	س < -٣
س^{٢} - ٩	- س^{٢} + ٩	س^{٢} - ٩
+++++++++	- - - - - - - -	+++++++++
س - ٣	-س + ٣	-س + ٣
+++++++++	- - - - - - - - -	- - - - - - - - -
س^{٢} + س - ١٢	- س^{٢} - س + ١٢	س^{٢} - س - ٦

٣   -٣

ق(س) =
- س^{٢} - س - ٦ ،   س < -٣
- -س^{٢} - س + ١٢ ،   -٣ ≤ س ≤ ٣
- س^{٢} + س - ١٢ ،   س > ٣

نهــا ق(س) = نهــا (-س^{٢} - س + ١٢) = ٠
س ← ٣^{-} س ← ٣^{-}

نهــا ق(س) = نهــا (س^{٢} + س - ١٢) = ٠   إذن نهــا ق(س) = صفر
س ← ٣^{+} س ← ٣^{+} س ← ٣

أتعلم: إذا كان ق(س) = جاس ، فإن $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = جا أ

إذا كان ق(س) = جتاس ، فإن $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = جتا أ

نشاط ٤: أجد قيمة ما يأتي:

١ نهـا (س ← ٠) (٥جتاس + ٢جا٢س)

٢ نهـا (س ← π) (جا^{٢} س − جتا٤س)

١ نهـا (س ← ٠) (٥جتاس + ٢جا٢س) = ٥جتا ٠ + ٢جا(٢ × ٠) = ...

٢ نهـا (س ← π) (جا^{٢} س − جتا٤س) = ...

أفكر وأناقش: تناقشت الطالبتان عروب وإسراء في العبارة الآتية:

«إذا كانت نهـا (س ← أ) ق(س) غير موجودة ، نهـا (س ← أ) هـ(س) غير موجودة

فإن نهـا (س ← أ) (ق(س) + هـ(س)) غير موجودة».

قالت عروب إن العبارة صائبة، أما إسراء فقالت إنها خاطئة.

أيّ الطالبتين أؤيد؟ أدعم إجابتي بأمثلة.

يمكن توظيف برنامج Microsoft Mathematics لإيجاد نهاية اقتران عند اقتراب س من قيمة محددة ، ولذلك الغرض ادخل للبرنامج ثم اختار منه Calculus ، ثم أكتب limit ثم الاقتران المراد إيجاد نهايته ثم أكتب المتغير ثم قيمة المتغير المراد إيجاد النهاية عنده.

مثال ٥ : أجد نهـا (س ← ١) (س^{٢} − س − ٣)^{٥} باستخدام Microsoft Mathematics

الحل : أدخل limit((x^2-x-3)^5, x, 1) ثم اضغط Enter فتظهر النتيجة.

تمارين ومسائل ٧ - ٢

١ إذا كانت $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ ق(س) = −٢ ، $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ هـ(س) = ١ أجد قيمة ما يأتي:

أ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \dfrac{س\ ق(س)}{٢هـ(س)}$

ب $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} (ق(س) + ٢س)^{٥}$

جـ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \sqrt{٣ق(س) + ١٠}$

٢ أجد قيمة ما يأتي، وأتحقق باستخدام برنامج Microsoft Mathematics :

أ $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \dfrac{س^{٢} + س}{٢س^{٢} + ٣}$

ب $\underset{ص \leftarrow -١}{نهـا} \dfrac{\sqrt{ص^{٢} + ٣}}{٢ص^{٢} - ١}$

جـ $\underset{ع \leftarrow ١}{نهـا} (ع\ جتا\pi ع + جا ٢\pi ع)$

د $\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} |س^{٢} - ٦س + ٥|$

٣ إذا كان ق(س) = $[\frac{١}{٣}س + ١]$ أجد ما يأتي:

أ $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا}$ ق(س)

ب $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ (ق(س) + ٢س)

٤ إذا كان ق(س) = $|س^{٢} - س - ٢| + |س + ٣|$، أجد ما يأتي:

أ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ ق(س)

ب $\underset{س \leftarrow -٣}{نهـا}$ (ق(س) + س^{٢})

٥ إذا كان ق(س) = أس^{٢} + ٣س − ٢أ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ ق(س) = ١٠ ، أجد $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ (ق(س) + ٣).

٦ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ٢س + ٣ &، س \le ٢ \\ ٢س + ١٠أ &، س > ٢ \end{cases}$

أجد قيمة أ علماً بأن $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ ق(س) موجودة.

٧ - ٣ النهايات والصورة غير المعينة Limits and Indeterminate Forms

نشاط ١: أربعة طلاب، تقدم ثلاثة منهم لامتحان ما، أجاب الأول عن جميع الأسئلة إجابات صحيحة، بينما أجاب الثاني عن نصف الأسئلة إجابة صحيحة، أما الثالث فلم يجب عن أي سؤال إجابة صحيحة، والرابع لم يتقدم للامتحان. فإذا كانت علامات الأسئلة متساوية، أيّ طالب حصل على أعلى العلامات؟ أيّهم حصل على أقل العلامات؟ أيّ طالب كان متوسطاً بعلاماته؟ لا شك أننا نستطيع الحكم على الطلاب الثلاثة الذين تقدموا للامتحان، من حيث مستوى التحصيل في الامتحان، فالأول أجاب عن جميع الأسئلة، وهذا يعني أن نسبة إجابته الصحيحة ١٠٠٪ بينما أجاب الثاني عن نصف الأسئلة، وهذا يعني أن نسبته ٥٠٪، أما الثالث فلم يستطع الإجابة عن أي سؤال، أي أن نسبته ٠٪ . لكن ماذا عن الطالب الرابع، هل نستطيع الحكم على مستواه؟

أتعلم: إذا كان ق(س)= $\frac{\text{ك(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، فإنه عند حساب نهاية الاقتران ق(س) عندما س تقترب من أ (عدد حقيقي) من خلال التعويض المباشر، فإن النتيجة ستكون إحدى الحالات الآتية:

- عدد حقيقي، فيكون هذا العدد هو قيمة النهاية المطلوبة.
- $\frac{\text{أ}}{٠}$ ، أ ≠ ٠ ولن نتطرق لهذا النوع من النهايات في هذه الحالة.
- $\frac{٠}{٠}$ ، كمية غير معينة، و نبحث عن قيمة النهاية في هذه الحالة.

للبحث في نهاية الاقتران ق(س)= $\frac{\text{ك (س)}}{\text{هـ(س)}}$ عندما س تقترب من أ ، والذي يعطي بالتعويض المباشر الصورة غير المعينة $\frac{٠}{٠}$ ، أبسط الاقتران بعدة طرق منها التحليل إلى العوامل أو الضرب بالمرافق، أو توحيد المقامات، ومن ثم أجد قيمة النهاية المطلوبة.

مثال ١ : أجد $\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{٠}{٠}$ لذلك أبحث عن قيمة هذه النهاية:

$$\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢} = \lim_{س \leftarrow -٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س + ٢} = \lim_{س \leftarrow -٢} (س - ٢) = -٤$$

نشاط ٢: أجد:

١) $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ - ٣س}{س - ٣}$

٢) $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{س^٢ + س - ٢}{س - ١}$

٣) $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٣ - ٨}{٢س^٢ - ٨}$

٤) $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٤ - ٨١}{س - ٣}$

١) التعويض المباشر يعطي ....

$$\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ - ٣س}{س - ٣} = \lim_{س \leftarrow ٣} .... = ...$$

٢) $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{س^٢ + س - ٢}{س - ١} = \lim_{س \leftarrow ١} \frac{(س - ١)(س + ٢)}{س - ١} = ... = -٣$ (لماذا؟)

٣) $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٣ - ٨}{٢س^٢ - ٨} = \lim_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{٢(س - ٢)(س + ٢)} = ...$

٤) $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٤ - ٨١}{س - ٣} = \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{(س^٢ - ٩)(س^٢ + ٩)}{س - ٣} = ...$

نشاط ٣: أجد $\lim_{س \leftarrow أ} \frac{س^٤ - أ^٤}{س - أ}$

$$\lim_{س \leftarrow أ} \frac{س^٤ - أ^٤}{س - أ} = ... = ٤أ^٣$$

أتعلم: $\lim_{س \leftarrow أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن أ^{ن-١}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب.

مثال ٢ : أجد قيمة ما يأتي:

① $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٥ - ٣٢}{\text{س} - ٢}$

② $\underset{\text{س} \leftarrow ١-}{\text{نهـــا}} \dfrac{(\text{س} + ٦)^٤ - ٦٢٥}{\text{س} + ١}$

③ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٥ - ١}{\text{س}^٤ - ١}$

الحل :

① $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٥ - ٣٢}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٥ - ٢^٥}{\text{س} - ٢} = ٥(٢)^٤ = ٨٠$

② $\underset{\text{س} \leftarrow ١-}{\text{نهـــا}} \dfrac{(\text{س} + ٦)^٤ - ٦٢٥}{\text{س} + ١}$ أفرض ع = س + ٦ ومنها س = ع − ٦

عندما س تقترب من −١، ع تقترب من −١ + ٦ = ٥

إذن $\underset{\text{س} \leftarrow ١-}{\text{نهـــا}} \dfrac{(\text{س} + ٦)^٤ - ٦٢٥}{\text{س} + ١} = \underset{\text{ع} \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ع}^٤ - ٥^٤}{\text{ع} - ٥} = ٤(٥)^٣ = ٥٠٠$

③ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٥ - ١}{\text{س}^٤ - ١}$ أقسم البسط والمقام على س − ١ .... (لماذا؟)

إذن $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٥ - ١}{\text{س}^٤ - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٥ - ١^٥}{\text{س} - ١} \div \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٤ - ١^٤}{\text{س} - ١}$.....(لماذا؟)

$= ٥(١)^٤ \div ٤(١)^٣ = \dfrac{٥}{٤}$

مثال ٣ : إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٢ + \text{أ س} - ٨}{\text{س} - ٢}$ موجودة ، أجد قيمة أ.

الحل : بما أن $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق(س) موجودة ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ (س − ٢) = ٠ ، إذن $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ (س^٢ + أ س − ٨) = ٠

ومنها ٤ +٢أ − ٨ = ٠ إذن أ = ٢

مثال ٤ : أجد قيمة $\lim\limits_{س \leftarrow ٧} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٣}{س - ٧}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{٠}{٠}$ لذلك أبحث عن قيمة هذه النهاية من خلال الضرب بمرافق البسط

$$\lim\limits_{س \leftarrow ٧} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٣}{س - ٧} \times \frac{\sqrt{س + ٢} + ٣}{\sqrt{س + ٢} + ٣}$$

$$= \lim\limits_{س \leftarrow ٧} \frac{س + ٢ - ٩}{س - ٧} \times \frac{١}{\sqrt{س + ٢} + ٣} \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$= ١ \times \frac{١}{٣ + ٣} = \frac{١}{٦}$$

أتعلم: الضرب بالمرافق التربيعي، يعني جعل المقدار الجبري على صورة فرق بين مربعين.

نشاط ٤: أجد قيمة $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{\sqrt{٢س + ٢} - ٢}{س - ١}$

مرافق $\sqrt{٢س + ٢} - ٢$ هو..................

$\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{\sqrt{٢س + ٢} - ٢}{س - ١} \times$ .... = ...

إذن $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{\sqrt{٢س + ٢} - ٢}{س - ١} =$ .... (هل هناك طرق أخرى للحل؟)

مثال ٥ : أجد قيمة: $\lim_{س \to ٣} \dfrac{(\dfrac{١}{س + ٢} - \dfrac{١}{٥})}{س - ٣}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\dfrac{٠}{٠}$ لذلك أبحث عن قيمة هذه النهاية.

ألاحظ أن البسط يحتوي على كسر لذلك أوحد المقامات:

$$\lim_{س \to ٣} \dfrac{(\dfrac{١}{س + ٢} - \dfrac{١}{٥})}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \dfrac{٥ - س - ٢}{(س - ٣)(س + ٢)(٥)} = \lim_{س \to ٣} \dfrac{٣ - س}{(س - ٣)(س + ٢)(٥)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \dfrac{-١}{(س + ٢)(٥)} = \dfrac{-١}{(٥)(٥)} = \dfrac{-١}{٢٥}$$

نشاط ٥: أجد قيمة ما يأتي:

١) $\lim_{س \to ٠} (\dfrac{١}{س}) (\dfrac{١}{(س + ١)^٢} - ١)$

٢) $\lim_{س \to ٥} (\dfrac{١}{س} - \dfrac{١}{٥}) (\dfrac{١}{س^٢ - ٢٥})$

١) $\lim_{س \to ٠} (\dfrac{١}{س}) (\dfrac{١}{(س + ١)^٢} - ١)$

$$= \lim_{س \to ٠} (\dfrac{١}{س}) (\dfrac{١ - (س + ١)^٢}{(س + ١)^٢})$$

$$= -٢$$

٢) $\lim_{س \to ٥} (\dfrac{١}{س} - \dfrac{١}{٥}) (\dfrac{١}{س^٢ - ٢٥})$

$$= \lim_{س \to ٥} (\dfrac{٥ - س}{٥س}) (\dfrac{١}{(س - ٥)(س + ٥)})$$

= .... = ...

تمارين ومسائل ٧ - ٣

١ أجد كلاً من النهايات الآتية، وأتحقق باستخدام برنامج Microsoft Mathematics :

أ $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\text{س}^٢ - ٤}$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٠}{٥ - \text{س}}$

جـ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٣ - ٥\text{س}^٢ + ٦\text{س}}{\text{س} - ٣}$

د $\underset{\text{س} \leftarrow \sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٨ - ١٦}{\text{س}^٤ - ٤}$

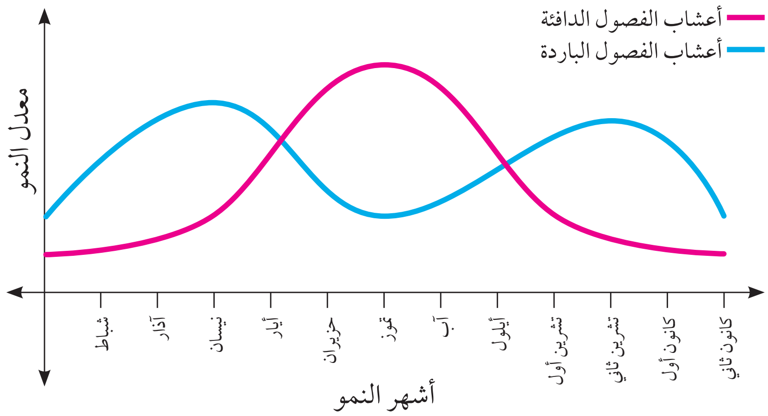
هـ $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢\text{س} + ٦} - ٤}{٢\text{س} - ١٠}$

٢ إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٨}{\text{س} - ٢} &، \text{س} < ٢ \\ \dfrac{\text{أس}^٢ + \text{س} - ٤}{\text{س}^٢ + ١} &، \text{س} > ٢ \end{cases}$

أجد قيمة أ التي تجعل $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة.

٣ إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أس}^٢ - \text{ب س} - ٦}{\text{س} - ٢} = ٥$ ، أجد قيم أ ، ب.

نشاط ١: تختلف معدلات نمو الأعشاب خلال فصول وأشهر السنة المختلفة، ويمثل الشكل الآتي منحيي معدلات نمو أعشاب الفصول الدافئة والباردة في أحد المناطق الجغرافية.



١ يكون أعلى معدل نمو أعشاب الفصول الدافئة في شهر ....

٢ يكون أعلى معدل نمو أعشاب الفصول الباردة في شهر ....

٣ أي المنحنيات التي تعرفها سابقاً يشبه المنحنيين في الشكل أعلاه؟

مثال ١ : أستخدم جدولاً مناسباً لإيجاد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ (حيث س بالتقدير الدائري)

الحل : ألاحظ أن التعويض المباشر في ق(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ سيعطي $\frac{٠}{٠}$

→ ٠ ←

س د	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	...	٠	...	-٠,٠٠١	-٠,٠١	-٠,١
ق(س)	٠,٩٩٨٣٣٤	٠,٩٩٩٩٨٣	٠,٩٩٩٩٩٩٨	...		...	٠,٩٩٩٩٩٩٨	٠,٩٩٩٩٨٣	٠,٩٩٨٣٣٤

→ ١ ←

إذن $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$

نظرية: $\lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س} = ١$ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} = ١$. (حيث س بالتقدير الدائري)

أتعلم: ❶ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا أ س}{س} = أ$ ❷ $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا أ س}{س} = أ$ (حيث س بالتقدير الدائري)

مثال ٢ : أجد قيمة ما يأتي:

❶ $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٥ س}{٧س}$ ❷ $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س قتا ٥س}$ ❸ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ ٣س ظا ٥ س}{س^٣}$

الحل :

١ $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٥ س}{٧س} = \frac{١}{٧} \lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٥ س}{س} = \frac{٥}{٧}$

٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س قتا ٥س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٥ س}{س} = ٥$

٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ ٣س ظا ٥ س}{س^٣} = (\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{س})^٢ \times \lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٥ س}{س} = ٩ \times ٥ = ٤٥$

نشاط ٢: أجد ما يأتي:

❶ $\lim_{س \to ٠} \frac{-٣س}{٥ ظا ٣س}$ ❷ $\lim_{س \to ٠} \frac{س جا ٣س + ظا^٢ س}{جا^٢ س + ظا^٢ ٣س}$

١ $\lim_{س \to ٠} \frac{-٣س}{٥ ظا ٣س}$ ، أقسم كلاً من البسط والمقام على ....

تصبح النهاية على الصورة .... = ... = $-\frac{١}{٥}$

٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{س جا ٣س + ظا^٢ س}{جا^٢ س + ظا^٢ ٣س}$ ، بقسمة كل من البسط والمقام على س^٢

تصبح النهاية على الصورة .... = $\frac{٤}{١٠}$

مثال ٣ : أجد ما يأتي: ① $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - جتا ٥ س}{س^٢}$

الحل : ① $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - جتا ٥ س}{س^٢}$، أضرب كلاً من البسط والمقام بمرافق البسط (١+جتا٥س)

$$= \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - جتا^٢ ٥ س}{س^٢} \times \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{١ + جتا ٥ س}$$

$$= \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{جا^٢ ٥ س}{س^٢} \times \frac{١}{٢} = ٢٥ \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{جا^٢ ٥ س}{٢٥ س^٢} \times \frac{١}{٢}$$

$$= ٢٥ \left(\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{جا ٥ س}{٥ س}\right)^٢ \times \frac{١}{٢}$$

$$= ٢٥ \times \frac{١}{٢} = \frac{٢٥}{٢}$$

تمارين ومسائل ٧ - ٤

① أجد ما يأتي، وأتحقق باستخدام برنامج Microsoft Mathematics :

أ $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{ظا^٢ ٣ س}{جا^٢ ٧س}$

ب $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{س^٢ ظتا^٢ \pi س}$

جـ $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{ظا س جا ٥ س}{٣س}$

د $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{-٣ جا س}{٥ ظتا ٣س}$

② أجد ما يأتي:

أ $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{جتا س - جتا ٣ س}{١ - جتا ٧س}$

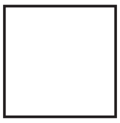
ب $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - جتا ٥ س}{س جا ٥ س}$

③ إذا كان ق(س) = $\frac{\sqrt{جا^٢ س}}{س}$ ، أجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ ق(س).

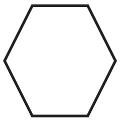
④ إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{أ - جتا ب س}{س^٢} = \frac{٩}{٢}$ ، أجد قيم أ ، ب .

٧ - ٥ نهاية الاقتران عندما س ← ± ∞ : Limits at Infinity

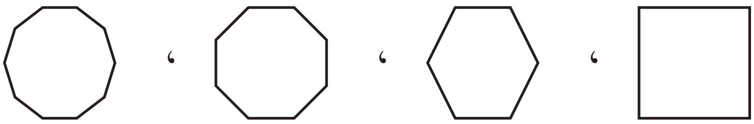
نشاط ١: الهندسة المعمارية هي إحدى فروع الهندسة التي تُعرف بعلم البناء وفنّه، وتهتم بالرسم والتصميم والديكور، والنواحي الجمالية في المباني.
رسم مهندس معماري مربعاً.



ثم أَضاف ضلعين، فحصل على مضلع سُداسي:



واستمر في إضافة مزيد من الأَضلاع كما في الشكل:

 ، ....

المتتالية التي تمثّل عدد الأَضلاع في كل شكل : .... ، .... ، .... ، .... ، ....
يمكن أَن نستمر في النمط إلى ...... .ويسمّى الشكل عندها: ....

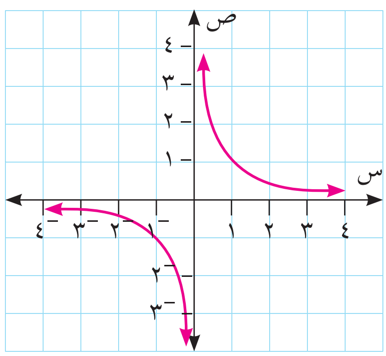
نشاط ٢: أمثل الاقتران ق(س) = $\frac{١}{س}$ ثم أدرس سلوك الاقتران ق(س) عندما س تقترب من ± ∞.

١ ق(١ ,٠) = ١٠ ، ق(١) = ... ، ق(١٠) = ...

٢ ق(-١ ,٠) = ... ، ق(-١) = ... ، ق(-١٠) = ...

٣ $\lim\limits_{س \to ∞} \frac{١}{س}$ = ...

٤ $\lim\limits_{س \to -∞} \frac{١}{س}$ = ...



نظرية:
١ إذا كان ق(س) = $\frac{أ}{س}$ ، س ≠ ٠ فإن $\lim\limits_{س \to ±∞}$ ق(س) = ٠
٢ إذا كان ق(س) = جـ فإن $\lim\limits_{س \to ±∞}$ ق(س) = جـ

مثال ١ : أجد ما يأتي:

١ $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{-٥}{س^٣}$ ٢ $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} ٧$

الحل : ١ $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{-٥}{س^٣} = ٠$ ٢ $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} ٧ = ٧$

أتعلم: إذا كان جـ $\in$ ح فإن:

١ $\pm \infty \pm$ جـ $= \pm \infty$

٢ $\infty \times$ جـ $= \begin{cases} \infty &،\ جـ > ٠ \\ -\infty &،\ جـ < ٠ \end{cases}$

٣ $-\infty \times$ جـ $= \begin{cases} -\infty &،\ جـ > ٠ \\ \infty &،\ جـ < ٠ \end{cases}$

٤ $\infty \times \infty = \infty$ ، $\infty + \infty = \infty$

٥ من الصور غير المعينة: $\infty - \infty$ ، $٠ \times \infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

أتعلم أيضا: إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً، فإن:

أ $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} س = \infty$ ، $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} س^ن = \infty^ن = \infty$

ب $\lim\limits_{س \leftarrow -\infty} س = -\infty$ ، $\lim\limits_{س \leftarrow -\infty} س^ن = (-\infty)^ن = \begin{cases} \infty &،\ ن\ زوجي \\ -\infty &،\ ن\ فردي \end{cases}$

جـ عند حساب $\lim\limits_{س \leftarrow \pm\infty} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ بالتعويض المباشر، إذا كانت الإجابة إحدى الصور غير المعينة: $\infty - \infty$ ، $٠ \times \infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ألجأ إلى إخراج المتغير ذي القوة الأعلى في البسط بطريقة العامل المشترك، وكذلك في المقام، ثم أختصر، وأجد قيمة النهاية.

مثال ٢ : أجد $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} (س^٣ - ٢س + ٥)$

الحل : $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} (س^٣ - ٢س + ٥) = \lim\limits_{س \leftarrow \infty} س^٣ (١ - \frac{٢}{س^٢} + \frac{٥}{س^٣}) = \infty(١ - ٠ + ٠) = \infty$

مثال ٣ : أجد ما يأتي:

١ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{٥\text{س}^٢+٣\text{س}+٥}{\text{س}^٢+٣}$

٢ $\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{\text{س}^٣+\text{س}^٢-٢}{١-\text{س}^٢}$

٣ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{\text{س}^٢+\text{س}-٨}{\text{س}^٣+٢\text{س}-٥}$

الحل :

١ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{٥\text{س}^٢+٣\text{س}+٥}{\text{س}^٢+٣} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{\text{س}^٢\,(٥+\frac{٣}{\text{س}}+\frac{٥}{\text{س}^٢})}{\text{س}^٢\,(١+\frac{٣}{\text{س}^٢})} = \dfrac{(٥+٠+٠)}{(١+٠)} = ٥$

٢ $\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{\text{س}^٣+\text{س}^٢-٢}{١-\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{\text{س}^٣\,(١+\frac{١}{\text{س}}-\frac{٢}{\text{س}^٣})}{\text{س}^٢\,(\frac{١}{\text{س}^٢}-١)} = \infty$ (لماذا؟)

٣ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{\text{س}^٢+\text{س}-٨}{\text{س}^٣+٢\text{س}-٥} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{\text{س}^٢\,(١+\frac{١}{\text{س}}-\frac{٨}{\text{س}^٢})}{\text{س}^٣\,(١+\frac{٢}{\text{س}^٢}-\frac{٥}{\text{س}^٣})} =$ صفر

أفكر وأناقش: ما العلاقة بين درجة البسط ودرجة المقام من جهة، وقيمة النهاية من جهة أخرى؟

تمارين ومسائل ٧ - ٥

١ أجد ما يأتي، وأتحقق باستخدام برنامج Microsoft Mathematics :

أ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ (\text{س}^٤-٧١\text{س}+١٥)$

ب $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{(\text{س}^٢+٣)(\text{س}+٥)}{(٣\text{س}^٢+٣)^٢}$

جـ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \left(\dfrac{\text{س}^٢-٢}{\text{س}-١}-\dfrac{\text{س}+٢}{\text{س}+١}\right)$

د $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \left(\dfrac{\text{س}^٢-٢}{٣\text{س}^٢+٢\text{س}-٥}\right)^٥$

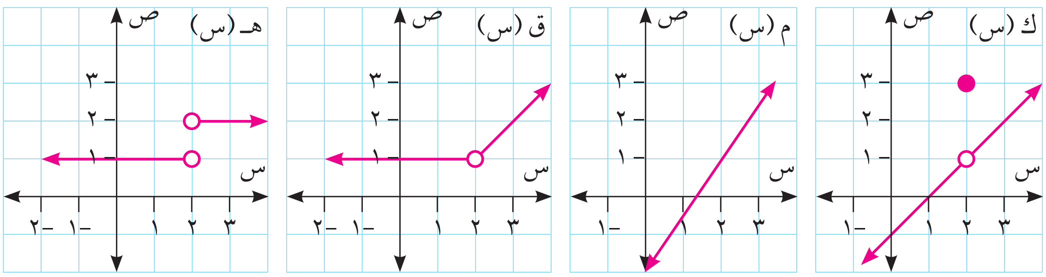
هـ $\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهــا}}\ \left(\dfrac{|٣\text{س}^٢-٥|}{٣\text{س}^٢+٣}\right)$

٢ إذا كانت $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \left(\dfrac{(\text{أ}-٢)\,\text{س}^٤+٣\text{س}^٣+٢\text{س}-١}{\text{ب}\text{س}^٢+٣\text{س}+٣}\right)=-١$ ، أجد قيم أ ، ب .

٧ - ٦ الاتصال Continuity

نشاط ١: تحظى الحياة البرية في فلسطين بتنوع نباتي وحيواني مميز، حيث أفادت جمعية الحياة البرية في فلسطين أنه لم تشهد أي منطقة بمثل مساحة فلسطين تنوعاً نباتياً وحيوانياً بمثل ما حظيت به فلسطين. الأفاعي من الزواحف التي تعيش في فلسطين، والجندب من الحشرات التي تعيش فيها، أصف حركة كل من الأفعى والجندب على سطح الأرض؟

نشاط ٢: تمثل الأشكال الآتية منحنيات اقترانات:



١ نهــا ك(س) (س ← ٢) = ... ، ك(٢) = ...

٢ نهــا م(س) (س ← ٢) = ... ، م(٢) = ...

٣ نهــا ق(س) (س ← ٢) = ... ، ق(٢) = ...

٤ نهــا هـ(س) (س ← ٢) = ... ، هـ(٢) = ...

أفكر وأناقش: الاقتران م(س) له خاصية مختلفة عن بقية الاقترانات، ما هي؟

تعريف: إذا كان ق(س) اقتراناً، أ عدداً حقيقياً ينتمي لمجال ق(س)، فإن ق(س) اقتران متصل عند س = أ إذا كان:

١ ق(س) معرفاً عند س = أ

٢ نهــا ق(س) (س ← أ) موجودة كعدد حقيقي.

٣ نهــا ق(س) (س ← أ) = ق(أ)

مثال ١ : إذا كان ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤}{\text{س} - ١}$ ، س ≠ ١ ، أبحث في اتصال ق(س) عند س = ٣ ، س = ١

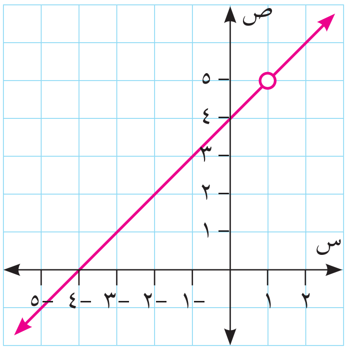
الحل : عندما س = ٣، ق(٣) = $\dfrac{(٣)^{٢} + ٣(٣) - ٤}{٣ - ١}$ = ٧ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\dfrac{(٣)^{٢} + ٣(٣) - ٤}{٣ - ١}$ = ٧

$\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(٣) ، إذن ق(س) متصل عند س = ٣

ق(س) غير معرف عند س = ١

إذن ق(س) غير متصل عند س = ١

(ألاحظ أن $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة).



مثال ٢ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{س} - ٣ & ، \quad \text{س} < ١ \\ \sqrt{\text{س}^{٣} - \text{س} + ١} & ، \quad ١ \leq \text{س} \leq ٣ \\ ٥ & ، \quad \text{س} > ٣ \end{cases}$

أبحث في اتصال ق(س) عندما س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ .

الحل :

١ عندما س = ٠ ، ق(٠) = ٠ + ٠ − ٣ = −٣ ،

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ (س^{٢} + س − ٣) = −٣

ق(٠) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) ، إذن ق(س) متصل عند س = ٠

٢ عندما س = ١ (ألاحظ أن س = ١ نقطة تحول)،

ق(١) = $\sqrt{١^{٣} - ١ + ١}$ = ١

$\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}$ (س^{٢} + س − ٣) = −١

$\underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}$ $\sqrt{\text{س}^{٣} - \text{س} + ١}$ = ١

$\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) ≠ $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة ، إذن ق(س) منفصل عند س = ١

٣ عند س = ٢

$ق(٢) = \sqrt{٢^{٣} - ٢ + ١} = \sqrt{٧}$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = \lim_{س \to ٢} \sqrt{٢^{٣} - ٢ + ١} = \sqrt{٧}$

$ق(٢) = \lim_{س \to ٢} ق(س)$ ، إذن ق(س) متصل عند س = ٢

٤ عند س = ٣ (ألاحظ أنه عند س = ٣ يوجد نقطة تحول)

$ق(٣) = \sqrt{٣^{٣} - ٣ + ١} = ٥$

$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = \lim_{س \to ٣^-} \sqrt{س^{٣} - س + ١} = ٥$

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = \lim_{س \to ٣^+} ٥ = ٥$ ، إذن $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٥$

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = ق(٣)$ ، إذن ق(س) متصل عند س = ٣

٥ عندما س = ٥

$ق(٥) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٥} ق(س) = \lim_{س \to ٥} ٥ = ٥$

$ق(٥) = \lim_{س \to ٥} ق(س)$ إذن ق(س) متصل عند س = ٥

أتعلم: إذا كان ق(س) اقتراناً متعدد القاعدة، ويغير قاعدته عند س = أ

فإن ق(س) متصل عند س = أ ، إذا كان $\lim_{س \to أ^-} ق(س) = \lim_{س \to أ^+} ق(س) = ق(أ)$

نشاط ٣: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|س^{٢} - س - ٢|}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \end{cases}$ ، أبحث في اتصال ق(س) عندما س = ٢

أعيد تعريف ق(س) وأكتبه على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

ق(س) = ...

ق(٢) = ...

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س)$ = ... ، $\lim_{س \to ٢^+} ق(س)$ =..............، إذن $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ ....

ق(٢) .... $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ ، ومنها ....

مثال ٣ : إذا كان ق(س) = س + $[\frac{س}{٢}]$ ، س ∈ [−٢، ٤[أبحث في اتصال ق(س) عند س = −١ ، ٠ ، ١ ، ٢.

الحل : أعيد تعريف ق(س)، وأكتب ق(س) على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

$$ق(س) = \begin{cases} س - ١ &، \quad -٢ \leq س < ٠ \\ س &، \quad ٠ \leq س < ٢ \\ س + ١ &، \quad ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$$

١ عندما س = −١

ق(−١) = −١ − ١ = −٢ ، $\lim_{س \leftarrow -١}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow -١}$ (س − ١) = −٢

ق(−١) = $\lim_{س \leftarrow -١}$ ق(س) ، إذن ق(س) متصل عند س = −١

٢ عندما س = ٠ (ألاحظ أنه عند س = ٠ يوجد نقطة تحول)

ق(٠) = ٠

$\lim_{س \leftarrow ٠^-}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٠^-}$ (س − ١) = −١، إذن ق(س) منفصل عند س = ٠ (لماذا؟)

٣ عندما س = ١

ق(١) = ١، $\lim_{س \leftarrow ١}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ١}$ س = ١، إذن ق(س) متصل عند س = ١ ... (لماذا؟)

٤ عندما س = ٢ (ألاحظ أن س = ٢ نقطة تحول)

ق(٢) = ٢ + ١ = ٣

$\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ س = ٢ ، إذن ق(س) منفصل عند س = ٢ (لماذا؟)

ماذا ألاحظ في سلوك الإقتران عند س = ٢ ؟

نظرية: إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = أ ، فإن كلاً من الاقترانات الآتية متصلة عند س = أ :

١ (ق ± هـ)(س)

٢ (ق × هـ)(س)

٣ ك × ق(س) ، حيث ك عدد ثابت.

٤ $(\frac{ق}{هـ})$(س) ، بشرط أن هـ(أ) ≠ ٠

٥ $\sqrt[ن]{ق(س)}$: بشرط أن ق(أ) > ٠ ، إذا كانت ن زوجية (لماذا؟)

مثال ٤ : إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = ٣ ، أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية عند س = ٣:

١ (٥ق − ٣هـ)(س)   ٢ (ق × ٧هـ)(س)   ٣ ق^٢(س)

الحل :

١ (٥ق − ٣هـ)(س) متصل عند س = ٣ لأنه حاصل طرح اقترانين متصلين عند س = ٣ مضروبين بعددين ثابتين.

٢ (ق × ٧هـ)(س) متصل عند س = ٣ لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين عند س = ٣ مضروب أحدهما بعدد ثابت.

٣ ق^٢(س) = ق(س) × ق(س) متصل عند س = ٣ لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين عند س = ٣

أتعلم:

١ إذا كان ق(س) اقتراناً كثير حدود فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح.

٢ إذا كان ق(س) اقتراناً نسبياً فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح − {أصفار المقام} .

٣ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً ∀ س ∈ ح فإن ق^ن(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح ، ن عدد صحيح موجب.

٤ إذا كان ق(س) = جاس فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح.

٥ إذا كان ق(س) = جتاس فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح.

٦ إذا كان ق(س) = |هـ(س)|، فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح ، عندما هـ(س) متصل.

مثال ٥ : أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية:

١ ق(س) = س^{٢}جتاس – ($\frac{س + ٣}{س^٢ + ٤}$)

٢ ك(س) = ٥ + |س^٢– س – ١٢|

الحل :

١ ق(س)= س^{٢}جتاس – ($\frac{س + ٣}{س^٢ + ٤}$) متصل ∀ س ∈ ح لأنه حاصل طرح اقترانين متصلين.

(س^٢ اقتران متصل ∀ س ∈ ح لأنه كثير حدود، جتاس اقتران متصل ∀ س ∈ ح،

س^{٢}جتاس متصل لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين

($\frac{س + ٣}{س^٢ + ٤}$) متصل ∀ س ∈ ح لأنه اقتران نسبي والمقام لا يساوي صفراً).

٢ ك(س) = ٥ + |س^٢– س – ١٢| متصل ∀ س ∈ ح لأنه حاصل جمع اقترانين متصلين.

(٥ اقتران متصل ∀ س ∈ ح لأنه اقتران ثابت، |س^٢– س – ١٢| اقتران متصل ∀ س ∈ ح

لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران كثير حدود متصل ∀ س ∈ ح)

أتعلم: إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على [أ، ب] فإن:

١ ق(س) اقتران متصل عند س= أ من جهة اليمين إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ^+}{نهـا}$ ق(س) = ق(أ).

٢ ق(س) اقتران متصل عند س= ب من جهة اليسار إذا كانت $\underset{س \leftarrow ب^-}{نهـا}$ ق(س) = ق(ب).

٣ ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ [أ ، ب] إذا كان:

- ق(س) اقتراناً متصلاً عند كل نقطة في] أ ، ب[
- ق(س) متصلاً عند س= أ من جهة اليمين.
- ق(س) متصلاً عند س = ب من جهة اليسار.

مثال ٦ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ - ١ & ، \quad -١ \leq س < ٠ \\ جتا(٢\pi س) & ، \quad ٠ \leq س < ٢ \\ ١٠ & ، \quad س = ٢ \end{cases}$

أبحث في اتصال ق(س) في [–١ ، ٢]

الحل :

① عندما -١ ≤ س < ٠ ، ق(س) = $س^{٢}$ - ١ متصل لأنه كثير حدود.

٠ < س < ٢ ، ق(س) = جتا(٢ π س) متصل لأنه اقتران جتا س.

② عندما س = ٢، (نقطة طرفية) : ق(٢) = ١٠

$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١ ، ومنها ق(٢) ≠ $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

ومنها ق(س) منفصل عند س = ٢ من جهة اليسار.

③ عندما س = ٠، (نقطة تحول) : ق(٠) = ١ ، $\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ جتا(٢ π س) = ١

$\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ ($س^{٢}$ - ١) = -١، ومنها ق(س) منفصل عند س = صفر

إذن ق(س) متصل ∀ س ∈ [-١ ، ٢] - {صفر} (ق(س) غير متصل على [-١ ، ٢])

نشاط ٤: إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ × [١ - $\frac{س}{٢}$] ، س ∈ [-٣ ، ٢]، أبحث في اتصال ق(س) على مجاله.

أعيد تعريف ق(س) وأكتبه على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

ق(س) = {
.... ، -٣ ≤ س ≤ -٢
.... ، -٢ < س ≤ ٠
.... ، ٠ < س ≤ ٢

عندما س = -٣، (بداية المجال) ....

عندما -٣ ≤ س < -٢ ، ق(س) متصل لأنه كثير حدود

عندما -٢ < س < ٠ ، ق(س) ....

عندما س = -٢ (نقطة تحول) ، ق(س) ....

عندما ٠ < س ≤ ٢ ، ق(س) ....

عندما س = ٠، (نقطة تحول) ....

اذن ق(س) متصل ∀ س ∈ ....

تمارين ومسائل ٧ - ٦

١ أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية عند النقطة المطلوبة:

أ) $ق(س) = |س^{٢} + ٢س - ٨| + ٢س$ ، عندما $س = ٢$

ب) $ق(س) = س^{٢} \times [س - ٠٫٢]$ ، عندما $س = -٠٫٨$

جـ) $ق(س) = ظا(٢\pi س) - ٢جتا \pi س$ ، عندما $س = \frac{١}{٢}$

٢ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{٥س + ١} - ٤}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$ ، أبحث في اتصال ق(س) عندما س = ٣.

٣ أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية على مجالها:

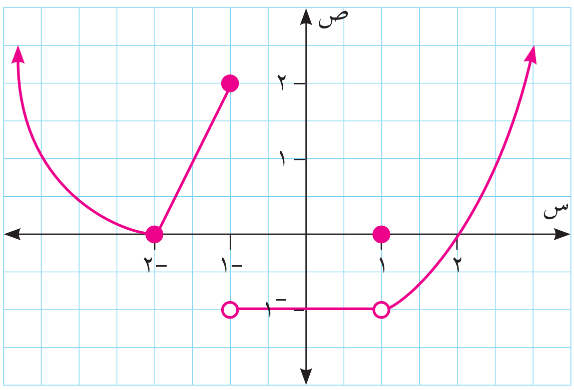
أ) $ق(س) = جا٢س + |٣س - ٣|$ ، $س \in ح$.

ب) $ق(س) = [١ - \frac{س}{٣}]$ ، $س \in [-٣ ، ٥]$.

٤ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٣ & ، -١ \leq س < ١ \\ أس + ٢ & ، ١ \leq س < ٣ \\ \dfrac{ب س + ٢}{س + ١} & ، ٣ \leq س < ٥ \end{cases}$

أجد قيم أ ، ب التي تجعل ق(س) متصلاً على مجاله.

٥ يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) المعرف على ح، بالاعتماد عليه أجيب عن الأسئلة الآتية:



أ) أجد الإحداثيات السينية لنقاط انفصال ق(س).

ب) هل ق(س) متصل على [−٢ ، −١] ، ولماذا؟

جـ) هل ق(س) متصل على]−١ ، ∞[، ولماذا؟

د) هل ق(س) متصل على]−∞ ، −٢[، ولماذا؟

هـ) هل ق(س) متصل على مجاله، ولماذا؟

٧ - ٧ نظرية بلزانو Bolzano's theorem

نشاط ١: رشا فتاة فلسطينية، تهتم بدراسة أحوال الطقس في فلسطين، بشكل خاص وفي مناطق مختلفة من أنحاء العالم أيضاً، وتسجل درجات الحرارة في هذه المناطق؛ لعمل دراسات من أجل تنظيم رحلات سياحية من فلسطين وإليها، تتناسب مع أحوال الطقس ودرجات الحرارة.

عند ملاحظة ميزان الحرارة وتغير درجات الحرارة عليه، هل يصنع تغيرها منحنى متصلاً أم منفصلاً؟ إذا كانت درجة الحرارة في يوم ما −٣°، وبعد عدة أيام ارتفعت لتصل إلى درجتين مئويتين، هل يمكن الوصول إلى هذه الدرجة دون أن يمر المؤشر على درجة الحرارة صفر مئوي؟

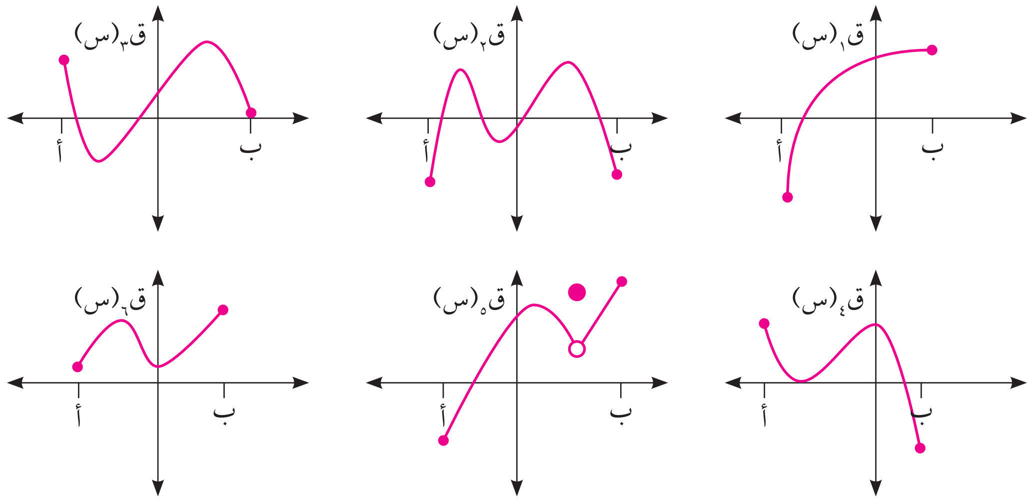
نظرية بلزانو: إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [أ ، ب] ، وكان ق(أ) × ق(ب) < صفر ، فإنه يوجد على الأقل عدد مثل جـ ∈] أ ، ب[بحيث ق(جـ) = صفراً.

أتعلم: وجود جـ بحيث أن ق(جـ) = ٠ يعني أن :

١ منحنى ق(س) يقطع محور السينات في نقطة واحدة على الأقل.

٢ العدد جـ هو أحد حلول (جذور) المعادلة ق(س) = ٠، أو أحد أصفـار الاقتران ق(س).

نشاط ٢: أي من الاقترانات الآتية والمعرفة على [أ ، ب] والممثلة بيانياً يحقق شروط نظرية بلزانو؟ ولماذا؟ أذكر عدد الأصفار إن وجدت؟



❶ ق$_{١}$(س) متصل على [أ ، ب] .... لماذا؟

ق$_{١}$ (أ) × ق$_{١}$ (ب) < صفر....... لماذا؟

إذن ق$_{١}$ (س) يحقق شروط بلزانو على [أ ، ب]

ويوجد صفر واحد للاقتران في هذا المجال.

❷ ق$_{٢}$(س) .... ، ق$_{٢}$ (أ) × ق$_{٢}$ (ب) ....

إذن ق$_{٢}$ (س) ....، للاقتران ق$_{٢}$ (س) أربعة أصفار.

(هل يتناقض هذا مع نظرية بلزانو؟)

❸ ق$_{٣}$(س) ....، ق$_{٣}$ (أ) × ق$_{٣}$ (ب) ....

إذن ق$_{٣}$ (س) ....، للاقتران ق$_{٣}$ (س) ....

❹ ق$_{٤}$(س) ....، ق$_{٤}$ (أ) × ق$_{٣}$ (ب) ....

إذن ق$_{٤}$ (س)................................، للاقتران ق$_{٤}$ (س) ....

❺ ق$_{٥}$(س) ....

❻ ق$_{٦}$(س) ....

أفكر وأناقش: هل عدم توفر شروط نظرية بلزانو يعني عدم وجود أصفار للاقتران ق(س)؟

مثال ١ : إذا كان ق(س) = $س^٣$ − ٢س − ٥، س ∈ [−٣ ، ٤] أثبت أن للاقتران ق(س) صفراً في هذا المجال.

الحل : يمكن إثبات وجود صفر للاقتران ق(س) من خلال تطبيق نظرية بلزانو:

ألاحظ أن ق(س) متصل ∀ س ∈ [−٣ ، ٤] لأنه كثير حدود.

ق(−٣) = −٢٦ < ٠، ق(٤) = ٥١ > ٠، إذن ق(−٣) × ق(٤) < ٠

إذن ق(س) يحقق شروط نظرية بلزانو، إذن يوجد على الأقل عدد مثل جـ ∈]−٣ ، ٤[بحيث ق(جـ) = صفراً.

إذن يوجد صفر للاقتران ق(س) في مجاله.

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٥جتاس ، س ∈ [٠ ، π]، أبين أن ق(س) يحقق شروط بلزانو في هذه الفترة، ثم أجد قيمة جـ التي تحددها النظرية.

الحل : ألاحظ أن ق(س) متصل ∀ س ∈ [٠ ، π] .... (لماذا؟)

ق(٠) = ٥جتا٠ = ٥، ق(π) = ٥جتا π = −٥ ، ق(٠) × ق(π) < ٠

انطبقت شروط نظرية بلزانو، إذن يوجد على الأقل عدد مثل جـ ∈]٠، π[

بحيث ق(جـ) = صفراً.

لإيجاد قيمة جـ نجعل ق(جـ) = ٠ ومنها ٥جتاجـ = ٠ أي أن جتاجـ = ٠

إذن جـ = $\frac{π}{٢}$ ∈]٠، π[أو جـ = $\frac{٣π}{٢}$ ∉]٠، π[ومنها جـ = $\frac{π}{٢}$

أتعلم: **يمكن استخدام نظرية بلزانو لإيجاد قيم تقريبية لأصفار الاقتران، ولجذور المعادلات، وللجذور الصمّاء، بالاعتماد على الطريقة المسمّاة «طريقة التنصيف».**

مثال ٣ : إذا كان ق(س)= $س^{٣}$ + س – ٥ ، س ∈ [–٢ ، ٦] ، أبين أن ق(س) يحقق شروط نظرية بلزانو على هذه الفترة، ثم أجد التقريب الثالث لقيمة جـ التي تحددها النظرية.

الحل : أبحث في شروط نظرية بلزانو على الاقتران ق(س) والفترة [–٢ ، ٦] :

ق(س) متصل ∀ س ∈ [–٢ ، ٦] لأنه كثير حدود.

ق(–٢) = –١٥ < ٠ ، ق(٦) = ٢١٧ > ٠ ، إذن ق(–٢) × ق(٦) < ٠

انطبقت شروط نظرية بلزانو، يوجد على الأقل عدد مثل جـ ∈]–٢ ، ٦[بحيث ق(جـ) = صفراً.

لإيجاد قيمة التقريب الثالث لصفر الاقتران، أستخدم طريقة التنصيف:

التقريب الأول = $جـ_{١}$ = $(\frac{-٢ + ٦}{٢})$ = ٢ ، ق(٢) = ٥، ألاحظ أن ق(٢) × ق(٦) > ٠ وأن

ق(٢) × ق(–٢) < ٠، من نظرية بلزانو $جـ_{١}$ ∈]–٢ ، ٢[

$جـ_{٢}$ = $(\frac{-٢ + ٢}{٢})$ = ٠ ، ق(٠)= –٥ ، ق(٠) × ق(–٢) > ٠، ق(٢) × ق(٠) < ٠

من نظرية بلزانو $جـ_{٢}$ ∈]٠ ، ٢[

$جـ_{٣}$ = $(\frac{٠ + ٢}{٢})$ = ١ هذا هو التقريب الثالث لصفر الاقتران ق(س).

مثال ٤ : أستخدم نظرية بلزانو لإيجاد التقريب الثاني للعدد $\sqrt{٥}$.

الحل : أفرض جـ = $\sqrt{٥}$ ، $جـ^{٢}$ = ٥ ، $جـ^{٢}$ – ٥ = ٠، أفرض أن ق(س) = $س^{٢}$ – ٥

ألاحظ أن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح لأنه كثير حدود. أبحث عن فترة يحقق فيها ق(س) شروط نظرية بلزانو: ق(١) = –٤ ، ق(٢) = –١ ، ق(٣) = ٤

إذن ق(س) المتصل يحقق نظرية بلزانو في [٢، ٣]

إذن يوجد على الأقل عدد مثل جـ ∈] ٢ ، ٣ [بحيث ق(جـ) = صفراً. أي أن $جـ^{٢}$ – ٥ = ٠

ومنها $جـ^{٢}$ = ٥ أي أن جـ = $\sqrt{٥}$ (أي تقريب لقيمة جـ هو تقريب للعدد $\sqrt{٥}$)

$جـ_{١}$ = $\frac{٣ + ٢}{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$ ، ق$(\frac{٥}{٢})$ = ١,٢٥ > ٠ إذن جـ ∈]٢ ، ٢,٥[

$جـ_{٢}$ = $\frac{٢,٥ + ٢}{٢}$ = ٢,٢٥ (التقريب الثاني)

تمارين ومسائل ٧ - ٧

١ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [−٣ ، ٥] ، وكان ق(−٣) = ٢ ، ق(−١)= −١
ق(٠)= ٠ ، ق(٢) = −٣ ، ق(٤) = −١ ، ق(٥) = ١٠
ما هو أقل عدد من الأصفار التي يمكن التأكد من وجودها للاقتران ق(س) في [−٣ ، ٥].

٢ إذا كان ق(س)= س^{٣}− ٢س^{٢} +٢ ، س ∈ [−٢ ، ٤]، أستخدم نظرية بلزانو لإيجاد التقريب الثالث لصفر ق(س).

٣ إذا كان ق(س) =
{ |س+٢| ، ١ ≤ س < ٢
{ ٨ − س^{٢} ، ٢ ≤ س ≤ ٥

أبين أن ق(س) يحقق نظرية بلزانو في [١ ، ٥] ثم أجد قيمة جـ التي تحددها النظرية.

٤ إذا كان ق(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٢س + ٥ ، س ∈ [−١ ، ٣] ، أستخدم نظرية بلزانو لإثبات أن العدد ١٣ ينتمي لمدى الاقتران ق(س).

٥ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [١ ، ٧] ويقع منحناه في الربع الأول من المستوى الديكارتي، وكان هـ(س) = (س^{٢} − ٥) × ق(س)، س ∈ [١ ، ٧] أثبت أن للاقتران هـ(س) صفراً في]١ ، ٧[، ثم أجد التقريب الثالث لصفر هذا الاقتران.

تمارين عامة:

١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كانت نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ (٣ق(س) − ٢ س) = ٢، ما قيمة نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س)؟

أ) −٢ ب) −١ جـ) ١ د) ٢

٢ إذا كان ق(−٢) = ٣ ، نهـا$_{س \leftarrow -٢}$ ق(س) = −٥ ، ما قيمة نهـا$_{س \leftarrow ١}$ ٣ق(س − ٣)؟

أ) −١٥ ب) −٦ جـ) ٣ د) ٩

٣ إذا كان ق(س) = س^{٢} − ١، هـ(س) = $\frac{١}{س - ١}$ ، ما قيمة نهـا$_{س \leftarrow ١}$ (ق × هـ)(س)؟

أ) كمية غير معرفة ب) −١ جـ) ٢ د) ٥

٤ ما قيمة نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{جا \frac{\pi}{٢}}{\pi}$ ؟

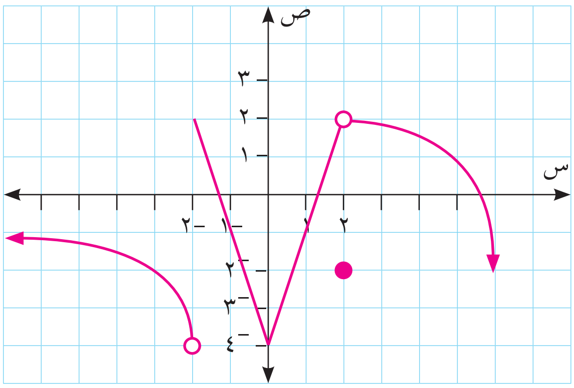
أ) −١ ب) π جـ) $\frac{١}{\pi}$ د) ١

٥ ما قيمة نهـا$_{س \leftarrow -\infty}$ $\frac{٣س^{٣} - ٥}{س^{٣} + ٣}$ ؟

أ) $-\infty$ ب) ٣

جـ) ٥ د) ∞

الشكل الآتي يمثل منحنى الاقتران ق(س)، أعتمد عليه في الإجابة عن الأسئلة من ٦ الى ١١.



٦ ما قيمة نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ ق(س) ؟

أ) −٤ ب) −٣ جـ) −٢ د) ٠

٧ ما قيمة نهـا$_{س \leftarrow -٢}$ ق(س) ؟

أ) −٤ ب) ٠ جـ) ٣ د) غير موجودة

٨ ما قيمة نهـا$_{س \leftarrow \infty}$ ق(س) ؟

أ) $-\infty$ ب) −٢ جـ) ٠ د) ∞

٩ ما قيمة نهـا$_{س \leftarrow -\infty}$ ق(س) ؟

أ) $-\infty$ ب) −٢ جـ) ٠ د) ∞

١٠ ما مجموعة قيم س التي يكون عندها ق(س) منفصلاً ؟

أ) {−٢ ، ٠ ، ٢} ب) $\emptyset$ جـ) {−٢ ، ٢} د) {٠}

١١ ما العبارة الصائبة دائماً من العبارات الآتية:

أ) ق(س) متصل ∀ س ∈ ح
ب) ق(س) متصل ∀ س ∈] −∞ ، −٢[
جـ) ق(س) متصل ∀ س ∈ [−٢ ، ٢]
د) ق(س) متصل ∀ س ∈ [٢ ، ∞ [

١٢ إذا كان ق(س) اقتراناً يحقق شروط بلزانو على [٣ ،٧]، وكان ق(٣) = −١، ق(٥) = −٥ ، فما التقريب الثاني لصفر هذا الاقتران؟

أ) ٧
ب) ٦
جـ) ٥
د) ٤

١٣ إذا كان ق(س) = [س− $\frac{١}{٤}$] فأي قيمة من قيم س الآتية يكون ق(س) منفصلاً عندها؟

أ) ٦
ب) ٤
جـ) $\frac{٥}{٤}$
د) $\frac{٥}{٨}$

٢ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٢} - (٣ - ٢ب) س - ٦ب}{س - ٣} &، س \neq ٣ \\ ١١ &، س = ٣ \end{cases}$

اقتراناَ متصلاَ على ح أجد قيمة/ قيم ب.

٣ إذا كانت $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهــا}} \dfrac{(س^{٢} + ١)^{٢}}{أ س^{٢} (س + ١)^{ن}} = -٢$ ، أجد قيم كل من أ ، ن .

٤ إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين كثيري حدود، وكان ق(١) > هـ(١) ، ق(٢) < هـ(٢)
أثبت باستخدام بلزانو أنه يوجد جـ ∈] ١ ، ٢ [بحيث ق(جـ) = هــ(جـ).

٥ أستخدم نظرية بلزانو لإيجاد التقريب الثالث للعدد $\sqrt[٣]{٧}$

أقيّم ذاتي أعبر بلغتي عن نقاط القوة والضعف الواردة في مفاهيم هذه الوحدة بما لا يزيد عن ٤ أسطر.

فكرة رياديّة

يعاني المجلس المحلي لإحدى البلدات الفلسطينية من أزمة التلوث البيئي الناتج عن المياه العادمة، عرضت البلدية المشكلة عليك، وطلبت منك وضع تصور لحل المشكله آخذاً بعين الاعتبار المياه العادمة المتسربة من المستوطنات المحيطة بالبلدة وكيفية التعامل معها، الخسائر المتوقعة من جراء التلوث، أثر هذا التسرب على المياه الجوفية، عمل رسومات تمثل المسارات الأفضل لجريان المياه العادمة، هل عمل مسارات متصلة لكل أحياء البلدة أفضل، أم لكل حي على انفراد. ما هي المكاسب التي نجنيها من معالجة هذه المشكلة.

روابط إلكترونية

- https://www.symbolab.com/solver/limit-calculator
- https://www.mathsisfun.com/calculus/limits.html
- http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcI/InfiniteLimits.aspx

ملحق قوانين رياضية:

١
- جا^{٢} س + جتا^{٢}س = ١
- ظا^{٢}س + ١ = قا^{٢}س
- ١ + ظتا^{٢}س = قتا^{٢} س

٢
- جا(π − س) = جاس
- جا(π + س) = − جاس
- جا(− س) = − جاس

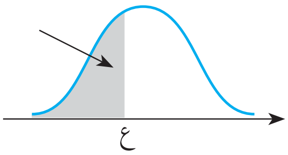
٣
- جتا(π − س) = − جتاس
- جتا(π + س) = − جتاس
- جتا(− س) = جتاس

٤
- ظا(π − س) = − ظاس
- ظا(π + س) = ظاس
- ظا(− س) = − ظاس

٥
- جا(٢س) = ٢ جاس جتاس
- جتا(٢س) = { جتا^{٢}س − جا^{٢}س ، ١ − ٢ جتا^{٢}س ، ٢ جا^{٢}س − ١ }

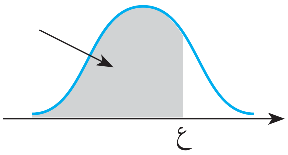
٦
- $\sqrt{\text{س}^{٢}}$ = |س|
- |س| = { س ، س $\geq$ صفر ؛ −س ، س $<$ صفر }
- |س^{٢} − أ^{٢}| = { س^{٢} − أ^{٢} ، −أ $\leq$ س $\leq$ أ ؛ أ^{٢} − س^{٢} ، أ $<$ س $<$ −أ }

٧
- [س] = ن $\Leftarrow$ ن $\leq$ س $<$ ن + ١ ، ن $\in$ ص
- ق(س) = [أ س] $\Leftarrow$ $\frac{١}{|\text{أ}|}$ طول الدرجة



ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
-٣,٧	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
-٣,٦	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
-٣,٥	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢
-٣,٤	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٢
-٣,٣	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٣
-٣,٢	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥
-٣,١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧
-٣,٠	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠١٠
-٢,٩	٠,٠٠١٩	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٧	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٤
-٢,٨	٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٢٥	٠,٠٠٢٤	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٢	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢٠	٠,٠٠١٩
-٢,٧	٠,٠٠٣٥	٠,٠٠٣٤	٠,٠٠٣٣	٠,٠٠٣٢	٠,٠٠٣١	٠,٠٠٣٠	٠,٠٠٢٩	٠,٠٠٢٨	٠,٠٠٢٧	٠,٠٠٢٦
-٢,٦	٠,٠٠٤٧	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٤٤	٠,٠٠٤٣	٠,٠٠٤١	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٣٩	٠,٠٠٣٨	٠,٠٠٣٧	٠,٠٠٣٦
-٢,٥	٠,٠٠٦٢	٠,٠٠٦٠	٠,٠٠٥٩	٠,٠٠٥٧	٠,٠٠٥٥	٠,٠٠٥٤	٠,٠٠٥٢	٠,٠٠٥١	٠,٠٠٤٩	٠,٠٠٤٨
-٢,٤	٠,٠٠٨٢	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٧٨	٠,٠٠٧٥	٠,٠٠٧٣	٠,٠٠٧١	٠,٠٠٦٩	٠,٠٠٦٨	٠,٠٠٦٦	٠,٠٠٦٤
-٢,٣	٠,٠١٠٧	٠,٠١٠٤	٠,٠١٠٢	٠,٠٠٩٩	٠,٠٠٩٦	٠,٠٠٩٤	٠,٠٠٩١	٠,٠٠٨٩	٠,٠٠٨٧	٠,٠٠٨٤
-٢,٢	٠,٠١٣٩	٠,٠١٣٦	٠,٠١٣٢	٠,٠١٢٩	٠,٠١٢٥	٠,٠١٢٢	٠,٠١١٩	٠,٠١١٦	٠,٠١١٣	٠,٠١١٠
-٢,١	٠,٠١٧٩	٠,٠١٧٤	٠,٠١٧٠	٠,٠١٦٦	٠,٠١٦٢	٠,٠١٥٨	٠,٠١٥٤	٠,٠١٥٠	٠,٠١٤٦	٠,٠١٤٣
-٢,٠	٠,٠٢٢٨	٠,٠٢٢٢	٠,٠٢١٧	٠,٠٢١٢	٠,٠٢٠٧	٠,٠٢٠٢	٠,٠١٩٧	٠,٠١٩٢	٠,٠١٨٨	٠,٠١٨٣
-١,٩	٠,٠٢٨٧	٠,٠٢٨١	٠,٠٢٧٤	٠,٠٢٦٨	٠,٠٢٦٢	٠,٠٢٥٦	٠,٠٢٥٠	٠,٠٢٤٤	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٣٣
-١,٨	٠,٠٣٥٩	٠,٠٣٥١	٠,٠٣٤٤	٠,٠٣٣٦	٠,٠٣٢٩	٠,٠٣٢٢	٠,٠٣١٤	٠,٠٣٠٧	٠,٠٣٠١	٠,٠٢٩٤
-١,٧	٠,٠٤٤٦	٠,٠٤٣٦	٠,٠٤٢٧	٠,٠٤١٨	٠,٠٤٠٩	٠,٠٤٠١	٠,٠٣٩٢	٠,٠٣٨٤	٠,٠٣٧٥	٠,٠٣٦٧
-١,٦	٠,٠٥٤٨	٠,٠٥٣٧	٠,٠٥٢٦	٠,٠٥١٦	٠,٠٥٠٥	٠,٠٤٩٥	٠,٠٤٨٥	٠,٠٤٧٥	٠,٠٤٦٥	٠,٠٤٥٥
-١,٥	٠,٠٦٦٨	٠,٠٦٥٥	٠,٠٦٤٣	٠,٠٦٣٠	٠,٠٦١٨	٠,٠٦٠٦	٠,٠٥٩٤	٠,٠٥٨٢	٠,٠٥٧١	٠,٠٥٥٩
-١,٤	٠,٠٨٠٨	٠,٠٧٩٣	٠,٠٧٧٨	٠,٠٧٦٤	٠,٠٧٤٩	٠,٠٧٣٥	٠,٠٧٢١	٠,٠٧٠٨	٠,٠٦٩٤	٠,٠٦٨١
-١,٣	٠,٠٩٦٨	٠,٠٩٥١	٠,٠٩٣٤	٠,٠٩١٨	٠,٠٩٠١	٠,٠٨٨٥	٠,٠٨٦٩	٠,٠٨٥٣	٠,٠٨٣٨	٠,٠٨٢٣
-١,٢	٠,١١٥١	٠,١١٣١	٠,١١١٢	٠,١٠٩٣	٠,١٠٧٥	٠,١٠٥٦	٠,١٠٣٨	٠,١٠٢٠	٠,١٠٠٣	٠,٠٩٨٥
-١,١	٠,١٣٥٧	٠,١٣٣٥	٠,١٣١٤	٠,١٢٩٢	٠,١٢٧١	٠,١٢٥١	٠,١٢٣٠	٠,١٢١٠	٠,١١٩٠	٠,١١٧٠
-١,٠	٠,١٥٨٧	٠,١٥٦٢	٠,١٥٣٩	٠,١٥١٥	٠,١٤٩٢	٠,١٤٦٩	٠,١٤٤٦	٠,١٤٢٣	٠,١٤٠١	٠,١٣٧٩
-٠,٩	٠,١٨٤١	٠,١٨١٤	٠,١٧٨٨	٠,١٧٦٢	٠,١٧٣٦	٠,١٧١١	٠,١٦٨٥	٠,١٦٦٠	٠,١٦٣٥	٠,١٦١١
-٠,٨	٠,٢١١٩	٠,٢٠٩٠	٠,٢٠٦١	٠,٢٠٣٣	٠,٢٠٠٥	٠,١٩٧٧	٠,١٩٤٩	٠,١٩٢٢	٠,١٨٩٤	٠,١٨٦٧
-٠,٧	٠,٢٤٢٠	٠,٢٣٨٩	٠,٢٣٥٨	٠,٢٣٢٧	٠,٢٢٩٦	٠,٢٢٦٦	٠,٢٢٣٦	٠,٢٢٠٦	٠,٢١٧٧	٠,٢١٤٨
-٠,٦	٠,٢٧٤٣	٠,٢٧٠٩	٠,٢٦٧٦	٠,٢٦٤٣	٠,٢٦١١	٠,٢٥٧٨	٠,٢٥٤٦	٠,٢٥١٤	٠,٢٤٨٣	٠,٢٤٥١
-٠,٥	٠,٣٠٨٥	٠,٣٠٥٠	٠,٣٠١٥	٠,٢٩٨١	٠,٢٩٤٦	٠,٢٩١٢	٠,٢٨٧٧	٠,٢٨٤٣	٠,٢٨١٠	٠,٢٧٧٦
-٠,٤	٠,٣٤٤٦	٠,٣٤٠٩	٠,٣٣٧٢	٠,٣٣٣٦	٠,٣٣٠٠	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٢٨	٠,٣١٩٢	٠,٣١٥٦	٠,٣١٢١
-٠,٣	٠,٣٨٢١	٠,٣٧٨٣	٠,٣٧٤٥	٠,٣٧٠٧	٠,٣٦٦٩	٠,٣٦٣٢	٠,٣٥٩٤	٠,٣٥٥٧	٠,٣٥٢٠	٠,٣٤٨٣
-٠,٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤١٦٨	٠,٤١٢٩	٠,٤٠٩٠	٠,٤٠٥٢	٠,٤٠١٣	٠,٣٩٧٤	٠,٣٩٣٦	٠,٣٨٩٧	٠,٣٨٥٩
-٠,١	٠,٤٦٠٢	٠,٤٥٦٢	٠,٤٥٢٢	٠,٤٤٨٣	٠,٤٤٤٣	٠,٤٤٠٤	٠,٤٣٦٤	٠,٤٣٢٥	٠,٤٢٨٦	٠,٤٢٤٧
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٢٠	٠,٤٨٨٠	٠,٤٨٤٠	٠,٤٨٠١	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٢١	٠,٤٦٨١	٠,٤٦٤١



تابع جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٩	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨
٣,٥	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨
٣,٦	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩
٣,٧	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩

المشروع

شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع.

ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

ميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينفّذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفّر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومترابطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلّب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطّط له مسبقاً.

ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخّل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.
٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.
٣. تحديد خطوات سير المشروع.
٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، **(شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).**
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلّي.

ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلّاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلّم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. **الأهداف** التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.
٢. **الخطة** من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحّدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.
٣. **الأنشطة** التي قام بها الطلبة من حيث، تنوّعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.
٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التى استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

المراجع

التميمي، علي جاسم (2009): مقدمة في الجبر الخطي، دار المسيرة، عمان .

زيتون، عايش محمود (2004): أساسيات الإحصاء الوصفي، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان .

عوض، عدنان (1991): الرياضيات العامة وتطبيقاتها الاقتصادية، دار الفرقان_ اربد_ الأردن .

قنديلجي، عامر إبراهيم (2008): البحث العلمي واستخدام مصادر المعلومات التقليدية والالكترونية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع- عمان- الأردن.

طبش، خليل (20132): مبادئ الرياضيات العامة , الجامعة الإسلامية .

التميمي، علي جاسم (2009): مقدمة في الجبر الخطي، دار المسيرة، عمان .

الشراونة، عبد الحكيم عامر (2006): موسوعة الرياضيات في النهايات والتفاضل، دار الاسراء للنشر والتوزيع_عمان_ الأردن .

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume1

Bell,E,T (1937):Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Lanl B.Boyer(1989): History of Mathematics Wiley,N.Y

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume2

لجنة المناهج الوزارية:

د. صبري صيدم	أ. ثروت زيد	د. شهناز الفار
د. بصري صالح	أ. عزام أبو بكر	د. سمية النخالة
م. فواز مجاهد	أ. علي مناصرة	م. جهاد دريدي

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد مطر	د. سمية النخالة
د. محمد صالح (منسقًا)	د. علا الخليلي	أ. أحمد سياعرة
د. معين جبر	د. شهناز الفار	أ. قيس شبانة
د. علي عبد المحسن	د. علي نصار	أ. مبارك مبارك
د. تحسين المغربي	د. أيمن الأشقر	أ. عبد الكريم صالح
د. عادل فوارعة	أ. ارواح كرم	أ. نادية جبر
أ. وهيب جبر	أ. حنان أبو سكران	أ. أحلام صلاح
د. عبد الكريم ناجي	أ. كوثر عطية	أ. نشأت قاسم
د. عطا أبوهاني	د. وجيه ضاهر	أ. نسرين دويكات
د. سعيد عساف	أ. فتحي أبو عودة	

المشاركون في ورشات عمل كتاب الرياضيات الجزء الثاني للحادي عشر العلمي والصناعي:

د. محمد صالح	سامي بدر	محمد فايز
أحمد أمين	سرين أبو عيشة	مراد غنيم
أرواح كرم	سميرة حنيف	مصطفى عفانة
ابتسام اسليم	سمير درويش	منال الصباغ
باسم المدهون	سمير عمران	منى الطهراوي
توفيق السعده	سهيلة بدر	موسى حراحشة
حنين شرف	سهيل شبير	مي عصايرة
رأفت عمرو	عبد الكريم صالح	هناء أبو عامر
رائدة عويص	عوني الفقيه	وائل العبيات
رائد عبد العال	فلاح الترك	وفاء موسى
رفيق الصيفي	محمد الفرا	
ريم جابر	محمد حمدان	

تَمَّ بِحَمْدِ الله