١١

بسم الله الرحمن الرحيم

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيــات

الفروع: الريادي والفندقي والاقتصاد المنزلي

فريق التأليف:

أ. خليل محيسن (منسقاً)　　أ. وسام موسى　　أ. لبنى أبو باشا　　أ. مهند سلمان

أ. قيس شبانة　　أ. نسرين دويكات

مركز المناهج

قـــررت وزارة التربيـــة والتعليـــم فـــي دولـــة فلســـطين
تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧ / ٢٠١٨ م

الإشــراف العام:

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائرة الفنية:

إشراف إداري	أ. كمال فحماوي
تصميم	أ. لينا يوسف

تحكيم علمي	د. محمد نجيب
تحرير لغوي	أ. عمر عبدالرحمن
متابعة المحافظات الجنوبية	د.سمية النَّخالة

الطبعة الثانية
٢٠١٩ م/ ١٤٤٠ هـ

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
https://www.facebook.com/Palestinian.MOEHE/
+970-2-2983250 فاكس | +970-2-2983280 هاتف

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 - رام الله - فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

تقديم

يتصف الإصلاح التربويّ بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجوانبها جميعاً، بما يسهم في تجاوز التحديات النوعية باقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط في إشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقررّة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس، لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم
مركز المناهج الفلسطينية
أيلول/ ٢٠١٧ م

مقدمة

تُعد المرحلة الثانوية (١١-١٢) آخر مراحل التعليم المدرسي حيث تشهد أهم التّغيّرات التي يمرّ فيها الطالب وترسُم معالم شخصيته مستقبلاً، وفيها يكتسب المعارف و الخبرات الأساسية، وفي الوقت نفسه يتمتع بحياة اجتماعية سليمة ليكون عضواً فاعلاً يواكب المستجدات في المجالات العلمية والتكنولوجية بما يخدم المجتمع.

وتلعب العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة دوراً كبيراً في تمكين الطلبة من المعارف والمهارات والخبرات باكتشاف المعرفة وتوظيفها في حلّ المشكلات الحياتية واتخاذ قرارات ذات علاقة بواقع حياتهم اليومية مما يُسهم في تحسين نوعية التعليم والتعلم وصولاً إلى طلبة باحثين مبدعين ومنتجين.

وتُعدّ الرياضيات من المباحث التي تخاطب عقل الطالب وتنمّي فيه مهارات متنوعة تكسبه القدرة على التعامل المنطقي مع محيطه ومن حوله؛ وبذلك تؤدي إلى تمكين الطالب من اكتساب معارف ومهارات واتجاهات وقيم تساعده في تنمية ذاته ومجتمعه، من خلال معرفته بمحيطه المادي والبشري وبالأنظمة المعرفية المختلفة، وحلّ ما يواجهه من مشكلات دراسية وعلمية في حاضره ومستقبله.

وقد تضمّن هذا الكتاب أنشطة منظمة للمفاهيم والمعارف التي تُحاكي السياقات الحياتية الواقعية وتمكنها ضمن أنشطة معروضة بسياقات حياتية واقعية، تُحاكي البيئة الفلسطينية وخصوصيتها وتركّز على التّعلم النشط مُراعية لقدرات الطلبة وحاجاتهم ،إذ تتاح أمامهم الفرص لتبادل الخبرات من خلال المناقشة والحوار والعمل الجماعي وبالإفادة من وسائل تكنولوجية لتوظيفها في البحث عن المعلومات وتوظيفها بما يحقق التّعلم الفعّال.

يتكوّن هذا الكتاب من ست وحدات دراسية، ففي الوحدة الأولى الاحصاء والاحتمالات تم التطرق إلى تعريف البحث العلمي وخطواته، وطرق جمع البيانات والعينات الاحتمالية وانواعها، والمتغير العشوائي المنفصل وتوقعه، وتوزيع ذات الحدين.

وفي الوحدة الثانية "المتتاليات والمتسلسلات" تم التطرق إلى تعريف المتتالية وتعريف المتسلسلة، وكذلك المتتالية الحسابية والهندسية ومجموع المتسلسلة الحسابية والهندسية.

وفي الوحدة الثالثة "الأرقام القياسية" تم التطرق إلى تعريف الأرقام القياسية، والرقم القياسي لمجموعة من السلع، والأرقام القياسية المرجحة.

وفي الوحدة الرابعة "المعادلات والمتباينات" تم التطرق إلى حل نظام من معادلتين خطيتين ، وحل أنظمة من المعادلات الخطية بثلاثة متغيرات، وحل معادلات تشتمل على الجذور، و حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية، وحل المعادلات والمتباينات التي تشتمل القيمة المطلقة، وحل أنظمة المتباينات الخطية بمتغيرين.

وفي الوحدة الخامسة "النهايات والاتصال" تم التطرق إلى تعريف نهاية الاقتران، وقوانين النهايات، ونهاية الاقترانات متعددة القواعد ونهاية الاقتران عندما تقترب س من المالانهاية وتم التطرق إلى مفهوم الاتصال.

وفي الوحدة السادسة " الرياضيات المالية " تم عرض مفهوم الدفعات والقيمة المستقبلية للدفعات المنتظمة والقيمة الحالية للدفعات المنتظمة ومفهوم التقسيط والفائدة وانواعها .

وأخيراً نتمنى أن نكون قد وُفقنا في إنجاز هذا الكتاب لما فيه خير لأولادنا ولفلسطين العزيزة.

فريق التأليف

الوحدة الأولى
الإحصاء والاحتمالات

المجتمـع الفلسـطيني مجتمـع فتـيّ، أناقش توقعات مؤشرات النمو السكاني فـي فلسـطين بعـد عشـرين عامـاً ؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الإحصاء والاحتمالات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ التعرف إلى مفهوم البحث العلمي وخطواته.

٢ التمييز بين أنواع العيّنات، والتعرف إلى طرق سحبها.

٣ إيجاد المتغير العشوائي المنفصل، وتوزيعه الاحتمالي.

٤ حساب التوقع للمتغير العشوائي المنفصل، وتفسيره.

٥ توظيف توزيع ذات الحدين في حل مسائل حياتية، وحساب التوقع لها.

١-١ البحث العلمي (Scientific Research)

نشاط (١)

تعتبر دراسة النمو السكاني ذات أهمية في تحديد سياسات الدولة وقراراتها؛ لخدمة المواطنين وتحسين معيشتهم، ولدراسة النمو السكاني في فلسطين للسنوات العشر الأخيرة، احتاج مهند لمجموعة من البيانات، فقرر زيارة مركز الإحصاء الفلسطيني، حيث حصل على البيانات الآتية:

١. عدد السكان الفلسطينيين المقدر في منتصف عام ٢٠١٥ هو ٤,٦٨ مليون نسمة، بواقع ٢,٣٨ مليون من الذكور.

عدد الإناث ....

٢. بلغت نسبة السكان الحضر ٧٣,٤٪ ونسبة المقيمين في الريف ١٦,٧٪

تقدر نسبة المقيمين في المخيمات ....

تعريف البحث العلمي:

جمع منظم للمعلومات المتوفرة لدى الباحث عن موضوع معين، وترتيبها بصورة جيدة؛ بحيث تدعم المعلومات السابقة، أو تصبح أكثر نقاءً ووضوحاً. وهو عملية استقصاء منظمة ودقيقة لجمع الشواهد والأدلة، بهدف اكتشاف معلومات، أو علاقات جديدة، أو تكميل معلومات أو علاقات ناقصة، أو تصحيح خطأ فيه وذلك لبناء استراتيجية شاملة لكافة الأنشطة الخاصة بالمجتمع والدولة.*

خطوات البحث العلمي:

١. تحديد مشكلة البحث، والتساؤلات الغامضة التي قد تدور في ذهن الباحث حول موضوع الدراسة التي اختارها، والتي تحتاج إلى تفسير يسعى الباحث إلى إيجاد إجابات علمية شافية ووافية لها.
٢. اقتراح اسم البحث، فيجب على الباحث أن يكون على دراية بموضوعه المختار؛ حتى يتم تحديد الاسم المناسب للبحث .
٣. وضع أسئلة الدراسة وفرضياتها، والتي يجب أن ترتبط ارتباطاً وثيقاً بمشكلة البحث.
٤. جمع البيانات المطلوبة لإجراء الدراسة، وتحليلها.
٥. إظهار النتائج وتفسيرها .
٦. وضع مقترحات وتوصيات بناءً على نتائج التحليل.

* ارجع لمنشورات مركز الإحصاء الفلسطيني على الرابط www.pcbs.gov.ps/default.aspx#

نشاط (٢)

يكتب الباحث - عادة - ملخصاً للبحث الذي يقوم به؛ من أجل تعريف المهتمين بعناصر البحث، وأسئلته، وفرضياته، والخطوات التي تم فيها إجراء البحث، وغيرها من العناصر، ففي بحث بعنوان أثر المياه العادمة التي تكبّها مصانع مستوطنات الاحتلال، وتلوث بها حياة المواطنين في محافظة سلفيت كان ملخص الدراسة كما يأتي:

العنوان: أثر المياه العادمة التي تكبّها المصانع (مستوطنة بركان) على حياة المواطنين في قرى محافظة سلفيت.

المقدمة: منذ أن اغتصب الاحتلال أراضي المواطنين في محافظة سلفيت، أقام عليها مصانع في المستوطنات، ومن هنا بدأت معاناة المواطنين في القرى المجاورة لهذه المستوطنات، حيث أصبحت الأراضي الزراعية والأودية مستنقعات للمياه العادمة من مجاري ومخلفات مصانع الجلود وغيرها في هذه المستوطنات؛ مما شكّل مخاطر صحية ونفسية على حياة المواطنين.

- ومن خلال مقابلة عدد من المواطنين الذين يعانون من هذه المخلفات، نرى حجم المعاناة والخطر الذي يتهدد حياتهم من استنشاق الروائح الكريهة، ولسعات البعوض، والحشرات الفتّاكة، وتلف مزروعاتهم، وموت بعض مواشيهم حيث تشكل هذه المخلفات خطراً حقيقياً على حياتهم. وقد خلص البحث إلى إبراز المخاطر الصحية و النفسية و الاجتماعية الناجمة عن مخلفات المياه العادمة للمستوطنات الصهيونية، وأثرها الكارثي على المواطنين في القرى المحاذية لهذه المستوطنات، والخروج بالتوصيات إلى الجهات المسؤولة بضرورة التحرك لإنهاء معاناة المواطنين في هذه المناطق. وفضح جرائم الاحتلال الصهيوني في المحافل الدولية عن طريق منظمات الصحة العالمية.

١. في الملخص السابق كان عنوان البحث: أثر المياه العادمة التي تكبّها مصانع مستوطنة بركان على حياة المواطنين في قرى محافظة سلفيت.

٢. مشكلة البحث ....

٣. أداة جمع البيانات ....

٤. التوصيات ....

تمارين ومسائل (١-١)

① أعرّف البحث العلمي، وأحدد خطوات تنفيذه.

② أدرس ملخص الدراسة الآتي، وأحدد فيه:

أ. مشكلة البحث   ب. نتائج الدراسة   جـ. أدوات جمع البيانات   د. توصيات الدراسة.

عنوان البحث: الرضا الوظيفي لمديري المدارس الأساسية في محافظة الخليل من وجهة نظرهم.

هدفت الدراسة إلى التعرف على درجة الرضا الوظيفي لدى مديري المدارس الأساسية في محافظة الخليل، عن العائد الوظيفي (معنوي ومادي) وعن العلاقات الإنسانية والاجتماعية مع الطلبة وأولياء الأمور، وقد شملت الدراسة ٥٠ مديراً من مديري المدارس الأساسية، حيث تم استخدام الاستبانة أداةً لجمع البيانات، وتم تحليل نتائج الدراسة باستخدام المعالجة الإحصائية وخلصت الدراسة إلى نتائج، أهمها: أن درجة الرضا الوظيفي لدى مديري المدارس الأساسية عن العائد الوظيفي (معنوي ومادي) كان بدرجة عالية، وكذلك العلاقات الإنسانية والاجتماعية مع الطلبة وأولياء الأمور. وقد قدم الباحث عدداً من التوصيات في ضوء نتائج الدراسة، أهمها: تعزيز وعي مديري المدارس بأهمية الشعور بالرضا الوظيفي، والعمل على إدارة البيئة المدرسية بنجاح وفاعلية، وإعطاء الصلاحيات المناسبة لاتخاذ القرارات بخصوص ما يعترض العمل المدرسي من مشكلات.

١-٢ طرق جمع البيانات (Data Collection Methods)

نشاط

في دراسة الواقع الديموغرافي الفلسطيني لتعزيز صموده، يقوم مركز فلسطيني للأبحاث بإجراء دراسات متعددة، يحتاج فيها إلى جمع بيانات من أفراد المجتمع، فأحيانا تتطلب الدراسة جمع البيانات من جميع أفراد المجتمع، وأحيانا أخرى يمكن أن يكتفى بجمع البيانات من مجموعة جزئية من المجتمع.

أحدد فيما يأتي، متى يجب أخذ جميع عناصر المجتمع؟ ومتى يمكن أخذ جزء منه؟ لإجراء الأبحاث الآتية:

١. لإحصاء عدد المواليد الذكور في مدينة غزة، نأخذ جميع عناصر المجتمع.

٢. لتقدير نسبة التحاق طلبة القدس بالجامعات، يمكن أخذ جزء ممثل من المجتمع.

٣. إجراء التعداد العام للمنشآت الصناعية في مدينة الخليل...

٤. دراسة اتجاهات طلبة الصف العاشر في فلسطين، حول الالتحاق بالفرع الريادي.............

٥. إجراء فحص دم لشخص في فلسطين مصاب بمرض ما ....

١. جمع البيانات الإحصائية

أ. المسح الشامل:

تعريف: المسح الشامل هي عملية يتم فيها جمع البيانات من كل أفراد المجتمع.

مما يعطي معلومات شاملة عن خصائص المجتمع المراد دراستها، لكن قد يتطلب ذلك وقتاً وجهداً كبيرين، ويتطلب أيضاً فريق عمل، ونفقات مرتفعة، نظراً لكثرة عدد الأفراد، مثل: التعداد العام للسكان، والمساكن، والمنشآت. هناك عدة حالات يتعذر فيها المسح الشامل، كعملية فحص الدم، وكمية السمك في البحر ، وعندها نلجأ إلى دراسة جزء من المجتمع الإحصائي يسمى العيّنة.

ب. العيّنات

تعريف العيّنة: هي مجموعة جزئيّة من المجتمع.

أنواع العينات

إن من أهم خطوات الدراسة، هو اختيار عيّنة ممثلة للمجتمع؛ للتوصل إلى استنتاجات يمكن تعميمها على جميع أفراد المجتمع، وهذا يعتمد على اختيار الطريقة السليمة لاختيار العينة.

لذا سنتعرف على الطرق التي نختار بها العيّنة. حيث إن هناك نوعان من العيّنات:

١. العيّنات غير الاحتمالية

وهي العيّنات التي لا تخضع لقوانين الاحتمالات عند اختيارها، ومن الأمثلة عليها:

أ. عيّنة الصدفة، التي تعتمد على الصدفة في اختيارها، مثل: دراسة موقف الرأي العام من ظاهرة معينة، حيث يختار الباحث عدداً من الناس يقابلهم بالصدفة. ويؤخذ على هذه العينة أنها لا يمكن أن تمثل المجتمع الأصلي بدقة، ومن هنا يصعب تعميم نتائجها على المجتمع.

ب. العيّنة الوصولية، حيث تعتمد على سهولة الوصول للعينة للحصول على البيانات.

جـ. العيّنة القصديّة، حيث يختار الباحث عيّنته بناءً على حكم ورأي شخصي، ومن عيوبها أنها تتأثر بالتحيز الشخصي.

وهناك أمثلة أخرى على أنواع العينات غير العشوائية، مثل: الحصصية والكرة الثلجية، وغيرها...

٢. العيّنات الاحتمالية

هي تلك العيّنات التي يخضع اختيارها لقوانين احتمالية، وسوف نقتصر دراستنا على العيّنات الاحتمالية الآتية:

أ. العيّنة العشوائية البسيطة.

ب. العيّنة الطبقية العشوائية.

جـ . العيّنة العشوائية المنتظمة.

تمارين ومسائل (١-٢)

١ أوضح المقصود بما يأتي مدعماً إجابتي بالأمثلة:

أ. المسح الشامل   ب. العيّنة.

٢ أعدد أربعةً من أسباب اللجوء إلى العيّنة الممثلة للمجتمع، بدلاً من المسح الشامل.

٣ أحدد أيّاً من الظواهر الآتية نحتاج فيها إلى أخذ عينة، وأيها نحتاج إلى المسح الشامل:

أ. إجراء تعداد عام لمصانع الصابون في فلسطين.

ب. دراسة أثر مواقع التواصل الاجتماعي على العلاقات الأسرية.

جـ. فحص صلاحية إنتاج مصنع للأغذية.

١-٣ العيّنات الاحتمالية (Probability Samples)

نشاط (١)

لإجراء دراسة حول معدل التحصيل في مبحث الرياضيات لطلبة مدرسة الشهيد خليل الوزير الثانوية للبنين، قررت الهيئة التدريسية دراسة ذلك على عينة ممثلة للطلاب، فسجلت أسماء جميع الطلبة على بطاقات، وطلب من أحد المعلمين سحب عينة حجمها ٣٠ طالباً، بحيث يسحب المعلم البطاقة، ويحدد الاسم، ثم يعيد البطاقة إلى الصندوق، ويسحب البطاقة الثانية فإذا تكرر الاسم، يعيد التجربة مرةً أخرى، وهكذا... حتى تم سحب العينة كاملة، وبعد فترة قررت الهيئة قياس معدل التحصيل حسب الصف. أقترح طريقة لسحب هذه العينة....

في هذا البند، سنتعرف بالتفصيل على كل نوع من أنواع العيّنات الاحتمالية وعلى طريقة سحبها.

أولاً: العينة العشوائية البسيطة

هي العيّنة التي يكون لكل عنصر من عناصرها نفس فرصة الاختيار، وإن اختيار أي عنصر في العيّنة، لا يؤثر على اختيار عنصر آخر فيها.

ونلجأ إلى استخدام هذه العينة في حالة تجانس المجتمع من حيث: السمة المراد دراستها، حيث تستخدم جداول الأرقام العشوائية، أو القرعة، أو البرامج الحاسوبية، وغيرها من الطرق في تحديد عناصرها.

مثال: لإجراء دراسة حول مدى فاعلية طعم ضد الإنفلونزا على ٢٠٠ شخص، سحبت عينة حجمها ١٠ أشخاص، أوضح خطوات سحب العينة.

الحل:

١. أرقِّم عناصر المجتمع من ١ إلى (ح) حيث ح حجم المجتمع، وبالتالي أبدأ الترقيم من ١ وأنتهي بالرقم ٢٠٠ بحيث يكون عدد المنازل ٣ " مساو لعدد منازل العدد ٢٠٠ " وبذلك تكون أرقام عناصر المجتمع هي:

٠٠١، ٠٠٢، .....، ١٩٦ ، ١٩٧، ١٩٨، ١٩٩، ٢٠٠ .

٢. أستخدم جدول الأرقام العشوائية المرفق، وأبدأ بعمود عشوائياً، وليكن العمود الأول، بحيث أنظر إلى أول ثلاث منازل في العمود، وأختار الأرقام بين ٠٠١ و ٢٠٠ دون تكرار، وأتابع ذلك في باقي أعمدة الجدول، حتى أحصل على العيّنة بالحجم المطلوب.

٣. وبالتالي تكون العيّنة هي العناصر التي تحمل الأرقام:

١٠٤، ٠٩٤، ١٠٣، ٠٧١، ٠٢٣، ٠١٠، ٠٧٠، ٠٢٤، ٠٠٧، ٠٩٧

ثانياً: العيّنة العشوائيّة الطبقية

تعريف: العيّنة العشوائيّة الطبقيّة، هي العيّنة التي تسحب في حالة يكون المجتمع فيها غير متجانس، وكان بالإمكان تقسيمه إلى مجتمعات متجانسة، وغير متداخلة "طبقات " حيث تسحب عيّنة عشوائيّة بسيطة من كل طبقة.

مثال: تقسيم المدرسة إلى صفوف، وتقسيم المجتمع الفلسطيني إلى مدن وقرى ومخيمات ... ، وتقسيم طلبة الجامعة حسب الكليات.

ويمكن ايجاد حجم العينة الطبقية باستخدام القانون

$$\text{حجم العينة الطبقية} = \text{حجم الطبقة} \times \left(\frac{\text{حجم العينة الكلية}}{\text{حجم المجتمع}}\right)$$

نشاط (٢)

إذا كان أعداد طالبات مدرسة الشهيدة دلال المغربي الثانوية للبنات موزعين حسب الصفوف كما يأتي:

الصف	التاسع	العاشر	الحادي عشر	الثاني عشر
العدد	١٨٠	١٢٠	٢٥٠	١٥٠

• وإذا أريد سحب عيّنة حجمها ١٤٠ طالبةً، بطريقة المعاينة الطبقيّة العشوائيّة، وعلى أساس الصف.

- حجم المجتمع = حجم الطبقة الأولى + حجم الطبقة الثانية + حجم الطبقة الثالثة + حجم الطبقة الرابعة

= ١٨٠ + ١٢٠ + ٢٥٠ + ١٥٠ = ٧٠٠ طالبة.

- حجم العينة من الصف التاسع = عدد طلاب الصف التاسع × (حجم العينة الكلية ÷ حجم المجتمع الكلي)

$= ١٨٠ \times \frac{١٤٠}{٧٠٠} = ٣٦$ طالبةً.

- حجم العينة من الصف العاشر = عدد طلاب الصف العاشر × (حجم العينة الكلية ÷ حجم المجتمع الكلي)

$= ١٢٠ \times \frac{١٤٠}{٧٠٠} = ٢٤$ طالبةً.

- حجم العينة من الصف الحادي عشر ....

- حجم العينة من الصف الثاني عشر ....

ألاحظ أن حجم العينة الكلية = حجم العينة من الطبقة الأولى + حجم العينة من الطبقة الثانية + حجم العينة من الطبقة الثالثة + حجم العينة من الطبقة الرابعة.

• لسحب عينة حجمها ٣٦ طالبةً من الطبقة الأولى من مجتمع الصف التاسع والبالغ عددهم ١٨٠ طالبةً، أستخدم طريقة العينة العشوائية البسيطة، حيث أرقم عناصر الطبقة الأولى من ٠٠١، ٠٠٢، إلى ١٨٠ ثم أستخدم جدول الأرقام العشوائية لتحديد العينة.

عناصر العيّنة من الصف التاسع هي ....

عناصر العيّنة من الصف العاشر هي ....

عناصر العيّنة من الصف الحادي عشر هي ....

عناصر العيّنة من الصف الثاني عشر هي ....

ثالثاً: العيّنة العشوائيّة المنتظمة

هي العيّنة التي يتم اختيار مفرداتها بصورة منتظمة، وبترتيب معين، بعد أن يتم اختيار نقطة البداية بطريقة عشوائية.

وتعتبر هذه الطريقة سهلةً مقارنةً بالعيّنة العشوائيّة البسيطة، وغالباً ما تعطي معلومات أكثر من المعلومات التي نحصل عليها في المعاينة العشوائيّة البسيطة، لأنها تكون موزعةً بشكل أكثر تجانساً على جميع أفراد المجتمع.

نشاط (٣)

تعتبر استطلاعات الرأي من الأدوات الإحصائية لجمع البيانات ودراسة توجهات المجتمع نحو ظاهرة معينة، ولإجراء استطلاع رأي حول نتائج انتخابات مجلس طلبة جامعة بير زيت، قرر باحث سحب عيّنة عشوائيّة منتظمة حجمها ١٠٠ طالب من أصل ١٠٠٠ طالب حضروا المناظرة الانتخابية، أوضح للباحث كيفية سحب هذه العينة.

- أجد المسافة الثابتة (ف) = $\frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العيّنة}}$ ، ف = $\frac{١٠٠٠}{١٠٠}$ = ١٠

- أحدد رقم البداية، فأختار رقماً عشوائياً من ١ إلى ف أي من ١ إلى ١٠ وليكن ٦. وبالتالي يكون الشخص السادس هو أول عناصر العيّنة الذي سيتم استطلاع رأيه.

- أحدد العنصر الثاني بإضافة ف = ١٠ إلى الرقم الأول، فيكون الشخص صاحب الرقم ٦ + ١٠ = ١٦

- أرقام عناصر العيّنة هي ٦، ١٦، ٢٦، ....

٥. رقم العنصر السابع في هذه العيّنة هو ....

تمارين ومسائل (١-٣):

١. لدراسة أثر توظيف التكنولوجيا الحديثة على أداء الطلبة، قرر باحث أخذ عيّنة حجمها ١٠٪ من طلبة مدرسة الشهيد عبد القادر الحسيني الثانوية، إذا علمت أن عدد طلبة المدرسة ٥٠٠ طالب.

أ. ما نوع العيّنة التي يمكن استخدامها لهذه الدراسة؟

ب. أشرح طريقة سحب العيّنة.

٢. في مؤتمر للمهندسين الفلسطينيين، كان أعداد المشاركين كما في الجدول الآتي:

التخصص	معماري	مدني	ميكانيكي	كهربائي
العدد	١٥٠	٢٠٠	٨٠	٧٠

أراد باحث استطلاع رأي المشاركين حول نتائج المؤتمر، فقرر سحب عينة من ٢٠ مهندساً من المشاركين اعتماداً على تخصصهم.

أ. أحدد حجم العيّنة من كل تخصص.

ب. أحدد عناصر العيّنة المطلوبة من كل تخصص.

١-٤ المتغير العشوائي المنفصل (Discrete Random Variable)

نشاط (١)

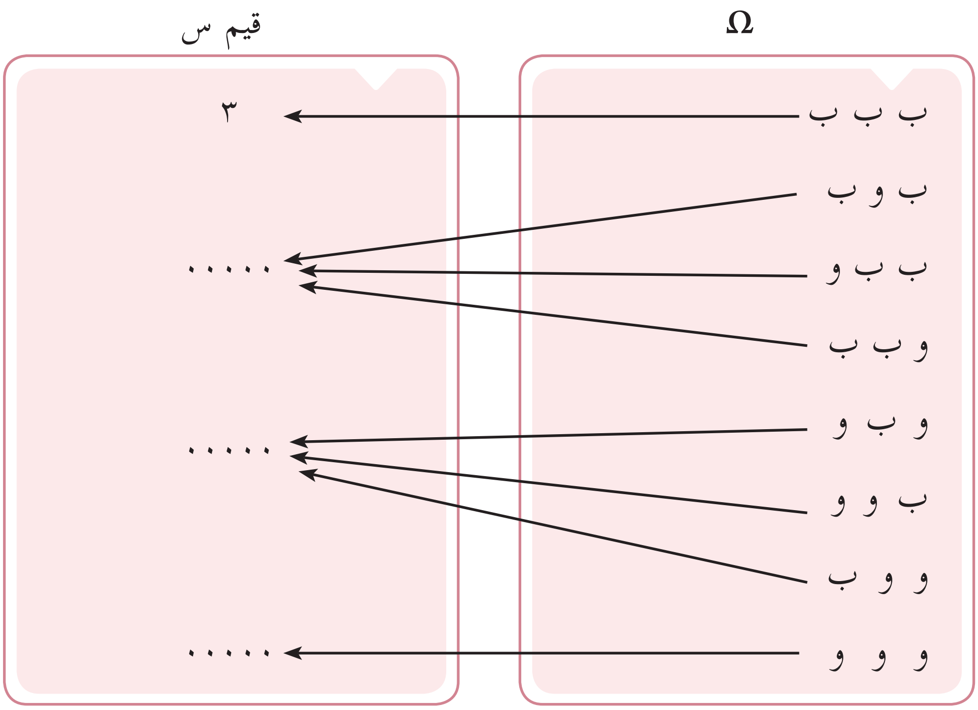
يعتبر معدل الخصوبة من المعدلات المهمة لقياس النمو السكاني في فلسطين، فقد يكون الاهتمام في تجربة اختيار عائلة فلسطينية من ثلاثة أطفال، من حيث الجنس وتسلسل الولادة منصبّاً على عدد الإناث في العائلة، وليس على النتائج الممكنة للتجربة.

١. الفضاء العيني لهذه التجربة هو { ب ب ب ، ب و ب ، .... }

٢. إذا عرّفنا المتغير س على أنه عدد الإناث في هذه العائلة فإن قيم س الممكنة هي:

{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

٣. أمثل العلاقة بين الفضاء العيني وقيم س بمخطط سهمي.



ألاحظ أن المخطط السابق يمثل اقتراناً، لماذا؟

مجاله .... ، ومداه ....

وفي مثل هذه الحالة، فإن س يسمى متغيراً عشوائياً منفصلاً .

تعريف: المتغير العشوائي المنفصل هو اقتران مجاله الفضاء العيني Ω، ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية، ويسمى توزيعاً احتمالياً إذا حقق ما يأتي:

٠ ≤ ل(س) ≤ ١ ، $\sum_{ر=1}^{ن}$ ل (سر) = ١ حيث ن = عدد القيم الممكنة للمتغير (س)

تسمى مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي س بمدى المتغير العشوائي.

مثال (١): أي التوزيعات الآتية يمكن أن يكون توزيعاً احتمالياً؟

(أ)

س	٤	٦	٨
ل (س)	٠,٢	٠,٤	٠,٦

(ب)

س	٤	٦	٨	٣
ل (س)	٠,١٥	٠,٢	٠,٥	٠,١٥

(ج)

س	-٣	-٢	-١
ل (س)	٠,٢٥	٠,٣٥	٠,٥٤

(د)

س	١	٢	٣	٤
ل (س)	٠,٣	٠,٢	٠,٥	٠,١

التوزيع الثاني (ب) يشكل توزيعاً احتمالياً. لأن: ٠ ≥ ل(س) ≥ ١

$$\sum_{ر=١}^{ن} ل(س_ر) = ١$$

نشاط (٢)

عند رمي قطعتي نقد منتظمتين مرةً واحدةً، وتسجيل عدد مرات ظهور الصورة في كل رمية.

١. الفضاء العيني لهذه التجربة هو ....

٢. إذا عرّفنا المتغير العشوائي س على أنه عدد مرات ظهور الصورة، فإن قيم س الممكنة هي

....

٣. أكمل الجدول الآتي:

س	٠	١	...
ل (س)	$\frac{١}{٤}$	...	...

- مجموع قيم ل (س) هو ....

نشاط (٣)

في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين، إذا دلّ المتغير العشوائي س على الفرق المطلق بين العددين الظاهرين.

١. الفضاء العيني للتجربة هو Ω = { (١،١)، (١،٢) ..... (٦،٦) } .

٢. المدى لهذه التجربة هو ....

٣. أكمل تمثيل العلاقة بالشكل المجاور.

٠	١	...	٣	٤	٥	٦
...	٠	...	...	...	...	٥
٢	١	٠	١	...	٣	٤
...	...	...	٠	١	...	٣
٤	٣	٢	١	...	١	٢
٥	...	٣	...	١	٠	١
٦	٥	٤	٣	٢	١	

٤ . أكمل جدول التوزيع الاحتمالي.

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل (س)	$\frac{٦}{٣٦}$	...	...	$\frac{٦}{٣٦}$	...	...

مثال (٢): إذا كان س متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي يعطى بالعلاقة:

ل (س) = $\frac{س}{٢٠}$ حيث س = ١، ٣، ٤، ٥، ٧ أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير س.

الحل:

ل (س = ١) = $\frac{١}{٢٠}$ ، ل (س = ٣) = $\frac{٣}{٢٠}$ ، ل (س = ٤) = $\frac{٤}{٢٠}$ ، ل (س = ٥) = $\frac{٥}{٢٠}$ ،

ل (س = ٧) = $\frac{٧}{٢٠}$

فيكون جدول التوزيع الاحتمالي هو:

س	١	٣	٤	٥	٧
ل (س)	$\frac{١}{٢٠}$	$\frac{٣}{٢٠}$	$\frac{٤}{٢٠}$	$\frac{٥}{٢٠}$	$\frac{٧}{٢٠}$

تمارين ومسائل (١-٤)

(١) ألقيت قطعة نقد منتظمة مرتين، فإذا صممت لعبة بحيث يربح اللاعب نقطةً واحدةً عن كل صورة تظهر، ويخسر نقطةً عن كل كتابة، وإذا عُرّف المتغير العشوائي على أنه مقدار الربح الذي يحصل عليه اللاعب، أكتب:

أ. عناصر المتغير العشوائي

ب. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

(٢) إذا كان س متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي يعطى بالعلاقة ل (س) = $\frac{س^٢}{٣٠}$ حيث س=١،٢،٣،٤

أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير س.

(٣) الجدول الآتي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

س	٠	١	٢	٣	٤
ل (س)	٠,٢	أ	٠,١٥	٠,١	٠,٠٥

جد قيمة الثابت أ.

١-٥ التوقع (Expectation)

نشاط (١)

يهتم المجتمع الفلسطيني بصورة عامة بإنجاب الذكور من الأبناء، ففي دراسة لمركز أبحاث فلسطيني عن توقع عدد الذكور في العائلات ذات الأربعة أطفال، تم تنفيذ التجربة، حيث عرف المتغير العشوائي على أنه عدد الذكور في العائلة، وإذا رمز للولد بالرمز (و) وللبنت بالرمز (ب).

فإن الفضاء العيني لهذه التجربة هو Ω ={وووو، ووو ب، ووب و، ووب ب،....، ب ب ب ب}

١. أكمل جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

س	٠	١	٢	...	٤
ل (س)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٦}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	...

٢. أحسب قيمة المقدار

$$\sum_{ر=١}^{٤} س_ر \times ل\ (س_ر)$$

= ٠× ل (٠) + ١ × ل (١) + ٢ × ل (٢) + ٣ × ل (٣) + ٤ × ل (٤)

= ٠ × $\frac{١}{١٦}$ + ١ × $\frac{٤}{١٦}$ +..............

= $\frac{٣٢}{١٦}$ = ٢ ، وهذا ما يعرف بتوقع المتغير العشوائي "الوسط الحسابي للمتغير العشوائي".

تعريف: يطلق على وسط التوزيع الاحتمالي بالتوقع للمتغير العشوائي المنفصل ويرمز له بالرمز ت (س) حيث ت (س) = $\sum_{ر=١}^{ن} س_ر \times ل\ (س_ر)$

نشاط (٢)

ألقيت قطعة نقد معدنية من فئة مائة مل فلسطيني ثلاث مرات، فإذا دلّ المتغير العشوائي على عدد مرات ظهور السنبلة "الصورة".

- الفضاء العيني لهذه التجربة هو Ω = {ص ص ص ، ص ص ك ، ص ك ص ، ص ك ك، ك ص ص، ك ص ك، ك ك ص، ك ك ك}
- المدى للمتغير العشوائي هو س = {٠، ١، ٢، ٣}
- أكمل جدول التوزيع الاحتمالي

س	٠	١	٢	٣
ل (س)	$\frac{١}{٨}$	...	$\frac{٣}{٨}$	...

$$\text{التوقع} = \sum_{ر=١}^{٣} س_ر \times ل\,(س_ر)$$

$$ت\,(س) = ٠ \times \frac{١}{٨} + ١ \times ... + ٢ \times \frac{٣}{٨} + ٣ \times ... = \frac{٣}{٢}$$

خصائص التوقع

يتأثر التوقع بالعمليات الحسابية الأربع، كونه يمثل الوسط الحسابي للمتغير العشوائي، وذلك كما في العلاقة الآتية: ت (أ س $\pm$ ب) = أ × ت (س) $\pm$ ب حيث س متغير عشوائي أ ، ب $\in$ ح

مثال: إذا كان س متغيراً عشوائياً منفصلاً، وكان ت (س) = ٥ ، أجد ت (٣س − ٢)

الحل:

ت (٣س − ٢) = ٣ × ت (س) − ٢ = ٣ × ٥ − ٢ = ١٥ − ٢ = ١٣.

تمارين ومسائل (١-٥)

١ إذا كان س متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي:

س	١	٢	٣	٤	٥
ل (س)	٠,١	٠,٣	٠,٢	٠,٣	٠,١

أحسب ما يأتي:

أ. توقع المتغير العشوائي س

ب. ت (٣س − ٤)

٢ في تجربة إلقاء قطعتي نقد منتظمتين مرةً واحدةً، يكسب اللاعب نقطةً واحدةً إذا ظهرت الصورة مرةً واحدةً ، ويكسب نقطتين إذا ظهرت الصورة مرتين. في حين يخسر خمس نقاط إذا لم تظهر الصورة، إذا دلّ المتغير العشوائي س على عدد النقاط المكتسبة أجيب عما يأتي:

أ. توقع المتغير العشوائي س

ب. ت (٢س + ١)

٣ إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى في الجدول الآتي:

س	١	أ	٥
ل (س)	ب	٠,٥	ب

وكان ت (س) = ٣، أجد قيمة كل من أ،ب.

٤ قام الخبراء في مستنبت الكرمل بإجراء تجربة على بذور زهرة القرنفل المراد تصديرها للخارج، وأثناء هذه التجربة، اختيرت بذرتان من زهرة القرنفل عشوائياً على التوالي مع الإرجاع، من كيس يحتوي على ٥ بذور زهورها حمراء، و٣ بذور زهورها بيضاء، وذلك لتنفيذ التجربة، إذا دلّ المتغير العشوائي س على عدد البذور التي زهورها حمراء، أجد توقع المتغير العشوائي.

١-٦ توزيع ذو الحدين (Binomial Distribution)

نشاط (١)

في تجربة إلقاء قطعة نقد من فئة مائة مل فلسطيني ٣ مرات، إذا دلّ المتغير العشوائي على عدد مرات ظهور السنبلة " الصورة ".

١. مدى المتغير العشوائي هو س = {٠، ١، ٢، ٣}

٢. أكمل جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

س	٠	١	٢	٣
ل (س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	...	...

ألاحظ أن إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي في مثل هذه الحالة، يحتاج إلى مزيد من الجهد. فما بالك لو كانت التجربة هي إلقاء قطعة النقد ٧ مرات؟ عندها سيكون استخدام هذه الطريقة في غاية الصعوبة؛ لذا سنلجأ إلى اعتماد الصيغة العامة لتوزيع ذات الحدين، التي تحقق الشروط الآتية:

١. تتكرر التجربة ن من المرات.

٢. لكل تجربة نتيجتان، وتحقُّقُ التجربة "نجاح"، وعدم تحقُّق التجربة "فشل".

٣. تكون كل تجربة مستقلة عن الأخرى، أي إن حدوث إحداها لا يؤثر على حدوث الأخرى.

٤. احتمال النجاح ثابت في كل تجربة، وكذلك احتمال الفشل.

و تعرف الصيغة العامة لذات الحدين كما يأتي:

تعريف:

ليكن س متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي يتبع توزيع ذات الحدّين، فإن

ل(س = ر) = $\binom{ن}{ر}$ أ^{ر} (١ − أ)$^{ن-ر}$ ، ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ن

حيث (ن) تمثل عدد مرات تكرار التجربة، (أ) احتمال النجاح في المرة الواحدة، (ر) يمثل عدد مرات النجاح المطلوبة.

أتذكر

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$$

$$\binom{ن}{١} = ن \text{ ، } ن \geq ر \text{ ، } ن \in ط$$

$$\binom{ن}{٠} = ١$$

$$٠! = ١$$

ويمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي بتطبيق قانون ذات الحدين في النشاط السابق كما يأتي:

المدى = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

$$ل(س=٠) = \binom{٣}{٠}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٠}\left(١-\frac{١}{٢}\right)^{٣-٠} = ١ \times ١ \times \frac{١}{٨} = \frac{١}{٨}$$

$$ل(س=١) = \binom{٣}{١}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١}\left(١-\frac{١}{٢}\right)^{٣-١} = ٣ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٨}$$

$$ل(س=٢) = \binom{٣}{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\left(١-\frac{١}{٢}\right)^{٣-٢} = ٣ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٨}$$

ل(س = ٣) = ... = ... = ...

وعليه فإن جدول التوزيع الاحتمالي يكون:

س	٠	١	٢	٣
ل (س)	$\frac{١}{}$	$\frac{٣}{}$	...	...

مثال (١): أسرة فلسطينية لديها ستة أطفال. أجد الاحتمالات الآتية:

١. أن يكون عند العائلة ٣ أولاد فقط.

٢. أن لا يكون عند العائلة أولاد.

٣. أن يكون عند العائلة ولد واحد على الأقل.

الحل: هذه التجربة تتبع توزيع ذات الحدين، حيث:

ن = ٦ ، أ = احتمال إنجاب ولد = $\frac{١}{٢}$

١. أن يكون عند العائلة ٣ أولاد =

$$ل(س = ٣) = \binom{٦}{٣}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}\left(١ - \frac{١}{٢}\right)^{٦-٣} = ٢٠ \times \frac{١}{٨} \times \frac{١}{٨} = \frac{٢٠}{٦٤} = \frac{٥}{١٦}$$

٢. أن لا يكون عند العائلة أولاد =

$$ل(س = ٠) = \binom{٦}{٠}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٠}\left(١ - \frac{١}{٢}\right)^{٦-٠} = ١ \times ١ \times \frac{١}{٦٤} = \frac{١}{٦٤}$$

٣. أن يكون عند العائلة ولد واحد على الأقل = $\frac{٦٣}{٦٤}$ لماذا ؟

نشاط (٢)

ليكن س متغيراً عشوائياً يتبع توزيع ذات الحدين بحيث ن=٤ ، أ = $\frac{١}{٤}$ ، فإنّ المدى للمتغير العشوائي = {٠ ، ١، ٢، ٣، ٤}

لتكوين جدول التوزيع الاحتمالي فإنّ:

$$ل(س = ٠) = \binom{٤}{٠}\left(\frac{١}{٤}\right)^{٠}\left(١ - \frac{١}{٤}\right)^{٤-٠} = ١ \times ١ \times \frac{٨١}{٢٥٦} = \frac{٨١}{٢٥٦}$$

$$ل(س = ١) = \binom{٤}{١}\left(\frac{١}{٤}\right)^{١}\left(١ - \frac{١}{٤}\right)^{٤-١} = ٤ \times \frac{١}{٤} \times \frac{٢٧}{٦٤} = \frac{١٠٨}{٢٥٦}$$

....

وعليه فإن جدول التوزيع الاحتمالي:

س	٠	١	٢	٣	٤
ل (س)	$\frac{٨١}{٢٥٦}$	$\frac{١٠٨}{٢٥٦}$	...	...	...

$$التوقع\ ت\ (س) = ٠ \times \frac{٨١}{٢٥٦} + ١ \times \frac{١٠٨}{٢٥٦} + ٢ \times ... + ٣ \times ... + ٤ \times ... = ١$$

ملاحظة: في توزيع ذات الحدين، يمكننا إيجاد التوقع باستخدام العلاقة: التوقع = ن × أ

ففي النشاط السابق يكون التوقع = ن × أ = ٤× $\frac{١}{٤}$ = ١

ن = عدد مرات تكرار التجربة   أ = احتمال نجاح التجربة في المرة الواحدة.

مثال (٢): ألقي حجرا نرد منتظمين ١٠ مرات، أحسب التوقع لعدد مرات ظهور عددين مجموعهما ٨.

الحل: التجربة تحقق خصائص تجربة ذات الحدين " أبيّن ذلك "

حادث ظهور عددين مجموعهما ٨ عند إجراء التجربة لمرة واحدة:

ح = { (٢، ٦) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٢) }

قيمة أ = ل (ح) = $\frac{٥}{٣٦}$

التوقع = ن × أ = ١٠ × $\frac{٥}{٣٦}$ = $\frac{٥٠}{٣٦}$ = $\frac{٢٥}{١٨}$

تمارين ومسائل (١-٦)

١ إذا علمت أن نسبة نجاح شتلة في مستنبت للتجارب في مدينة أريحا هو ٠,٦٥، وإذا تم زراعة خمسين شتلة من هذا الصنف في المستنبت.

أ. ما احتمال نجاح جميع الشتلات؟

ب. ما توقع عدد الشتلات الناجحة؟

٢ من أجل التبرع بالدم أجري فحص لطلبة الصف الحادي عشر في مدرسة الأقصى الخيرية، فوجد أن نسبة الذين يحملون فصيلة الدم AB بين طلبة المدرسة ٣٪، اختير ١٠٠ طالب من طلبة المدرسة عشوائياً:

أ. ما احتمال أن لا يكون بينهم من يحمل فصيلة الدم AB .

ب. ما توقع عدد الطلبة في العينة الذين يحملون فصيلة الدم AB .

تمارين عامة (١-٧)

(١) أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- أي التوزيعات الآتية يعتبر توزيعاً احتمالياً؟

أ) ل(س) = $\frac{١}{٤}$ ، س= ٠، ١، ٢، ٣، ٤

ب) ل(س) = $\frac{س - ٥}{٣}$، س= ٣، ٤، ٥، ٦

جـ) ل(س) = $\frac{س^٢}{٣٠}$، س = ٠، ١، ٢، ٣

د) ل(س) = $\frac{س}{٢١}$ ، س = ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦

٢- ما قيمة أ التي تجعل التوزيع الآتي توزيعاً احتمالياً؟

س	١	٢	٣	٤
ل (س)	أ	$أ^٢$	٠,١	٠,١٥

أ) ٠,٢٥ ب) ٠,٥ جـ) ٠,١ د) ٠,٠١

٣- إذا كان س متغيراً عشوائياً وكان ت (٢س – ٥) = ٣ ما قيمة ت (٣س + ٢)؟

أ) ٤ ب) ٨ جـ) ١٤ د) ١٨

٤- إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) يعطى بالعلاقة:

ل(س) = ك × س، س = ١، ٢، ٣، ٤ فما قيمة الثابت ك؟

أ) ٠,١ ب) ٠,٠١ جـ) ٠,٠٢ د) ٠,٢

٥- في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين مرةً واحدةً، إذا كان توقع أن يكون مجموع العددين الظاهرين يساوي ٧ فما قيمة ت (٣ – ٢س)؟

أ) -٧ ب) ٧ جـ) ١١ د) -١١

(٢) لإجراء استطلاع للرأي حول النتائج الأولية للانتخابات التشريعية الفلسطينية، قرر مركز الأبحاث الفلسطيني اختيار عيّنة منتظمة حجمها ٥٠ ناخباً من أحد المراكز الانتخابية والبالغ حجمه ١٠٠٠ ناخب، إذا كان رقم العنصر الأول في العينة ١٣ فما رقم العنصر الثاني؟ وما رقم العنصر السابع؟

٣ يلقي لاعب حجر نرد منتظم مرةً واحدةً، فإذا ظهر عدد أولي فإنه يكسب نفس العدد من النقاط، وإذا ظهر عدد غير أولي فإنه يخسر نفس العدد من النقاط، إذا دلّ المتغير العشوائي على عدد النقاط التي يكسبها أو يخسرها.

أ) أكون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

ب) أحسب التوقع للمتغير العشوائي.

٤ إذا كانت نسبة المعيب من إنتاج مصنع للأحذية في مدينة الخليل هو ٢٪، أرسلت شحنة لتاجر تحتوي على ١٠٠٠ حذاء، فما التوقع لعدد الأحذية المعيبة الموجودة في الشحنة ؟

٥ احتمال أن يشفى مريض من مرض نادر في الدماغ هو ٠,٢، إذا علم أن ١٥ مريضاً مصابون بهذا المرض، ما احتمال:

أ) أن يشفى تسعة على الأقل من المرض.

ب) أن يشفى من ٤ إلى ٨ من هذا المرض.

جـ) أن يشفى على الأكثر اثنان من هذا المرض.

أقيّم ذاتي أعبر بلغتي عن المفاهيم الاكثر متعة التي تعلمتها من هذه الوحدة .

فكرة ريادية

١ . أقوم مع مجموعة من الزملاء وباتباع خطوات البحث العلمي، بإجراء دراسة لقياس أثر استخدام مواقع التواصل الاجتماعي على تحصيل الطلاب.

٢ . أناقش مع زملائي:

- النجاحات والآثار الإيجابية المترتبة على استخدام مواقع التواصل الاجتماعي.
- المخاطر التي يمكن أن تواجه استخدام مواقع التواصل الاجتماعي من حيث:

المخاطر النفسية: ....

المخاطر الاجتماعية: ....

المخاطر المادية: ....

القرارات التي يمكن اتخاذها: ....

الوحدة الثانية

المتتاليات والمتسلسلات

أتأمل ورقات الصبّار، وأقدّر عددها في دورتها العاشرة.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المتتاليات والمتسلسلات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ تعرف المتتالية وحدودها، وحدّها العام.

٢ إيجاد الحدّ العام للمتتالية الحسابية.

٣ إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية.

٤ إيجاد الحدّ العام للمتتالية الهندسية.

٥ إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية.

٦ حل مسائل حياتية باستخدام مفاهيم الوحدة.

٢-١ المتتاليات (Sequences)

نشاط (١)

تعمل الشركات الفلسطينية بصورة عامة على رفع المستوى المعيشي للموظفين، من خلال الزيادة المستمرة في رواتبهم، فإذا كان سلّم رواتب الموظفين في شركة للمنظفات في غزة، كما في الجدول الآتي:

السنة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	....
الراتب بالدينار	٢٠٠	٢٥٠	٣٠٠	٣٥٠	....

يمكن ترتيب راتب الموظف حسب سنة الخدمة كما يأتي:

٢٠٠، ٢٥٠ ، ٣٠٠ ، ٣٥٠ ، ......

راتب الموظف في السنة الرابعة هو ٣٥٠ ديناراً.

راتب الموظف في السنة السابعة هو ....

راتب الموظف في السنة العاشرة هو ....

نشاط (٢)

أتأمل هذه الأنماط من الأعداد، ثم أكتب ثلاثة حدود أخرى لكل نمط.

أ) ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ....

ب) ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ....

جـ) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، ....

تعريف

المتتالية: هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية، أو مجموعة جزئية منها. ويسمى كل عدد فيها حداً، وتكتب على الصورة $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ... ، $ح_ن$

فهي ترتيب من الأعداد، وفق نمط، أو قاعدة معينة.

نشاط (٣)

يخطط خالد لزيارة عيادة طبيب خاص في مدينة رام الله في الفترة من ٢٦/١/٢٠١٦م إلى ٢٩ /١/ ٢٠١٦م مع العلم بأن العيادة تعطل يوم الجمعة، وأن ١/١/٢٠١٦م كان يوم جمعة. في أي يوم يمكن له أن يقوم بهذه الزيارة ؟

أكوّن الجدول الآتي:

+٧

الجمعة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة
التاريخ	١/١/٢٠١٦م				

تكون أيام الزيارة هي الأيام التي تاريخها ....

نشاط (٤)

لديك المتتالية الآتية:

٣، ٥، ٧، ٩، ....

الحدّ الأول في هذه المتتالية هو $ح_{١}$ = ٣

الحدّ الثاني في هذه المتتالية هو $ح_{٢}$ = ٥

الحدّ السابع في هذه المتتالية هو $ح_{٧}$ = ١٥ لماذا؟

الحدّ الخامس عشر في هذه المتتالية هو $ح_{١٥}$ = ...

الحدّ مئة في هذه المتتالية هو $ح_{١٠٠}$ = ...

يمكن إيجاد قيمة أي حدّ في هذه المتتالية، باستخدام العلاقة $ح_{ن}$= ٢ن+١ ويسمى الحدّ العام لهذه المتتالية.

قيمة $ح_{٢٠}$ = ٢ × ... + ١ = ...

نشاط (٥)

الحدود الأربعة الأولى من المتتالية التي حدّها العام $ح_{ن}$ = ٣ن+١

$ح_{١}$= ٣ × ١ + ١ = ٤

$ح_{٢}$= ٣ × ٢ + ١ = ٧، $ح_{٣}$= ٣ × ... + ١ = ...

$ح_{٤}$= .... وهكذا

إذاً المتتالية هي: ....، ....، ....، ....

نشاط (٦)

الحدود الأربعة الأولى من المتتالية التي حدّها الأول $ح_١ = ١$، $ح_{ن+١} = ٢ + ٣ ح_ن$

$ح_١ = ١$

$ح_٢ = ح_{١+١} = ٢$ ومضافاً إليه ثلاثة أمثال $ح_١$ $= ٢ + ٣ × ح_١ =$ ....

$ح_٣ =$ ....

$ح_٤ =$ ....

الحدود الأربعة الأولى هي ....، ....، ....، ....

تمارين ومسائل (٢-١)

① تعاقد موظف للعمل في شركة بمدينة القدس براتب سنوي قدره ٦٠٠٠ دينار، على أن يعطى علاوةً سنويةً ثابتةً قدرها ١٠٠ دينار. أجد متتالية راتب الموظف في السنوات الأربع الأولى من عمله؟

② أكتب الحدود الثلاثة الأولى لكل من المتتاليات التي حدّها النوني كما يلي:

١) $ح_ن = ن^٢ + ن$

٢) $ح_ن = \begin{cases} ١ ، & \text{ن عدد زوجي} \\ -١ ، & \text{ن عدد فردي} \end{cases}$

③ أكتب الحدّ العام لكل من المتتاليات الآتية:

١) ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ....

٢) ٤، ٨، ١٢، ١٦، ....

٣) ٢، -٢، ٢، -٢، ....

٢-٢ المتسلسلات (Series)

نشاط (١)

تهتم جمعية لرعاية المعاقين بتأهيل طلاب متلازمة داون لمهن بسيطة، فقامت الجمعية بتأهيل ٥ طلاب في الشهر الأول، و٧ طلاب في الشهر الثاني و ٩ طلاب في الشهر الثالث، وهكذا...

فتكون المتتالية التي تمثل الطلاب الذين تم تأهيلهم هي ..... ، .... ، ....

يمكن كتابة مجموع الطلاب الذين تم تأهيلهم بالصورة ٥ + ٧ + ٩ + ...

تسمى هذه الصورة بالمتسلسلة.

تعريف المتسلسلة: هي مجموع حدود من متتالية، قد تكون هذه الحدود أعداداً أو اقترانات، ويمكن كتابة المتسلسلات بصورة مختصرة، حيث نستخدم الرمز $\sum$ ليدلّ على رمز المجموع.

نشاط (٢)

أعوض في المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٤} (٢ر + ٣)$

قيم ر =١، ٢، ٣، ٤ على التوالي فأحصل على:

$\sum_{ر=١}^{٤} (٢ر + ٣) = (٢\times١+٣) + (٢\times٢+٣)+$ ...... + ...

= ٥ + ... + ... +.......

نشاط (٣)

١) لديك المتتالية الآتية ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ....

المتسلسلة المرافقة لها هي ....

يمكن كتابة المتسلسلة بالصورة المختصرة على الصورة $\sum_{ر=١}^{\infty} ر$

٢) لديك المتتالية الآتية ٤×١، ٤×٢، ٤×٣، .....، ٤×٩

المتسلسلة المرافقة لها هي ....

المتسلسلة بالصورة المختصرة هي ....

تمارين ومسائل (٢-٢)

١ أكتب المفكوك فيما يأتي:

أ) $\sum_{ر=١}^{٣} (-٣ر + ٢)$

ب) $\sum_{ر=١}^{٣} (٤ر + ر^{٢})$

جـ) $\sum_{ر=١}^{٤} (-١)^{ر}$

د) $\sum_{ر=١}^{٣} ٥$

٢ أستخدم الرمز $\sum$ للتعبير عن المتسلسلات.

أ) ك + ٢ك + ٣ك + ... + ٨ك، ك ثابت.

ب) $\frac{١}{٥} + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٥} + ... + \frac{١}{٥٠}$

جـ) $٤ + \frac{٤}{٢} + \frac{٤}{٣} + \frac{٤}{٤} + ... + \frac{٤}{٢٠}$

٢-٣ المتتاليات الحسابية (Arithmetic Sequences)

نشاط (١)

لزراعة الأشجار فوائد جمة تعود على الوطن والمواطن، فضمن سياسة وزارة الزراعة الفلسطينية لجعل فلسطين خضراء، وضعت الوزارة خطةً لزراعة أشجار الزيتون في المناطق المهددة بالمصادرة من الاحتلال، وعلى مدار العشر سنوات القادمة، بحيث يتم زراعة ٣٠٠ دونم في العام الأول، و٨٠٠ دونم في العام الثاني، و ١٣٠٠دونم في العام الثالث، وهكذا... وبزيادة ثابتة مقدارها ٥٠٠ دونم سنوياً.

فإن متتالية الدونمات التي سيتم زراعتها بالزيتون هي ٣٠٠ ، ٨٠٠ ، ١٣٠٠ ،......

عدد أشجار الزيتون التي سيتم زراعتها حسب السنة:

في السنة الأولى = ٣٠٠

في السنة الثانية = ٣٠٠ + (١) × ٥٠٠ = ٨٠٠

في السنة الثالثة = ٣٠٠ + (٢) × ٥٠٠ = ١٣٠٠

في السنة الرابعة = ٣٠٠ + ( ) × .... = ...

في السنة الخامسة = ... + ... = ٢٣٠٠

في السنة العاشرة = ... + ... = ...

ألاحظ أن الفرق في عدد الدونمات ثابت بين كل عامين متتاليين، ومثل هذه المتتالية تسمى متتالية حسابية.

تعريف:

المتتالية الحسابية: هي متتالية يكون فيها الفرق بين كل حدّ والحدّ السابق له مباشرة مقداراً ثابتاً، يسمى أساس المتتالية الحسابية، ويكون الحدّ العام لهذه المتتالية هو:

$ح_ن = أ + (ن - ١)د$ حيث (أ) الحدّ الأول للمتتالية، (ن) رتبة الحد، (د) الأساس

نشاط (٢)

أميز المتتاليات الحسابية عن غيرها فيما يأتي:

١) ١، ٣، ٥، ٧، ٩ ، .... متتالية حسابية، الفرق بين كل حدّ والسابق له مباشرة، يساوي مقداراً ثابتاً، ويساوي ٢.

٢) $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ،..........، $\frac{١}{١٥}$. ليست حسابية ، لأن ....

٣) متتالية الأعداد الأولية........................ ، لأن ....

٤) المتتالية التي حدّها العام $ح_ن = ن^٢$................، لأن ....

مثال (١): أجد الحدّ الخامس في المتتالية الحسابية التي حدّها الأول = ٢ وأساسها ٤؟

الحل: $أ$ = الحدّ الأول = ٢، $د$ = ٤

بما أن $ح_ن = أ + (ن - ١) د$ ومنها $ح_٥ = ٢ + (٥ - ١) × ٤ = ١٨$

مثال (٢): في المتتالية الحسابية ٢، ١٣، ٢٤، ٣٥، ....

أ) أجد $ح_٨$ ب) هل العدد ١١٢ أحد حدود المتتالية أم لا ؟

الحل: $أ = ٢$، $د = ١١$

$ح_٨ = أ + ٧ د$

$= ٧٩$ لماذا ؟

ج) أفرض أن العدد ١١٢ $= ح_ن$ = هو أحد حدود المتتالية فيكون:

$١١٢ = ح_ن = أ + (ن - ١) د$

$١١٢ = ٢ + (ن - ١) × ١١$

$١١٠ = ١١ ن - ١١$

$١٢١ = ١١ ن$

$ن = \frac{١٢١}{١١} = ١١ \in ط^*$ وهذا يعني أن العدد ١١٢ هو أحد حدود المتتالية.

نشاط (٣)

لإيجاد متتالية حسابية فيها $ح_٥ = ١٠$، $ح_{١٥} = ٣٠$، نعلم أن:

$ح_ن = ٲ + (ن - ١) ى$

$١٠ = ٲ + ٤ى$ .... (١)

$٣٠ = ٲ + ١٤ى$ .... (٢) لماذا؟

(١) - (٢) ينتج أن: $ٲ = ٢$، $ى = ٢$ لماذا؟

إذاً المتتالية هي : ٢، ....، ....، ....، ١٠، ....

لإيجاد $ح_{٥٠}$

$ح_{٥٠} = ٲ + (٥٠ - ١) ى$

$ح_{٥٠} =$ ....

نشاط (٤)

المتتالية الحسابية ١٢، ٨، ٤، ٠، -٤، ....

العدد ٨ هو وسط حسابي للحدّ السابق ١٢ والحدّ اللاحق ٤ لأن $٨ = \frac{٤ + ١٢}{٢}$ وكذلك العدد ٤ هو وسط حسابي للعددين ......، .... لأن $٤ = \frac{... + ...}{٢}$

وكذلك العدد .... هو وسط حسابي بين ٤، -٤ لأن .... $= \frac{٤ + -٤}{٢}$

بوجه عام إذا طلب منك أن تدخل (و) من الأوساط الحسابية بين العدد أ ، ب ، نجد قيمة الأساس (ى) باستخدام العلاقة $ى = \frac{ب - ٲ}{و + ١}$ ثم نشكل المتتالية بإضافة الأساس لكل حدّ.

مثال (٣): أدخل ٤ أوساط حسابية بين العددين ٣ ، ٢٨

الحل: لتكن الأوساط هي $و_١$ ، $و_٢$ ، $و_٣$ ، $و_٤$ سأحصل على المتتالية الحسابية:

٣، $و_١$ ، $و_٢$ ، $و_٣$ ، $و_٤$، ٢٨

عدد حدود المتتالية يساوي ٦

الحدّ الأول هو ٣

الحدّ الأخير هو ٢٨

$ح_ن = ٲ + (ن - ١) ى$

$٢٨ = ٣ + (٦ - ١) \times ى$

قيمة الأساس هو ٥ لماذا؟

أو يمكن الحل كما يأتي:

$ى = \frac{٢٨ - ٣}{٤ + ١} = ٥$

ومنها المتتالية: ٣، <u>٨</u>، <u>١٣</u>، <u>١٨</u>، <u>٢٣</u>، ٢٨

والأوساط الحسابية هي: ٨، ١٣، ١٨، ٢٣

إذاً المتتالية هي: ٣، ٨، ١٣، ١٨، ٢٣، ٢٨ وتكون الأوساط الحسابية هي:

$و_١ = ٨$، $و_٢ = ١٣$، $و_٣ = ١٨$، $و_٤ = ٢٣$.

تمارين ومسائل (٢-٣)

١ أيّ المتتاليات الآتية حسابية؟

أ) ٦، ٤، ٢، ٠، -٢، ....

ب) ١، -١، ١، -١،١، ....

ج) $\frac{١}{٦}$ ، ١، $\frac{٥}{٦}$ ١ ، $\frac{٤}{٦}$ ٢، $\frac{٩}{٦}$ ٢ ، ....

٢ أ) أجد $ح_{١٠}$ في المتتالية -٧، -٥، -٣،.................
ب) إذا كان $ح_{ن}$ = -٢٤ في المتتالية ٣، ٠، -٣،... أجد قيمة ن.

٣ إذا كانت ٤، س، ص، -٥ حدود متتالية حسابية. أجد قيمة: س، ص؟

٤ أدخل ٥ أوساط حسابية بين العددين ١٤، ٢.

٥ بدأ موظف عمله في إحدى الشركات في مدينة رفح براتب سنوي قدره ٣٦٠٠ ديناراً، وأخذ يتقاضى علاوةً سنويةً ثابتةً قدرها ٦٠ ديناراً. بعد كم سنة يصبح راتبه ٤٨٠٠ ديناراً؟

٢-٤ مجموع المتسلسلة الحسابية (Sum of Arithmetic Series)

نشاط (١)

يعتبر العالم جاوس من علماء الرياضيات، الذين يرجع الفضل إليهم في اكتشاف عديد من النظريات الرياضية. ففي العام ١٧٨٧م طلب معلم من تلاميذه أن يجمعوا الأعداد الصحيحة كلها، من ١ إلى ١٠٠ أي ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ١٠٠، ولم تمض سوى دقائق قليلة، حتى فاجأه جاوس (وكان آنذاك في الصف الثالث)، بأن أعطاه الجواب الصحيح = ٥٠٥٠، سأله المعلم مندهشاً: كيف حصلت على الجواب؟

كتب جاوس الحل كما يأتي:

جـ = ١ + ٢ + ٣ +...............+ ١٠٠ ثم كتب المجموع نفسه بالمعكوس

جـ = ١٠٠ + ٩٩ + ٩٨ + ... + ١

بالجمع ٢جـ = ١٠١ + ١٠١ +................ + ١٠١ (عدد الحدود ١٠٠)

٢جـ = ... × ١٠٠

جـ = ... × $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠ × .... = ٥٠٥٠

قانون: مجموع أول ن حدّاً من حدود متسلسلة حسابية حدها الأول أ هو:

١. إذا علم الحدّ الأخير (ل) $\boxed{\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left(\text{أ} + \text{ل}\right)}$

٢. إذا علم الأساس (د) $\boxed{\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\right]}$

مثال (١): أجد مجموع أول ٢٠ حدّاً من حدود المتسلسلة ٣ + ٧ + ١١ + ١٥ + ...

الحل: أ = ٣ ، د = ٧ − ٣ = ٤ ، ن = ٢٠

إذاً $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\right]$

$\text{جـ}_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}\left[٢ \times ٣ + ١٩ \times ٤\right] = ٨٢٠$

مثال (٢): أجد $\sum_{ر=٣}^{٢٠} (٧ - ر)$

الحل: $\sum_{٣}^{٢٠} (٧ - ر) = (٧ - ٣) + \ldots + (٧ - ١٩) + (٧ - ٢٠)$

وهذه متسلسلة حسابية. لماذا؟

فيها $أ = ٤$، $د = -١$، $ل = -١٣$

عدد حدود المتتالية الحسابية يساوي رتبة الحد الأخير.

الآن $ح_ن = -١٣$

$-١٣ = أ + (ن-١) \times د$

$٤ + (ن-١) \times -١ = -١٣$

$ن = ١٨$ لماذا؟

لكن $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

$جـ_{١٨} = \frac{١٨}{٢} [٤ + -١٣] = -٨١$

تمارين ومسائل (٢-٤)

١) أجد مجموع المتسلسلات الحسابية الآتية:

أ) ٢٠ + ١٦ + ١٢ + ... ، حيث ن = ٢٠

ب) ١ + ٤ + ٧ + ١٠+ .... + ٣٧

٢) أجد الحدّ الأول في المتسلسلة التي أساسها ٢ ومجموع أول ٢٠ حدّاً فيها ٨٠.

٣) أجد مجموع الأعداد المحصورة بين ١، ١٠٠ التي تقبل القسمة على ٥.

٤) أجد المتسلسلة الحسابية التي فيها مجموع أول سبعة حدود = ٤٩ ومجموع أول تسعة حدود ٨١.

٥) قاعة اجتماعات فيها عدد من الكراسي مرتبة في ٢٠ صفّاً، فإذا كان في الصف الأول ١٠ كراسي، وفي الصف الثاني ١٢ كرسياً، وفي الصف الثالث ١٤ كرسياً .... وهكذا.

أ) ما عدد الكراسي الموجودة في الصف الثامن من صفوف القاعة؟

ب) ما مجموع الكراسي في القاعة؟

ج) إذا خصصت الكراسي في الصفوف الثلاثة الأولى لأعضاء مجلس الآباء والمعلمين، والصفوف الأخرى للطلبة، وكانت مقاعد القاعة جميعها مشغولةً. فما عدد الطلبة؟

٢-٥ المتتاليات الهندسية (Geometric Sequences)

نشاط (١)

تعتبر البكتيريا من الكائنات الحيّة التي تتكاثر بسرعة، ومن البكتيريا النافع ومنها الضّار، وفي تجربة لتكاثر البكتيريا في الحليب، تبيّن أن الواحدة منها تصبح اثنتين كل ساعة، فإذا كان عدد البكتيريا في ١سم^{٣} من الحليب هو ١٠٠٠٠ في الساعة الخامسة صباحاً، فإنها ستكون في الساعة السادسة ٢٠٠٠٠ وفي الساعة السابعة ٤٠٠٠٠ وهكذا...

إن متتالية عدد البكتيريا في الحليب كل ساعة كالآتي:

١٠٠٠٠، ٢٠٠٠٠، ٤٠٠٠٠، .....

هذه المتتالية ليست حسابية. لماذا ؟

عدد البكتيريا في الساعة السابعة هو ....

عدد البكتيريا في الساعة الثامنة هو ....

ناتج قسمة عدد البكتيريا في أي ساعة على عددها في الساعة السابقة لها مباشرة تساوي ....

إذا كانت خارج قسمة كل حد على الحد السابق له مباشرة مقداراً ثابتاً، نسمي هذا النوع من المتتاليات بالمتتاليات الهندسية.

تعريف:

المتتالية الهندسية: هي المتتالية التي يكون فيها ناتج قسمة الحدّ على الحدّ السابق له مباشرة مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتالية، ويرمز له بالرمز $ر$ ويكون الحدّ العام للمتتالية الهندسية هو $ح_{ن} = أ\,ر^{ن-١}$ حيث $أ$ هو الحدّ الأول.

نشاط (٢)

أميز المتتالية الهندسية من غيرها، موضحاً السبب.

١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٨٠ ، .... هندسية لأن النسبة بين أي حدّين متتاليين يساوي ٢

٢ ، ١٠ ، ٥٠ ، ٢٥٠، ....

٢ ، ٥ ، ١٠ ، ١٧ ، ....

١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ....

مثال (١): أكتب الحدّ العام للمتتالية الهندسية الآتية ٢ ، ٨ ، ٣٢ ، ١٢٨ ، ...

الحل: الحدّ الأول = ٢

الأساس = ٤ لماذا ؟

$ح_{ن} = أ\,ر^{ن-١} = ٢ \times ٤^{ن-١} = ٢^{١} \times ٢^{٢ن-٢} = ٢^{٢ن-١}$ لماذا ؟

مثال (٢): متتالية هندسية حدّها الأول ٣ وأساسها ٤ أجد الحدّ الخامس فيها؟

الحل:

بما أن أ = ٣ ، ر = ٤

فيكون $ح_{ن} = أ\,ر^{ن-١}$

$ح_{٥} = ٣\,(٤)^{٥-١}$

$ح_{٥} = ٧٦٨$

مثال (٣): ما ترتيب الحدّ الذي قيمته ٥١٢ من حدود المتتالية الهندسية ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...؟

الحـل:

أفرض أن الحدّ الذي قيمته ٥١٢ هو $ح_{ن}$

أ = ٤ ، ر = ٢

$ح_{ن} = أ\,ر^{ن-١}$

٥١٢ = ...

$١٢٨ = ٢^{ن-١}$

$٢^{٧} = ٢^{ن-١}$

ن = ...

نشاط (٥)

اشترى مواطن فلسطيني شاحنةً بمبلغ ٣٠٠٠٠ ديناراً، فإذا كان ثمن الشاحنة يتناقص كل سنة بمعدل ١٠٪ عن قيمتها في السنة السابقة لها. أجد ثمن الشاحنة في نهاية السنة الخامسة من بدء شرائها؟

ثمن الشاحنة في نهاية السنة الأولى = $٣٠٠٠٠ \times \frac{٩٠}{١٠٠} = ٢٧٠٠٠$ دينار.

ثمن الشاحنة في نهاية السنة الثانية = $٢٧٠٠٠ \times \frac{٩٠}{١٠٠}$ = ... دينار.

ثمن الشاحنة في نهاية السنة الثالثة = ... = ... دينار.

أي أن ثمن الشاحنة متتالية كما يأتي ٢٧٠٠٠ ، .... ، ....

و هي متتالية .... أساسها ر =٠,٩، وحدّها الأول أ =....... إذاً ثمن الشاحنة في نهاية السنة الخامسة = $ح_{٥} = أ\,ر^{٤} = ٢٧٠٠٠ \times (٠,٩)$ = ... دينار.

تمارين ومسائل (٢-٥)

١ أميز المتتالية الهندسية من غيرها فيما يأتي:

أ) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، ....

ب) $١٠^{-١}$، $١٠^{-٢}$، $١٠^{-٣}$، $١٠^{-٤}$، ....

جـ) المتتالية التي حدّها العام $ح_ن = ٢^{ن-١}$

د) مضاعفات العدد ٥ المحصورة بين ١ ، ٢٠٠

٢ أجد الحدّ السابع في المتتالية $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ....

٣ إذا كانت ٥ ، س ، ص ، ٦٢٥ حدود متتالية هندسية. أجد قيمة كل من س ، ص.

٤ مجموع الحدّين الأول والثاني من متتالية هندسية = ١٢، و مجموع الحدّين الأول والرابع = ٨٤ أجد المتتالية؟

٥ يتناقص إنتاج صنف معين من الأدوية في مصنع للأدوية في فلسطين سنوياً، بحيث يكون الإنتاج في سنة ما ٨٠٪ من إنتاج السنة التي تسبقها. فإذا كان إنتاج المصنع في السنة الأولى = ١٠٠كغم، ما مقدار إنتاج هذا الصنف في السنة السادسة؟

٢-٦ مجموع المتسلسلة الهندسية (Sum of Geometric Series)

نشاط (١)

لمواجهة الغلاء المستمر في الأسعار، قررت إحدى الشركات الفلسطينية إعطاء العاملين فيها علاوةً سنويةً دوريةً، بحيث تشكل هذه العلاوة نسبةً من الراتب الأساسي، فإذا كان الراتب الأساسي لأحد موظفي الشركة ٤٠٠ دينار، وكانت علاوته السنوية ١٪ فإن راتبه الأساسي مع العلاوة السنوية، في نهاية كل عام يكون كما يأتي:

العلاوة في نهاية السنة الأولى = ٤٠٠ × ٠,٠١ = ٤ دنانير

الراتب الأساسي في نهاية السنة الأولى = ٤٠٠ + ٤ = ٤٠٤

العلاوة في نهاية السنة الثانية = ٤٠٤ × ٠,٠١ = ٤,٠٤

الراتب الأساسي في نهاية السنة الثانية = ٤٠٤ +٤,٠٤ = ٤٠٨,٠٤

العلاوة في نهاية السنة الثالثة = ٤,٠٨٠٤

الراتب الأساسي في نهاية السنة الثالثة = ٤٠٨,٠٤ + ٤,٠٨٠٤ =٤١٢,١٢٠٤

العلاوة في نهاية السنة الرابعة = ٤,١٢١٢٠٤

متسلسلة العلاوات السنوية في نهاية كل عام هي: ٤ + ٤,٠٤ + ٤,٠٨٠٤ + ٤,١٢١٢٠٤ + ...

مقدار العلاوة السنوية في نهاية السنة العاشرة ....

مجموع العلاوات السنوية حتى نهاية السنة الخامسة هو ....

يمكن استخدام العلاقة $جـ_ن = \frac{أ\,(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، $ر \neq ١$ لإيجاد مجموع العلاوات حيث أ العلاوة في نهاية السنة الأولى، ر الأساس للمتتالية الهندسية، ن عدد السنوات.

أطبق العلاقة السابقة لإيجاد مجموع العلاوات حتى نهاية السنة العاشرة ....

أفكر: هل يمكن إيجاد مجموع المتسلسلة بطريقة أخرى؟

قاعدة:

مجموع أول ن حدّاً من حدود متسلسلة هندسية، حدّها الأول أ وأساسها ر هو:

$جـ_ن = \frac{أ\,(ر^ن-١)}{ر-١}$ ، $ر \neq ١$ وإذا كانت ر=١ فإن $جـ_ن = ن × أ$ لماذا ؟

مثال (١): أجد مجموع المتسلسلة الهندسية:

١+ ٢ + ٤ + ٨ + ... + ١٢٨

الحل:

المتسلسلة السابقة هندسية. لماذا ؟

فيها أ = ١ ، ر = ٢

ن = ٨ كيف ؟

بتطبيق القانون $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، ر≠١

$جـ_٨ = \frac{١(٢^٨-١)}{٢-١} = ٢٥٥$

نشاط (٢)

أجد مجموع أول ستة حدود من المتسلسلة: ٥ + ١٠ + ٢٠ + ...

المتسلسلة هندسية فيها:

أ = ٥ ، ر = ... ، ن = ٦

بتطبيق القانون $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$

$جـ_٦$ = ...

مثال (٢): أجد $\sum_{ر=٢}^{٦} (\frac{١}{٢})^ر$

الحل:

$\sum_{ر=٢}^{٦} (\frac{١}{٢})^ر = (\frac{١}{٢})^٢ + (\frac{١}{٢})^٣ +$ .... $+ (\frac{١}{٢})^٦$

وهي متسلسلة هندسية فيها $أ = \frac{١}{٤}$ ، $ر = \frac{١}{٢}$ ، ن = ٥ لماذا ؟

$$جـ_ن = \frac{\frac{١}{٤}\left(\left(\frac{١}{٢}\right)^٥ - ١\right)}{\frac{١}{٢} - ١} = \frac{٣١}{٦٤}$$

تمارين ومسائل (٢-٦)

١ أجـد مجمـوع أول خمسـة حـدود مـن المتسلسـلة الهندسـية التـي حدّهـا الأول = ٦ وأساسـها = -٢؟

٢ متسلسـلة هندسـية أساسـها $\frac{١}{٢}$ ومجمـوع الحـدود الخمسـة الأولـى منهـا يسـاوي ٣١. أكتـب المتسلسـلة؟

٣ كـم حـدّاً يلـزم أخـذه مـن المتسلسـلة الهندسـية ٢ + ٤ + ٨ + ... ليصبـح مجمـوع هـذه الحـدود مسـاوياً ٢٥٤؟

٤ إذا كان ثمـن دونـم أرض فـي مدينـة غـزة هـو ١٠٠٠٠٠ دينـار سـنة ٢٠١٥م، فـإذا كان سـعر الأرض يـزداد سـنوياً بمقـدار ٨٪ عـن السـنة السـابقة، فمـا ثمـن دونـم الأرض فيهـا بعـد مـرور عشـر سـنوات؟

٥ موظـف مـن مدينـة قلقيليـة، بـدأ عمـلاً براتـب سـنوي قـدره ١٠٠٠ دينـار، وعـلاوة سـنوية قدرهـا ٣٪ مـن راتـب السـنة السـابقة. أجـد جملـة دخـل الموظـف خـلال ٢٠ سـنةً.

(٢ – ٧) تمارين عامة

١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- الحدّ العام للمتتالية ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، .... هو:

أ) ٣ ن ب) ٣ ن^{٢} ج) ن − ٣ د) ٣^{ن}

٢- في المتتالية ٥ ، ١٣ ، ٢١ ، ٢٩ ، .... يكون أ ، د على الترتيب:

أ) ٥ ، ١٣ ب) ٥ ، ٨ ج) ٥ ، ١,٦ د) ٥ ، -٨

٣- المتتالية ٥ ، -٥ ، ٥ ، -٥ ، ....

أ) حسابية ب) هندسية ج) حسابية وهندسية د) ليس لها قاعدة.

٤- متتالية هندسية حدّها الأول ٢ و أساسها ٣ هي:

أ) ٣، ٦، ١٢،.... ب) ٦، ٢، $\frac{٢}{٣}$،.... ج) ٢، ٦، ١٨، .... د) ٢، ٦، ٩،....

٥- الحدّ العاشر في المتتالية -٢٠ ، -١٦ ، -١٢ ، -٨ ، .... هو:

أ) ٥٦ ب) ١٦ ج) -١٦ د) -٥٦

٦- الوسط الحسابي للعددين ١٢ ، ١٨ هو:

أ) ٥ ب) ٣٠ ج) ١٥ د) ١٨

٧- متتالية هندسية حدّها الأول ٣ وأساسها ٢ فإن ج$_{٤}$ =

أ) ٤٥ ب) ٤٠ ج) ٤٢ د) ٢١

٨- الحدّ التاسع في المتتالية الحسابية هو:

أ) أ ر^{٩} ب) أ + ٩ر ج) أ ر^{٨} د) أ + ٨ د

٩- إذا كانت الأعداد ٧ ، ك ، ٣٤٣ حدوداً من متتالية هندسية فإن ك = ...

أ) ± ٧ ب) ٤٩ ج) ٩ د) ± ٤٩

١٠- ما قيمة $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٢+ر) ؟

أ) ١٩ ب) ١٨ ج) ٢٥ د) ٣١

٢ أجد مجموع المتسلسلات الآتية:

أ) $\sum_{ر=١}^{٤} (٣ر-٢)$ ب) $\sum_{ر=١}^{٤٠} (٢^{ر})$ ج) ١٠٢٤ + ٥١٢ + ٢٥٦ + ... + ١٦

٣ بدأ موظفان العمل في شركة الاتصالات الفلسطينية براتب سنوي مقداره ٥٠٠٠ دينار، حيث عمل الأول بعلاوة سنوية مقدارها ٢٪ من راتب السنة السابقة، والثاني يزداد راتبه بمقدار ٢٠ ديناراً في كل سنة. أيّ الموظفين يتقاضى راتباً أفضل من الآخر بعد مرور ٥ سنوات؟

٤ أجد مجموع المتسلسلة الحسابية ٦٣ + ٢ س + ... + ٣٣ + س

٥ ثلاثة أعداد تكوّن متتاليةً حسابيةً مجموعها ٩، إذا أضيف ٤ إلى الحدّ الثالث أصبحت المتتالية الناتجة هندسية. أجد الأعداد الثلاثة.

أقيّم ذاتي اعبر بلغتي عن نقاط القوة ونقاط الضعف الواردة في مفاهيم الوحدة التي تعلمتها.

فكرة ريادية

١. أقوم مع مجموعة من الزملاء بوضع مخطط لإنشاء مخبز في مكان سكننا برأس مال أولي، وأحدّد الربح الثابت المتوقع في كل شهر، ومقداره بعد مرور ٥ سنوات على الإنشاء.

٢. أناقش مع زملائي:

- النجاحات والآثار الإيجابية المترتبة على إنشاء هذا المخبز في مكان سكننا:

....

- متسلسلة رأس المال والأرباح المتوقعة ....
- المخاطر التي يمكن أن تواجه إنشاء هذا المشروع في مكان سكننا من حيث:
  - المخاطر النفسية: ....
  - المخاطر الاجتماعية: ....
  - المخاطر المادية : ....
  - القرارات التي يمكن اتخاذها: ....

الوحدة الثالثة

الأرقام القياسية

لماذا يطالب الموظفون بربط رواتبهم بجدول غلاء المعيشة؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الأرقام القياسية في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إلى الأرقام القياسية، وأنواعها.

٢. إيجاد قيمة الرقم القياسي بأنواعه المختلفة.

٣. توظيف الأرقام القياسية مؤشرات لقياس التغير النسبي الذي طرأ على ظاهرة معينة، سواء أكانت سعراً، أم كميةً، بالنسبة لأساس معين قد يكون فترةً زمنيةً، أو مكاناً جغرافياً في الحياة.

٣-١ الأرقام القياسية (Index Numbers)

يرجع استخدام الأرقام القياسية إلى أكثر من قرنين من الزمن، حيث استخدمها الإحصائي الإيطالي كارلي (١٧٦٤م) لمقارنة الأسعار في إيطاليا لسنة ١٧٥٠م بالأسعار في سنة ١٥٠٠م. ثم شاع استخدامها بصورة أوسع منذ ذلك الحين، حيث اهتمت الحكومات بتركيب بعض الأرقام القياسية، وحسابها. ومن الأمور المهمة عند تركيب الرقم القياسي اختيار فترة الأساس، أو مكان الأساس التي تعتمد لتركيب الرقم.

وعادة ما تكون فترة الأساس سابقة لفترة المقارنة. كما يجب اختيار فترة أو مكان الأساس، بحيث تكون متميزة بالاستقرار الاقتصادي، وخالية من الاضطرابات العنيفة التي قد تتعرض لها الظاهرة، كالحروب والأزمات الاقتصادية، كما يفضل أن لا تكون بعيدة جداً عن سنوات المقارنة.

نشاط (١)

السلة الغذائية مصطلح إحصائي يحدد احتياجات الفرد المعيشية من السلع الأساسية، وتعنى دائرة الإحصاء الفلسطينية بتوفير البيانات عن اختلاف أسعار هذه السلع من مكان إلى آخر، أو من زمان إلى آخر. وبالرجوع إلى السلة الغذائية التي يعتمدها مركز الإحصاء الفلسطيني، نلاحظ أن سعر كيس الأرز (١٠كغم) في العام ٢٠٠٠م كان ٨ دنانير، بينما سعره في العام ٢٠١٧م أصبح ١٢ ديناراً . و لحساب النسبة المئوية للزيادة في سعر كيس الأرز في العام ٢٠١٧م بالنسبة إلى سعره في العام ٢٠٠٠م كانت:

(١٢ ÷ ٨) × ١٠٠٪ = ١٥٠٪ و هذا يعني ....

نشاط (٢)

لا بد أنك لاحظت اختلاف سعر سلعة ما، باختلاف مكان بيعها في فلسطين، والجدول الآتي يوضح سعر تنكة الزيت (١٥كغم) في عدد من المدن الفلسطينية.

المدينة	الخليل	بيت جالا	سلفيت	طولكرم	رفح
السعر	٩٠ ديناراً	١٠٠ دينار	٧٠ ديناراً	٦٠ ديناراً	١١٠ دنانير

إذا كانت النسبة المئوية بين سعر تنكة الزيت في الخليل إلى سعرها في سلفيت تساوي:

$\frac{٩٠}{٧٠}$ × ١٠٠٪ = ١٢٨,٥٪ أي أن سعر تنكة الزيت في الخليل يزيد عن سعرها في سلفيت بنسبة ٢٨,٥٪.

أناقش:

١- النسبة المئوية لسعر تنكة الزيت في بيت جالا إلى سعرها في سلفيت هي: ....

أي أن ....

٢- النسبة المئوية لسعر تنكة الزيت في طولكرم إلى سعرها في سلفيت هي: ....

أي أن ....

٣- النسبة المئوية لسعر تنكة الزيت في رفح إلى سعرها في سلفيت هي: ....

أي أن ....

تعريف:

الرقم القياسي: هو عبارة عن مؤشر إحصائي يقيس التغير النسبي الذي طرأ على ظاهرة معينة، سواء أكانت سعراً، كمية، قيمة أم أجراً، بالنسبة لأساس معين قد يكون فترةً زمنيةً معينةً، أو مكاناً جغرافياً معيناً.

ولحساب الرقم القياسي نستخدم العلاقة:

الرقم القياسي لسعر سلعة ما = $\frac{ع}{ع_٠}$ × ١٠٠٪ ، حيث ع: سعر السلعة في زمان (مكان) المقارنة،

$ع_٠$: سعر السلعة في زمان (مكان) الأساس.

مثال (١): يبين الجدول الآتي أسعار وكميات سلعتين غذائيتين من: الحمص ، والعدس في عامي ٢٠٠٥م، ٢٠١٤م.

السلعة	زمن الأساس	زمن المقارنة	زمن الأساس	زمن المقارنة
	٢٠٠٥م	٢٠١٤م	٢٠٠٥م	٢٠١٤م
	السعر بالدينار		الكمية بالكيلوغرام	
حمص	٦	٨	٤	٥
عدس	١٠	١٢	٧	١٠

باعتبار سنة ٢٠٠٥ م هي سنة الأساس، أجد:

١- الرقم القياسي لكمية الحمص ....

٢- الرقم القياسي لقيمة الإنفاق على العدس في العام ٢٠١٤م (قيمة الإنفاق = الكمية × السعر)

الحل: ١- الرقم القياسي لكمية الحمص = $\frac{ع}{ع_٠}$ × ١٠٠٪

= $\frac{٥}{٤}$ × ١٠٠٪ = ١٢٥٪

٢- الرقم القياسي لقيمة الإنفاق على العدس في العام ٢٠١٤م = $\frac{١٠ \times ١٢}{١٠ \times ٧}$ × ١٠٠٪ = ١٧١,٤٪ .

تمارين ومسائل (٣-١)

① إذا كان ثمن سلعة ما في العام ١٩٨٠ م هو ٠,٢٥ ديناراً، و كان سعرها في العام ٢٠٠٠م هو دينار واحد، باعتبار سنة ١٩٨٠م سنة الأساس، أحسب الرقم القياسي لسعر هذه السلعة في العام ٢٠٠٠م.

② الجدول الآتي يبيّن سعر طن القمح في مجموعة من الدول العربية، على اعتبار أن مصر مكان الأساس، أحسب الرقم القياسي لسعر طن القمح في كل من الأردن، ولبنان، وفلسطين، وسوريا.

فلسطين	سوريا	مصر	لبنان	الأردن
١٨٠ ديناراً	١٤٠ ديناراً	٨٠ ديناراً	٦٠ ديناراً	١٠٠ دينار

③ يبيّن الجدول الآتي أسعار و كميات السكر، والأرز في سنتي ٢٠١٠م ، ٢٠١٧م.

السلعة	زمن الأساس	زمن المقارنة	زمن الأساس	زمن المقارنة
	٢٠١٠م	٢٠١٧م	٢٠١٠م	٢٠١٧م
	السعر بالدينار		الكمية بالكيلوغرام	
سكر	٤	٦	٨	٩
أرز	٩	١٠	١٠	١٥

باعتبار سنة ٢٠١٠م هي سنة الأساس، أجد:

١. الرقم القياسي لكمية السكر في العام ٢٠١٧م.

٢. الرقم القياسي لقيمة الإنفاق على الأرز في العام ٢٠١٧م.

٢-٣ الرقم القياسي لمجموعة من السلع (Index of a Group of Goods)

نشاط (١)

النفط والذهب وباقي المعادن من أهم المقومات الاقتصادية لدول العالم، وهذا ما دفع الاقتصاديين والإحصائيين للاهتمام بحساب الرقم القياسي لأسعار هذه السلع باختلاف الزمان أو المكان.

١- أكمل الجدول التالي معتبراً سنة ٢٠٠٨م سنة الأساس:

السلعة	٢٠٠٨م	٢٠١٢م	الرقم القياسي
	السعر		
برميل النفط	٤٠ دولاراً	....	٢٠٠٪
غرام الذهب	٢٠ دولاراً	٣٥ دولاراً	....
طن الحديد	....	٢٠٠ دولاراً	١٢٥٪

٢- الوسط الحسابي (متوسط) للأرقام القياسية في الجدول، هو ....

تعريف: يسمى الوسط الحسابي للأرقام القياسية لمجموعة من السلع بالرقم القياسي النسبي البسيط. ويعطى بالعلاقة:

$$\text{الرقم القياسي النسبي البسيط} = \frac{\text{مجموع الأرقام القياسية}}{\text{عدد السلع}}$$

$$\text{بالرموز} = \frac{\sum \frac{ع}{ع.} \times ١٠٠٪}{ن}$$

و هناك طريقة أخرى لحساب الرقم القياسي لمجموعة من السلع، تسمى الرقم القياسي التجميعي البسيط. ويحسب باستخدام العلاقة:

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط} = \frac{\text{مجموع الأسعار في (مكان، زمان) المقارنة} \times ١٠٠٪}{\text{مجموع الأسعار في (مكان، زمان) الأساس}}$$

$$\text{بالرموز} = \frac{\sum ع}{\sum ع.} \times ١٠٠٪$$

مثال (١): الجدول الآتي يبيّن أسعار ثلاث سلع في المحافظات الشمالية والمحافظات الجنوبية لدولة فلسطين :

السلعة	السعر (دينار)	
	المحافظات الشمالية	المحافظات الجنوبية
كيلو سمك دنيس	٨	٤
كيس أرز (٢٠كغم)	١٦	٢٤
كيلو خبز	٠,٧٥	١

باعتبار المحافظات الشمالية مكان الأساس، أجد:

١ . الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار.

٢ . الرقم القياسي التجميعي البسيط.

٣ . أعطي تفسيراً لهذا الرقم القياسي باستخدام الطريقتين.

الحل:

١- الرقم القياسي النسبي البسيط = $\frac{\text{مجموع الأرقام القياسية}}{\text{عدد السلع}}$

$$\frac{\frac{١}{٠,٧٥} + \frac{٢٤}{١٦} + \frac{٤}{٨}}{٣} \times ١٠٠\% = ١١١,١١\%$$

٢- الرقم القياسي التجميعي البسيط = $\frac{٤ + ٢٤ + ١}{٨ + ١٦ + ٠,٧٥} \times ١٠٠\% = ١١٧,١٧١٧١٧\ \%$

٣- أعطى كل من الرقمين مؤشراً بالنسبة لهذه السلع مجتمعة: أن الأسعار في المحافظات الجنوبية أعلى منها في المحافظات الشمالية. كما ألاحظ عدم تساوي الرقمين وذلك لاختلاف طريقة الحساب.

تمارين و مسائل (٣-٢)

١ أجد الرقم القياسي النسبي البسيط لأسعار عام ٢٠٠٢م بالنسبة لعام ١٩٩٦م من الجدول الآتي:

السلعة	السعر بالدينار	
	١٩٩٦م	٢٠٠٢م
حمص (كغم)	٣	٤
طحين (٥٠كغم)	٦٠	٧٥
سكر (٥٠ كغم)	٨٠	٨٠
أرز (٦٠كغم)	١٠٠	١١٠

٢ أجد الرقم القياسي التجميعي البسيط لكميات عام ١٩٩٥م بالنسبة لعام ١٩٩٠م من الجدول الآتي:

السلعة	الكمية	
	١٩٩٠م	١٩٩٥م
أ	٤٢٠	٥٠٠
ب	٦٠٠	٦٥٠
ج	٩٠٠	١٢٠٠

٣-٣ الأرقام القياسية المرجِّحة (Weighted Index No.)

نشاط (١)

أجرى مركزٌ للأبحاث في إحدى الجامعات الفلسطينية مقارنةً بين أسعار أربع سلع غذائية و كمياتها في السوق الفلسطينية، في العامين ٢٠٠٥م ، ٢٠١٥م معتبراً سنة ٢٠٠٥م سنة الأساس، ومعتمداً على الجدول:

السلعة	السعر سنة ٢٠١٥م	السعر سنة ٢٠٠٥م	الكمية سنة ٢٠١٥م	الكمية سنة ٢٠٠٥م
أ	٢٠	١٦	٣٦	٣٠
ب	٤٠	٢٨	٢٠	٢٥
ج	١٥	١٠	٤٥	٤٠
د	١٠	٧	٧٠	٦٠

أكمل الجدول الآتي:

السلعة	السعر سنة ٢٠١٥ × الكمية سنة ٢٠٠٥	السعر سنة ٢٠٠٥ × الكمية سنة ٢٠٠٥
أ	٢٠ × ٣٠ = ٦٠٠	....
ب	....	....
ج	....	١٠ × ٤٠ = ٤٠٠
د	١٠ × ٦٠ = ٦٠٠	....
المجموع	....	....

فيكون المقدار = $\frac{\text{مجموع (سعر سنة المقارنة × كمية سنة الأساس)}}{\text{مجموع (سعر سنة الأساس × كميات سنة الأساس)}}$ × ١٠٠٪

= .... = ١٤٠٪ .

تعريف رقم لاسبير القياسي: يسمى المقدار

فيكون المقدار = $\frac{\text{مجموع (سعر سنة المقارنة × كمية سنة الأساس)}}{\text{مجموع (سعر سنة الأساس × كميات سنة الأساس)}}$ × ١٠٠٪ رقم لاسبير القياسي.

ألاحظ أن لاسبير يستخدم كميات سنة الأساس كأوزان لترجيح الأسعار.

مثال (١): يمثل الجدول الآتي أسعار سلعتين، وكمياتهما:

السلعة	٢٠٠٠م		٢٠١٠م	
	الأسعار	الكميات	الأسعار	الكميات
أ	٩٠	١٠	١٠٠	١٥
ب	٦٠	٦	٨٠	٢٠

باتخاذ سنة ٢٠٠٠م سنة الأساس، أجد رقم لاسبير التجميعي للأسعار؟

الحل:

$$\text{رقم لاسبير التجميعي} = \frac{\sum (\text{سعر سنة المقارنة} \times \text{كمية سنة الأساس})}{\sum (\text{سعر سنة الأساس} \times \text{كميات سنة الأساس})} \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{١٠٠ \times ١٠ + ٨٠ \times ٦}{٩٠ \times ١٠ + ٦٠ \times ٦} \times ١٠٠\% = ١١٧,٤٦\%$$

كما وسنتعرف في هذا الدرس على رقمين قياسيين آخرين، هما: رقم باش، ورقم فيشر.

رقم باش القياسي:

على العكس من لاسبير، فقد استخدم باش كميات سنة المقارنة، بدلاً من كميات سنة الأساس كأوزان لترجيح الأسعار، و بذلك فإن رقم باش يساوي:

$$= \frac{\text{مجموع (سعر سنة المقارنة} \times \text{كمية سنة المقارنة)}}{\text{مجموع (سعر سنة الأساس} \times \text{كمية سنة المقارنة)}} \times ١٠٠\%$$

مثال (٢): في المثال السابق، أحسب رقم باش القياسي الموزون.

الحل:

$$\text{رقم باش} = \frac{١٠٠ \times ١٥ + ٨٠ \times ٢٠}{٩٠ \times ١٥ + ٦٠ \times ٢٠} \times ١٠٠\%$$

$$= ٣١٠٠ \div ٢٥٥٠ = ٢٤٦,٠٣\%$$

رقم فيشر القياسي المرَجِّح:

ويطلق عليه الرقم القياسي الأمثل، وذلك نظراً لما يمتاز به من خصائص رياضية و يعرّف على أنه جذر حاصل ضرب رقم لاسبير في رقم باش. و بذلك يكون:

$$\text{رقم فيشر} = \sqrt{(\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باش})}$$

مثال (٤): في المثال السابق، أحسب رقم فيشر للأسعار.

الحل:

$$\text{رقم فيشر} = \sqrt{(\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باش})}$$

$$= \sqrt{(١١٧,٤٦ \times ٢٤٦,٠٣)}$$

$$= ١٦٩,٩٩\% \, .$$

تمارين ومسائل (٣-٣)

١ – لديك الجدول الآتي:

السلعة	السعر		الكميات	
	٢٠١٠م	٢٠١٧م	٢٠١٠م	٢٠١٧م
أ	٢٥	٣٥	١٥٠	١٠٠
ب	١٠	٥	٢٠٠	٣٠٠
ج	٢٥٠	٢٠٠	٥٠	٨٠
د	١٥	١٠	١٦٠	٢٠٠

باستخدام بيانات عام ٢٠١٠م كأساس، أحسب:

١- رقم لاسبير ٢- رقم باش ٣- رقم فيشر.

(٣ - ٤) تمارين عامة

١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- الرقم القياسي لسعر سلعة في سنة ٢٠٠٠م بالنسبة لسعرها في نفس السنة يكون:

أ) ٥٠٪ ب) ٠٪ جـ) ٢٠٠٪ د) ١٠٠٪

٢- ماذا يعني أن الرقم القياسي لسعر السلعة أ في العام ١٩٩٥م بالنسبة لسعرها في العام ٢٠٠٥م هو ١٢٠٪؟

أ) زاد سعر السلعة أ في العام ٢٠٠٥م بنسبة ١٢٠٪ عنه في العام ١٩٩٥م .

ب) زاد سعر السلعة أ في العام ٢٠٠٥م بنسبة ٢٠٪ عنه في العام ١٩٩٥م.

ج) زاد سعر السلعة أ في العام ١٩٩٥م بنسبة ٢٠٪ عنه في العام ٢٠٠٥م.

د) زاد سعر السلعة أ في العام ١٩٩٥م بنسبة ١٢٠٪ عنه في العام ٢٠٠٥م.

* أعتمد على البيانات المعطاة في الجدول الآتي للإجابة عن الفقرتين ٣ ، ٤ .

يمثل الجدول سعر صندوق الجوافة ٢٠كغم (بالدينار) في ثلاث مدن فلسطينية في شهر ١١ عام ٢٠١٦م.

المدينة	قلقيلية	سلفيت	الخليل
السعر	٨	١٠	١٦

٣- ما الرقم القياسي لسعر صندوق الجوافة في الخليل بالنسبة لسعره في قلقيلية؟

أ) ١٠٠٪ ب) ١٥٠٪ جـ) ٢٠٠٪ د) ٢ ٪

٤- أيّ المدن الآتية تعتبر مكان الأساس، إذا كان الرقم القياسي لسعر صندوق الجوافة في سلفيت ١٠٠٪؟

أ) قلقيلية ب) سلفيت جـ) الخليل د) لا يمكن تحديده

٢ يبيّن الجدول الآتي أسعار ٤ سلع غذائية وكمياتها في فلسطين. باعتبار سنة الأساس ١٩٩٨م وسنة المقارنة ٢٠٠٨م.

السلعة	١٩٩٨م		٢٠٠٢م	
	الأسعار	الكميات	الأسعار	الكميات
أ	٨	١٨	١٦	٣٦
ب	٣٦	٣٠	٤٠	٦٠
ج	٤٠	١٠	٤٥	٢٠
د	٥	١٥	٥	١٥

أحسب:

١) الرقم القياسي النسبي البسيط.
٢) الرقم القياسي التجميعي البسيط.
٣) رقم لاسبير التجميعي للأسعار.
٤) رقم باش
٥) رقم فيشر.

أقيّم ذاتي أعبر بلغتي عن الرقم القياسي الأكثر استخداماً في حياتنا العملية.

فكرة ريادية:

ارتفعت أسعار العقارات في مدينة رام الله؛ نتيجة لوجود معظم مؤسسات دولة فلسطين فيها، وباعتبارها وجهة الوفود و السيّاح الزائرين. أرادت شركة عقارات أن تبني مجموعة من الشقق السكنية و الفنادق في رام الله بمواصفات دولية.

أناقش مع زملائي:

* النجاحات المترتبة على الفكرة:

....

* المخاطر التي يمكن أن تواجه المشروع من حيث:

- المخاطر النفسية: ....
- المخاطر الاجتماعية: ....
- المخاطر السياسية و تأثير الاحتلال: ....
- القرارات التي يمكن اتخاذها: ....

الوحدة الرابعة

المعادلات والمتباينات

العدالة أساس الملك، فكيــــــف تكون حيـــــاتنا بدون العدل؟

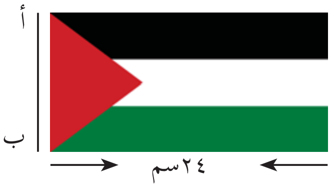
يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المعادلات والمتباينات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. حل نظام من معادلتين خطّيتين.
٢. حل نظام من ثلاث معادلات خطّيّة.
٣. حل معادلات تشتمل جذوراً.
٤. حل نظام مكون من معادلتين، إحداهما خطّيّة، والأخرى تربيعيّة.
٥. حل المعادلات والمتباينات التي تتضمن القيمة المطلقة.
٦. حل نظام من متباينتين خطّيتين.

نشاط (١)

أعلن الرئيس محمود عباس الثلاثين من أيلول يوماً للعَلَم الفلسطيني وذلك في عام ٢٠١٦م واحتفالاً بهذه المناسبة، تم رفع أكبر علم فلسطيني على أكبر سارية في فلسطين في ذلك العام.

في العلم الفلسطيني، يكون رأس المثلث الأحمر المتساوي الساقين على ثلث طول العلم أفقياً، فإذا كان طول العلم ٢٤م، لحساب عرض العلم أ ب قام أحد المشاركين في رفع العلم بحساب ما يأتي:



١. ارتفاع المثلث ع = $\frac{١}{٣}$ × .... و منها ع = ...

وهذه معادلة خطية من متغير واحد.

٢. ولحساب عرض العلم أب والذي يشكل قاعدة المثلث الأحمر قام أحد الطلبة بما يلي:

- محيط العلم = ٢ × (الطول + العرض)

٨٠ = ٢ × (٢٤ + أب)

أب = ... وهذه معادلة خطية بمتغير واحد.

ألاحظ أننا استخدمنا معادلات خطية لإيجاد ارتفاع المثلث (ع) وطول قاعدته (أب).

نشاط (٢)

أحل النظام الآتي باستخدام التعويض، وأتحقق من صحة الحل.

٢س − ٣ ص = ١ ____________ (١)

٤س + ص = ٩ ____________ (٢)

ص= ٩ − ٤س لماذا؟

أعوض عن قيمة ص في معادلة (١) فينتج أن:

.... = ١

١٤س = ٢٨

إذاً س = ٢ ، ص = ... لماذا؟

التحقـق: ....

....

مثال (١): عدد مكون من منزلتين مجموعهما ١١، عند تبديل المنزلتين ينتج عدد يزيد عن العدد الأصلي بمقدار ٢٧. أجد العدد الأصلي.

الحل:

أفرض أن منزلة الآحاد = س ، ومنزلة العشرات = ص فيكون:

س + ص = ١١ ـــــــــــــــــ (معادلة ١)

منزلة الآحاد	منزلة العشرات	العدد
س	ص	س + ١٠ص
ص	س	ص + ١٠س

العدد الناتج من تبديل المنزلتين – العدد الأصلي = ٢٧

(ص +١٠س) – (س + ١٠ص) = ٢٧

٩س – ٩ص = ٢٧ وبالقسمة على ٩ ينتج أن:

س – ص = ٣ .... (معادلة ٢)

أجمع المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن:

٢س = ١٤

ومنها س = ٧ وبالتعويض عن قيمة س في المعادلة (١) ينتج أن:

ص = ٤ فيكون العدد الأصلي هو ٤٧.

تمارين ومسائل (٤-١)

١ أحل أنظمة المعادلات الآتية:

أ) س + ٢ص = -٢

٣س+١١ص = ٩

ب) ٢س + ٣ص = ٣

س = ٥ + ٢ص

٢ عمر أب ثلاثة أمثال عمر ابنه في سنة ما، بعد سنتين يصبح مجموع عمريهما ٥٢ سنة. أجد عمر كل منهما في هذه السنة.

٤-٢ حل أنظمة من المعادلات الخطية بثلاثة متغيرات
(Solving Systems of Linear Equations with Three Variables)

نشاط (١)

ضمن الاهتمام بالعلوم التطبيقية في فلسطين، تنوي إحدى المتبرعات بناء غرفة على شكل متوازي مستطيلات لمختبر العلوم في مدرسة عثمان بن عفان الأساسية للبنات، بحيث يكون مجموع طول الغرفة ومثليْ عرضها يساوي ٦ أمثال ارتفاعها، ومجموع الطول والعرض ومثليْ الارتفاع يساوي ٢٦م ومجموع الطول والارتفاع يزيد عن العرض بمقدار ١٠م. كيف يمكن مساعدة المتبرعة في إيجاد أبعاد الغرفة؟

أفرض أن طول الغرفة = س ، وعرضها = ص ، وارتفاعها = ع

فيكون طول الغرفة ومثليْ عرضها يساوي ٦ أمثال ارتفاعها

س + ٢ ص = ٦ ع

مجموع الطول والعرض ومثليْ الارتفاع يساوي ٢٦

س + ... + ... = ٢٦

مجموع الطول والارتفاع يزيد عن العرض بمقدار ١٠

س + ... = ... + ...

ومنها

س + ٢ص – ٦ ع = صفر ______ (١)

س + ص + ٢ ع = ٢٦ ______ (٢)

س + ع – ص = ١٠ ______ (٣)

أصبح لدينا نظام مكون من ثلاث معادلات خطّيّة، فتكون أبعاد الغرفة:

س = ... م، ص = ... م، ع = ... م

مثال (١): أحل النظام الآتي:

س + ص + ع = ٠

٢س + ٣ص + ٢ ع = -٣

-س + ٢ص – ٣ ع = -١

أحول نظام المعادلات إلى نظام من معادلتين بمتغيرين، بحذف أحد المتغيرات وليكن س:

س + ص + ع = ٠

-س + ٢ص - ٣ع = -١

أجمع المعادلتين: إذاً ٣ص - ٢ع = -١ .... (١)

٢س + ٣ص + ٢ع = -٣

-٢س + ٤ص - ٦ع = -٢ (لماذا؟)

أجمع المعادلتين: إذاً ٧ص - ٤ع = -٥ .... (٢)

بهذا أحصل على نظام من معادلتين خطّيتين (١) ، (٢) بمتغيرين ص، ع

فيكون حل النظام هو: س = ٧ ، ص = -٣ ، ع = -٤ (لماذا؟)

تمارين ومسائل (٤-٢)

١ أحل الأنظمة الآتية، وأتحقق من صحة الحل:

أ) ٣س - ص + ٣ع = -٣

س + ٢ص - ٥ع = ١١

س + ٣ص - ٢ع = ٥

ب) س - ص + ٢ع = ٧

٢س + ص + ع = ٨

س - ع = ٥

٢ أراد أحد التجار شراء ثلاثة أنواع من الصابون من أحد مصانع مدينة نابلس فإذا كان ثمن قطعتين من النوع الأول وقطعة واحدة من النوع الثالث يساوي ١١ ديناراً، وثمن قطعتين من النوع الأول وقطعة من النوع الثاني وقطعة من النوع الثالث يساوي ١٣ ديناراً، وإذا علمت أن ثمن قطعة واحدة من النوع الأول وقطعتين من النوع الثاني يزيد بمقدار دينارين عن ثمن القطعة من النوع الثالث. أجد ثمن القطعة الواحدة من كل نوع.

٤-٣ حل معادلات تشتمل على جذور (Solving Equations Containing Roots)

نشاط (١)

تكثر في فلسطين المدن الساحلية، مثل: يافا، وحيفا، وعكا، وغزة. وفي غزة، هناك كثير من قوارب الصيد التقليدية، التي يتم تقدير أقصى سرعة (ع) لها بالكيلومتر/ساعة باستخدام المعادلة ع = ٤,٥ $\sqrt{ل}$ حيث ل تمثل طول غاطس القارب بالمتر، والذي يعرف بطول الخط الذي يصنعه القارب مع حافة الماء، عندما يكون حاملاً لأقصى حمولته.

لحساب طول غاطس قارب سرعته ١٦,٦٥كم/ساعة تكون:

ع = ٤,٥ $\sqrt{ل}$

١٦,٦٥ = ٤,٥ $\sqrt{ل}$

$\sqrt{ل}$ = ... (بتربيع الطرفين).

ل = ...

المعادلة السابقة هي معادلة جذرية؛ لأنها تحتوي متغيرات تحت الجذر، ولحل المعادلة الجذرية، أضع الجذر موضع القانون.

مثال (١): أحل المعادلة الجذرية الآتية: $\sqrt{٥س + ٢٤}$ − س = ٠

الحل: أضع الجذر موضع القانون

$\sqrt{٥س + ٢٤}$ = س   بتربيع الطرفين

٥س + ٢٤ = $س^٢$

$س^٢$ − ٥س − ٢٤ = ٠

(س − ٨) (س + ٣) = ٠

س = ٨   أو   س = -٣ ترفض   لماذا؟

تمارين ومسائل (٤-٣)

① أحل المعادلات الآتية:

أ) ٢ + $\sqrt{٣س − ٢}$ = ٦

ب) ١ + $\sqrt{س − ١}$ = ٣

ج) ٥ + $\sqrt{س − ٣}$ = س

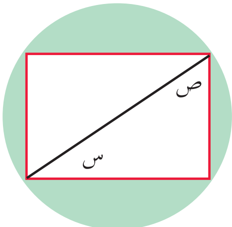
د) $\sqrt{٤س + ٢}$ − $\sqrt{٨س − ١٦}$ = ٠

② إذا كانت المسافة بين النقطتين (٢،أ) ، (-٦،٢) تساوي ١٠ وحدات. فما قيمة أ ؟

٤-٤ حل نظام مكون من معادلة خطية، ومعادلة تربيعية
(Solving a System of Linear and Quadratic Equation)

نشاط (١)

يصادف الخامس من نيسان من كل عام يوم الطفل الفلسطيني، و بهذه المناسبة تنوي إدارة متنزه بلدية نابلس إنشاء بركة سباحة للأطفال مستطيلة الشكل، محيطها ٢٨م داخل ميدان دائري نصف قطره ٥م كما في الشكل. لحساب أبعاد البركة:



أفرض أنَ بعدي البركة هما س ، ص وبالتالي ٢س + ٢ص = ... لماذا؟

و منها س + ص = ...

وكذلك س^{٢} + ص^{٢} = ١٠^{٢} لماذا؟

النظام هو:

س + ص = ١٤ .... (١)

س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠........ (٢)

(أجعل أحد متغيرات المعادلة الخطية موضعاً للقانون، ثم أعوضه في المعادلة التربيعية).

ص = ١٤ − س من معادلة (١)

س^{٢} + ... = ١٠٠ ومنها

س^{٢} − ١٤س + ٤٨ = ٠ = ... لماذا؟

(س − ٨) (.........) = ٠

ومنها س = ٨ أو س = ... لماذا؟

وعليه فإن ص = ... أو ص = ...

بعدا البركة.................. ، ....

مثال (١): أحل النظام الآتي:

٢س − ٣ص = ١ .... (١)

٤س − ٧س ص = -٦ .... (٢)

الحل:

$$ص = \frac{٢س - ١}{٣}$$

أعوض عن قيمة ص في المعادلة (٢):

$$٤س - ٧س \left(\frac{٢س - ١}{٣}\right) = -٦$$

$$١٢س - ١٤س^{٢} + ٧س = -١٨$$ لماذا؟

$$١٤س^{٢} - ١٩س - ١٨ = ٠$$

ومنها س = $-\frac{٩}{١٤}$ أو س = ٢ لماذا ؟

أعوض عن قيم س في إحدى المعادلتين، أجد أن **ص** = ١ ، $\frac{-١٦}{٢١}$

مجموعة الحل = {($\frac{-٩}{١٤}$ ، $\frac{-١٦}{٢١}$) ، (٢،١)}

تمارين ومسائل ٤-٤

١ أحل نظام المعادلات الآتية:

أ- $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$

$ص = ٢س - ٥$

ب- $(س - ٤)^{٢} + (ص - ٦)^{٢} = ١٠٠$

$ص - س = ٠$

ج- $٢س + ص = ١١$

$س ص - ص^{٢} = ٣$

٢ جد نقاط التقاطع بين المستقيم ٥س + ٢ص = -١ والعلاقة $ص = ٢س^{٢}$.

٤-٥ حل المعادلات و المتباينات التي تشمل القيمة المطلقة
(Solving Equations and Inequalities that Include Absolute Value)

نشاط (١)

يعتبر المجتمع الفلسطيني مجتمعاً فتيّاً، يكثر فيه إنجاب الأطفال؛ لذا تهتم وزارة الصحة بالمواليد، فتقوم العيادات المختصة بقياس محيط رأس الطفل بالسنتمتر وحسب العمر، من الولادة وحتى عمر سنتين، وذلك بمخططات منظمة الصحة العالمية، ضمن جداول معينة، حيث يعتبر محيط الرأس طبيعياً في عمر أربعة شهور إذا حقق المعادلة |س − ٤٢| = ٢ حيث س محيط رأس الطفل.

ولإيجاد الحدّين الأدنى والأعلى لمحيط رأس الطفل، وجد أن:

س − ٤٢ = -٢ أو س − ٤٢ = ٢

س= ....سم أو س = ...سم

أتذكر:

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي هي بعد العدد عن نقطة الأصل.

خاصية ١: إذا كان |س| = أ ، أ ≥ ٠ فإن س = أ أو س = -أ

مثال (١): أحل المعادلة |٣س + ١| = ٥

الحل: |٣س + ١| = ٥

إما ٣س + ١ = ٥ أو ٣س + ١ = -٥

٣س = ٤ ٣س = -٦

س = ٤/٣ س = -٢

مثال (٢): أحل المعادلة |٣س + ١| = |س + ١٥|

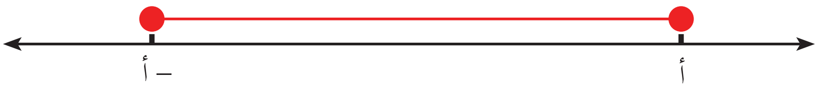
الحل: إما ٣س + ١ = س + ١٥ أو ٣س + ١ = -س − ١٥

س = ٧ أو س = -٤

إذاً مجموعة الحل = { ٧، -٤}

خاصية ٢:

|س| ≤ أ تعني أن –أ ≤ س ≤ أ حيث أ عدد حقيقي موجب



خاصية ٣:

|س| ≥ أ تعني أن س ≥ أ أو س ≤ –أ حيث أ عدد حقيقي موجب

مثال (٣): أحل المتباينة |٢س – ٥| < ٩

الحل: بما أن |٢س – ٥| < ٩

-٩ < ٢س – ٥ < ٩

-٤ < ٢س < ١٤

-٢ < س < ٧

مجموعة الحل =]-٢ ، ٧[

مثال (٤): أحل المتباينة |٣ – س| ≥ ٥

الحل: بما أن |٣ – س| ≥ ٥

إذاً ٣ – س ≥ ٥ أو ٣ – س ≤ –٥

إذاً س ≤ –٢ أو س ≥ ٨ لماذا؟

مجموعة الحل =]–∞ ، –٢] ∪ [٨ ، ∞[

تمارين ومسائل (٤-٥)

(١) أجد مجموعة الحل:

أ- |٤س – ١| = ٧

ب- |٣س + ١| = |س + ٧|

جـ- |س + ٤| < ٣

د- |٤ – ٣س| ≥ ٢

(٢) إذا كانت المسافة على خط الأعداد بين س و -١ تساوي المسافة بين س و -٣ ، أجد قيمة/قيم س.

حل أنظمة المتباينات الخطية بمتغيرين
(Solving Systems of Linear Inequalities with two Variables)

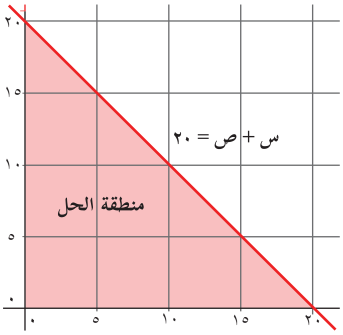
نشاط (١)

يعيش الشباب الفلسطيني حالةً من البطالة بسبب إجراءات الاحتلال الصهيوني، وممارساته العنصرية، لذا تسعى المنظمات الشبابيّة إلى استثمار أوقات الفراغ في أعمال مفيدة لهم فتوجههم إلى القراءة، وممارسة الرياضة. إذا كان عدد ساعات القراءة وممارسة الرياضة لأحد الشباب لا يزيد عن ٢٠ ساعة أسبوعياً، علماً بأنه يقضي ساعات أطول في ممارسة الرياضة بفرض أن س تمثل عدد ساعات ممارسة الرياضة، ص تمثل عدد ساعات القراءة.

المتباينة التي تمثل عدد ساعات القراءة وممارسة الرياضة هي: س + ص > ٢٠ المعادلة المرافقة للمتباينة س + ص = ٢٠.

التمثيل البياني للمعادلة المرافقة، وتحديد منطقة الحل

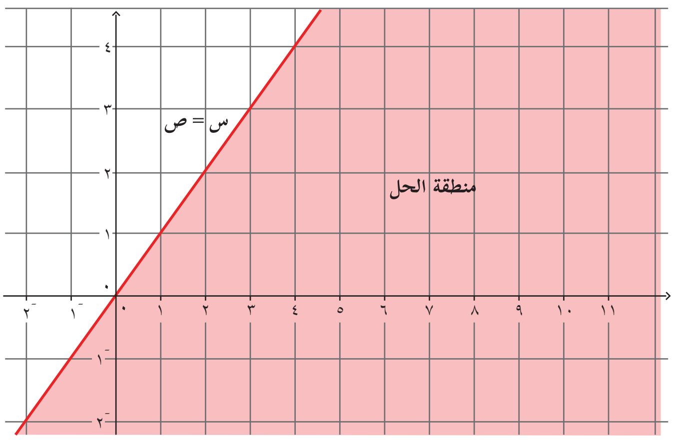
س	٠	٢٠
ص	٢٠	٠



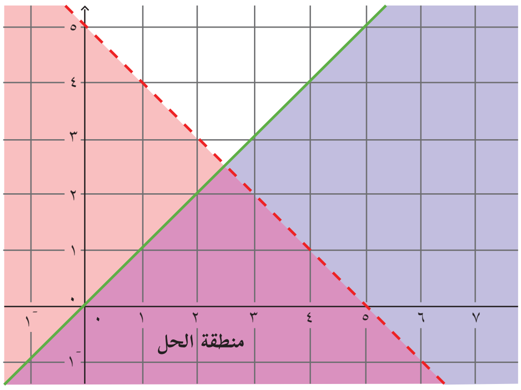
المتباينة التي تمثل العلاقة بين عدد ساعات ممارسة الرياضة، وعدد ساعات القراءة هي ....

المعادلة المرافقة للمتباينة، هي ....

وتمثل بيانياً كما يأتي:



تمثيل المتباينتين معاً على نفس المستوى الديكارتي وتظليل منطقة التقاطع.



ألاحظ أن المنطقة المشتركة بين المتباينتين، والتي تم تظليلها مرتين، تمثل مجموعة الحل.

القيم السالبة لكل من س، ص ترفض (لماذا؟)

أتعلم:

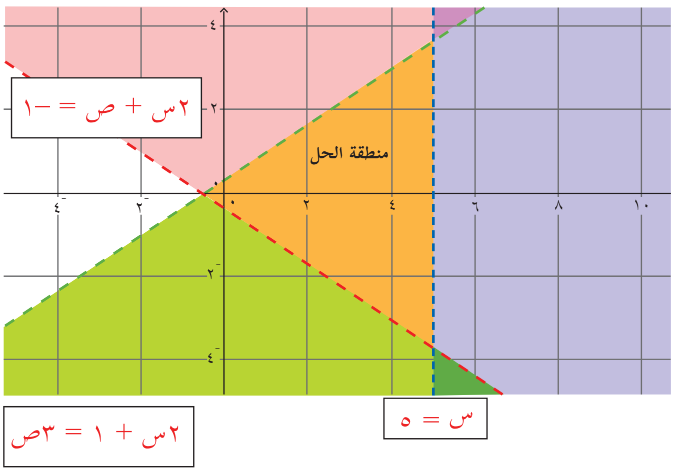
حل نظام المتباينات الخطية بيانياً، يعني إيجاد منطقة التقاطع على المستوى الديكارتي.

مثال (١): أحل نظام المتباينات الخطّيّة بيانياً:

٢س + ١ > ٣ص

س > ٥

٢س + ٣ص > -١



أتعلم:

الخط المتقطع يعني أن النقط الواقعة على الخط المستقيم لا تقع ضمن منطقة الحل.

تمارين ومسائل (٤-٦)

١) أمثل مجموعة حل كل من المتباينات الآتية في المستوى الديكارتي:

أ) ص + ٣س > ٥   ب) ٢س > ص

جـ) |س| > ٥   د) |٢س+٤| > ٣

٢) أمثل بيانياً مجموعة حل النظام:

أ) س + ص ≥ ٣   ب) س + ص ≤ ١   ج) ص ≤ ٠

٤ - ٧ تمارين عامة

(١) أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- في نظام المعادلات الآتي:

س + ص − ع = ٤

٢س + ع = ٧

س − ٢ص = -١

إذا كانت س = ٣ فقيم ص ، ع على الترتيب هي:

أ) ١،٢   ب) ٢،١   جـ) ٢،٣   د) ١،٣

٢- ما حل المعادلة |٢س − ٣| = ٧؟

أ) ٥   ب) -٢   جـ) ٥ ، -٢   د) -٥ ، ٢

٣- ما حل المتباينة |١ − س| < ١١؟

أ) [-١٠ ، ١٢]   ب) [-∞ ، ١٢]

جـ) [١٢ ، ∞]   د) [-∞ ، −١٠] ∪ [١٢ ، ∞]

(٢) أحل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية:

أ) ٢ص + س − ٣ع = ٩

٢س − ص + ٢ع = −٨

٣س − ٤ع − ص = ٣

ب) س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠

ص − س = ٢

(٣) عددان يقل أحدهما عن مثلي الآخر بمقدار ٣، وحاصل ضربهما يساوي ٥ فما العددان؟

(٤) ممر مستطيل الشكل، طول قطره ٦٠م ، ويزيد أحد بعديْه عن الآخر بمقدار ١٢م، فما بعدا الممر؟

٥ تريد جمعية رعاية الموهوبين بناء قاعة على شكل مستطيل، وذلك لتدريب الموهوبين، بحيث لا يقل طولها عن ٨٠ متراً، ولا يزيد محيطها عن ٣١٠ أمتار. أجد الأبعاد الممكنة للقاعة؟

أقيّم ذاتي أعبر بلغتي عن نقاط القوة ونقاط الضعف الواردة في مفاهيم الوحدة التي تعلمتها.

فكرة ريادية

أرادت أسرة فلسطينية توزيع ميزانيتها توزيعاً أمثل بين: المأكل، والملبس، واللوازم الأخرى. فقامت بدراسة الأسعار، وتحديد الاحتياجات اللازمة، وحسب الأولويات.

أناقش مع زملائي:

- النجاحات المترتبة على الفكرة:

....

....

- المخاطر التي يمكن أن تواجه المشروع من حيث:

المخاطر النفسية: ....

المخاطر الاجتماعية: ....

المخاطر المادية: ....

- القرارات التي يمكن اتخاذها : ....

الوحدة الخامسة

النهايات والاتّصال

جدار الفصل العنصري، قسّم فلسطين إلى مجمعات منفصلة، أناقش كيف يمكن جعل مدن فلسطين متصلة.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف النهايات والاتصال في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ التعرف إلى مفهوم نهاية الاقتران عند نقطة.

٢ إيجاد نهاية الاقتران عند نقطة، باستخدام الجدول والرسم البياني.

٣ استخدام نهاية اقتران متعدد القاعدة عند نقطة.

٤ التعرف إلى نهاية الاقتران في اللانهاية باستخدام القوانين.

٥ بحث اتصال اقتران عند نقطة.

٥-١ نهاية الاقتران (Limit of a Function)

نشاط (١)

يستخدم الطلبة عادة الأنابيب المخبرية في تجاربهم العلمية، ولهذه الأنابيب أحجام وأنواع مختلفة، حسب طبيعة الاستخدام، فإذا استخدم إبراهيم أنبوباً مخبرياً سعته ٨ مللتر، وتدرج بوضع سائل فيه مسجلاً حجم السائل والحجم الفارغ في كل لحظة، وكانت القراءات كما في الجدول الآتي:

حجم السائل س	...	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	$\leftarrow$ ...	٣	$\rightarrow$ ...	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩	...
حجم الفراغ ص	...	٤,٩	٤,٩٩	٤,٩٩٩	$\leftarrow$ ...	٥	$\rightarrow$ ...	٥,٠٠١	٥,٠١	٥,١	...

وبفرض أن حجم السائل س وحجم الفراغ ص فإن العلاقة بين س ، ص تكون ص = ٨ − س

يقابل ٣,٠١ مللتر من حجم السائل ٤,٩٩ مللتر من الحجم الفارغ.

يقابل ٣,٠٠١ مللتر من حجم السائل .... مللتر من الحجم الفارغ.

يقابل .... مللتر من حجم السائل ٥,٠١ مللتر من الحجم الفارغ.

اقتراب حجم الماء (س) من اليمين من العدد ٣ يقابله اقتراب حجم المنطقة الفارغة (ص) من اليمين من العدد ٥.

اقتراب حجم الماء من اليسار من العدد ٣ يقابله اقتراب حجم المنطقة الفارغة من اليسار من العدد ....

أقارن بين حجم المنطقة الفارغة من اليسار، وحجمها من اليمين عندما يقترب حجم السائل من العدد ٣.

نشاط (٢)

ليكن **ق**(س) = س + ١ ، س ∈ ح، فإنه عندما تقترب س من العدد ٤ من اليمين فإن **ق**(س) يقترب من ٥.

عندما تقترب س من العدد ٤ من اليسار فإن **ق**(س) يقترب ....

تعريف :

نهاية الاقتران ق(س) عند نقطة:

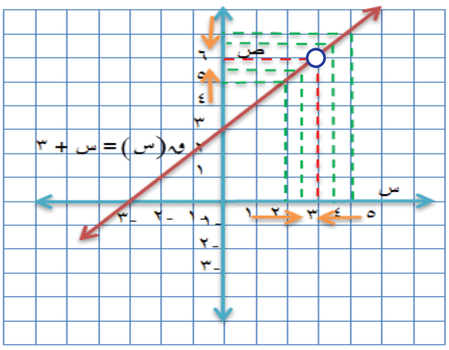
- كلما اقتربت قيم س من اليمين من العدد (أ) اقتربت قيم ق(س) المقابلة لها من عدد حقيقي معين (ل) ويعبر عن ذلك بالصورة $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ل.

- كلما اقتربت قيم س من اليسار من العدد (أ) اقتربت قيم ق(س) المقابلة لها من عدد حقيقي معين (ل) يعبر عن ذلك بالصورة $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ل.

- إذا كان $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ل فإن $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة ويكون $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ل

نشاط (٣)

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}$ ، س $\neq$ ٣



$\underset{\text{س} \leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٦ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٦

$\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ...

ق(٣) = ...

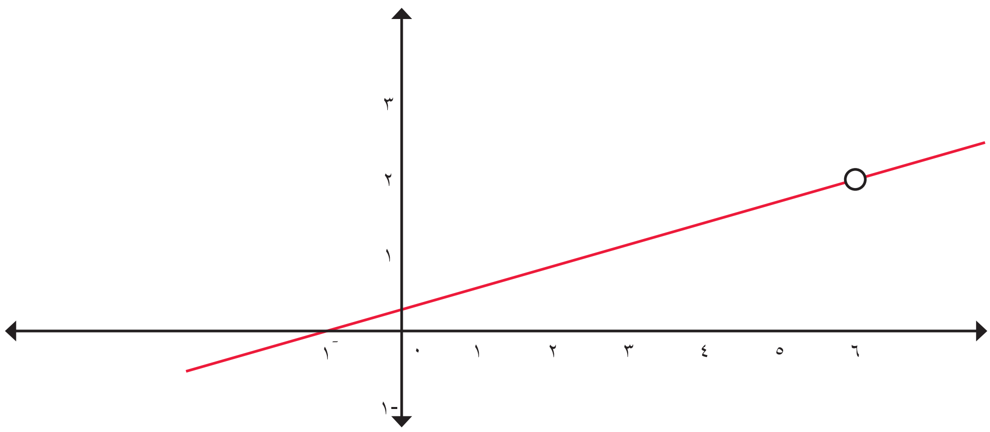
أناقش:

هل توجد علاقة بين وجود النهاية ووجود صورة الاقتران؟

نشاط (٤)

إذا كان ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ٦}{\text{س} - ٦}$ ، س $\neq$ ٦ فإن ق(س) = $\dfrac{(\text{س} - ٦)(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٦)}$ ، س $\neq$ ٦

ق(س) = (س + ١) ، س $\neq$ ٦



أكمل الجدول الآتي:

س	...	٦٫١	٦٫٠١	...	...	٦	...	٥٫٩٩٩	...	...	...
ق (س)	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

نهـا$_{س \leftarrow ٦^-}$ ق (س) = ...

نهـا$_{س \leftarrow ٦^+}$ ق (س) = ...

نهـا$_{س \leftarrow ٦}$ ق (س) = ...

نشاط (٥)

الشكل المجاور:

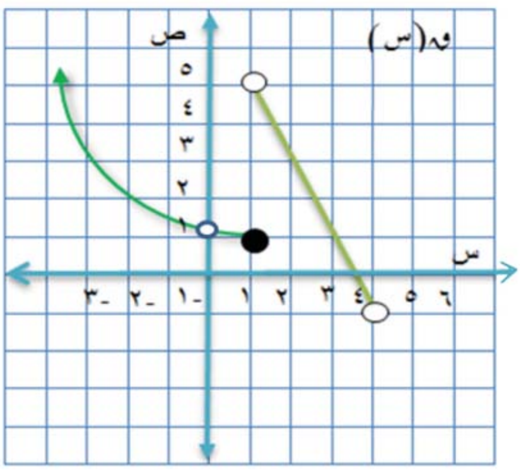
١) ق(١) = ١

٢) نهـا$_{س \leftarrow ١^-}$ ق (س) = ١

٣) نهـا$_{س \leftarrow ١^+}$ ق (س) = ...

٤) نهـا$_{س \leftarrow ١}$ ق (س) = ...

٥) نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ ق (س) = ...



تمارين ومسائل (٥-١)

١) أجد النهايات الآتية باستخدام الجدول :

أ) نهـا$_{س \leftarrow ٥}$ $\frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥}$ ، س $\neq$ ٥

ب) نهـا$_{س \leftarrow ١}$ (س − ٢)

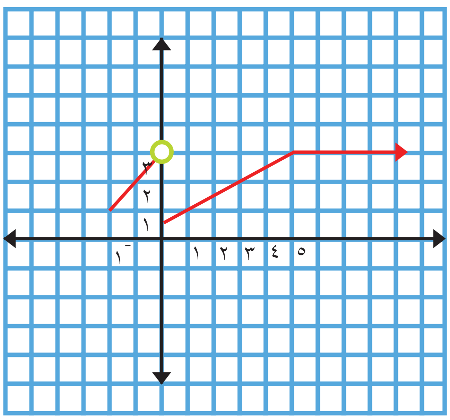
٢) أعتمد الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) لإيجاد.

أ) نهـا$_{س \leftarrow ٥}$ ق (س)

ب) نهـا$_{س \leftarrow ٠^-}$ ق (س)

جـ) نهـا$_{س \leftarrow ٠^+}$ ق (س)

د) نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ ق (س)



٥-٢ قوانين النهايات (Limits Rules)

نشاط (١)

تنظم مدينة بيت لحم سنوياً سباق السلام لمسافات متعددة، يشارك فيه كثير من العدّائين الدوليين من جميع أنحاء العالم، فإذا شارك عدّاء وكان تسارعه ثابتاً مقداره ٦م / ث^{٢} ليقطع المسافة بين كنيسة المهد ومدينة بيت جالا، فإنه يمكن تمثيل تسارع العدّاء مع مرور الزمن، كما في الجدول الآتي:

ن	...	...	٢,٠١	٢,٠٠١	٢	١,٩٩٩	١,٩٩	...	...
ت (ن)	...	٦	...	...	...	...	٦	...	...

تسارع العدّاء عندما يقترب الزمن من ٢ ثانية، هو ٦

تسارع العدّاء عندما يقترب الزمن من ٣ ثانية، هو ٦

تسارع العدّاء عندما يقترب الزمن ٤ ثانية، هو ......

تسارع العدّاء عندما يقترب الزمن ن ثانية، هو ......

يمكن تمثيل التسارع بالاقتران ت(ن) = ...

أستخدم الجدول في إيجاد $\underset{\text{ن} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ت(ن)

قاعدة (١)

إذا كان ق(س) = **جـ** فإن $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ (س) = **جـ** حيث **جـ** ، أ $\in$ ح

قاعدة (٢)

إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ل ، $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ هـ (س) = ك وكان **جـ** عدداً حقيقياً فإن:

١. $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ (ق(س) ± هـ (س)) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ (ق(س)) ± $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = ل ± ك

٢. $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ جـق (س) = **جـ** × ل

٣. $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ (ق(س) × هـ (س)) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ (ق(س)) × $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = ل × ك

٤. $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \dfrac{\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}} \text{ق(س)}}{\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}} \text{هـ(س)}} = \dfrac{\text{ل}}{\text{ك}}$ ، هـ(أ) $\neq$ ٠، ك $\neq$ ٠.

نشاط (٢)

إذا كان $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ ق(س) = ٤ ، $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ هـ(س) = -٣

١. $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ (ق(س) + هـ(س)) = $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ (ق(س)) + $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ هـ(س) = ٤ + -٣ = ١

٢. $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ (٢ق(س) − ٣هـ(س)) = ٢ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ ق(س) − ٣ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ هـ(س) = ...

٣. $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ (ق(س) × ٢هـ(س)) = $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ ق(س) × ٢ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ هـ(س) = ...

٤. $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ = $\frac{\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} ق(س)}{\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} هـ(س)}$ = ...

٥. $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ ق^{٢}(س) = $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ ق(س) × $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ ق(س) = ...

أتذكر:

اقتران كثير الحدود هو اقتران يكون على الصورة:

ق(س) = أ$_{ن}$ س^{ن} + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + أ$_{ن-٢}$ س$^{ن-٢}$ +....... + أ$_{١}$ س^{١} + أ$_{٠}$ حيث ن ∈ ط ، أ$_{٠}$، أ$_{١}$، .... أ$_{ن}$ أعداد حقيقية

قاعدة (٣)

إذا كان ق(س) كثير حدود فإن $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) = ق(أ)

مثال (١): إذا كان ق(س) = ٣س^{٢} + ٢ أجد $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ ق(س)

بما أن ق(س) كثير حدود فإن $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ ق(س) = ق(٢) = ٣(٢)^{٢}+٢ = ١٤

أتذكر:

الاقتران النسبي هو اقتران يمكن كتابته على الصورة م(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$

حيث ق(س)، هـ(س) كثيرا حدود، هـ(س) ≠ صفر

▶ **لإيجاد نهاية الاقتران النسبي م(س)** ألجأ إلى التعويض المباشر:

١. إذا كان التعويض المباشر يعطي $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد غير الصفر}}$ فإن $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ م(س) = $\frac{ق(أ)}{هـ(أ)}$ ، هـ(أ) ≠ ٠

٢. إذا كان التعويض المباشر يعطي $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ فإن هذه الكمية غير معرفة.

٣. إذا كان التعويض المباشر يعطي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فإن هذه الكمية غير معينة. وعندها ألجأ إلى التحليل ثم الاختصار ثم التعويض.

نشاط (٣)

إذا كان ق(س) = $\frac{س^٢ - ٢٥}{س^٢ - ٥س}$ ، س ≠ ٥ فإن

أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (ق(س)) = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ $\frac{س^٢ - ٢٥}{س^٢ - ٥س}$ ، س ≠ ٥ بالتعويض المباشر

= $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ $\frac{٤ - ٢٥}{٤ - ١٠}$ = ...

ب) $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ (ق(س)) = $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ $\frac{س^٢ - ٢٥}{س^٢ - ٥س}$ ، س ≠ ٥

التعويض المباشر يساوي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهي كمية غير معينة، لذا ألجأ للتحليل، ثم الاختصار، ثم التعويض.

= $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ $\frac{\cancel{(س - ٥)}(س+٥)}{س\cancel{(س - ٥)}}$ ، س ≠ ٥

= $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ $\frac{(س+٥)}{س}$ ، س ≠ ٥ لماذا؟

= ....

نشاط (٤)

أجد $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ $\frac{٤ - س^٢}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢

عند التعويض المباشر أحصل على: $\frac{٤ - ٤}{٢ - ٢}$ = $\frac{٠}{٠}$

وهي صورة غير معينة، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ $\frac{٤ - س^٢}{س - ٢}$ = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ $\frac{(٢ - س)(٢+س)}{(س - ٢)}$ = ...

نشاط (٥)

أجد $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نها}} \frac{س^٣ + ٢٧}{(س + ٣)}$

عند التعويض المباشر أحصل على ....

ومنها $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نها}} \frac{س^٣ + ٢٧}{(س + ٣)} =$ ....

تمارين ومسائل (٥-٢)

١ إذا كان $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} ق(س) = -٢$ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} هـ(س) = ٣$. أجد النهايات الآتية:

أ- $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} (٢ق^٢(س) - هـ(س))$

ب- $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(\frac{٥ق(س)}{هـ^٢(س) + س} \right)$

ج- $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} (٤ق(س) + س^٢ - ٣)$

٢ أجد النهايات الآتية:

أ- $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{٣س^٢ - ١٢س}{س^٢ - ١٦}$ ، $س \neq \pm ٤$

ب- $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}} \left(\frac{س^٢}{س^٢ - ٢٥} - \frac{٥س}{س^٢ - ٢٥} \right)$، $س \neq \pm ٥$

ج- $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{س^٣ - ١}{س^٢ - ١}$ ، $س \neq ١$

د- $\underset{س \leftarrow \sqrt{٥}}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٥}{س - \sqrt{٥}}$ ، $س \neq \sqrt{٥}$

٣ إذا كان $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{(أس^٢ - ٣٦)}{س - ٣} = ٢٤$ ، $س \neq ٣$، فما قيمة أ.

٤ إذا كان $ق(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{س^٢ - ٥س + ٦}$، $س \neq ٣، ٢$. أجد $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} ق(س)$

٥-٣ نهاية الاقتران متعدد القاعدة (Limits of Multibase Function)

نشاط (١)

لتقديم خدمة أفضل للمواطنين، تسعى البلديات إلى تشجيع المواطنين على تسديد المستحقات المترتبة عليهم، فإذا قدمت إحدى البلديات عرضا يقضي بخصم ربع المستحقات في حالة دفع مبلغ مئة دينار أو أكثر، وخصم مبلغ ثابت قدره ٢٥ ديناراً في حالة دفع مبلغ بين ٨٠ و ١٠٠ دينار .

يمكن تمثيل العرض بالعلاقة الآتية حيث س تمثل المبلغ المستحق:

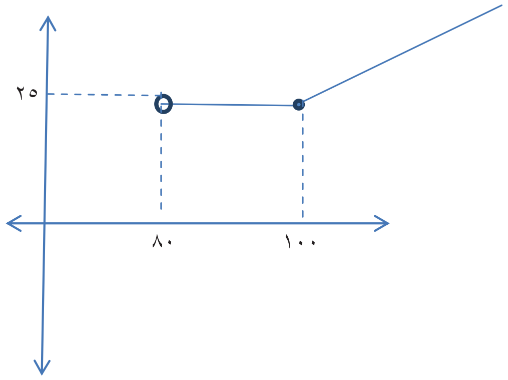
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢٥ \quad , & ٨٠ < \text{س} < ١٠٠ \\ \frac{١}{٤}\,\text{س} \quad , & \text{س} \geq ١٠٠ \end{cases}$$

قيمة الخصومات لشخص دفع مبلغ ٨٥ ديناراً ، هو ٢٥ ديناراً.

قيمة الخصم لشخص دفع مبلغ ١٢٠ ديناراً، هو ....

قيمة الخصم لشخص دفع مبلغ ٢٠٠ دينار، هو ....

هل قيمة الخصم تساوي ٢٥ ديناراً، عندما يقترب مبلغ المستحقات من ١٠٠ دينار.



إذا مثلت علاقة الخصم بالشكل المجاور

فإن $\lim\limits_{\text{س} \to ١٠٠^+} \text{ق(س)} =$ ....

$\lim\limits_{\text{س} \to ١٠٠^-} \text{ق(س)} =$ ....

$\lim\limits_{\text{س} \to ١٠٠} \text{ق(س)} =$ ....

نشاط (٢)

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} + ١ \quad , & \text{س} > ٢ \\ \text{س}^٢ + ١ \quad , & \text{س} \leq ٢ \end{cases}$

١. $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٤} (٢\text{س}+١) = ٩$

٢. $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ١} (\text{س}^٢ + ١) =$ ....

٣. $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢} (٢\text{س} + ١) =$ ....

٤. $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢} (\text{س}^٢ + ١) =$ ....

٥. $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق(س)} =$ ....

قاعدة:

إذا كان ق(س) اقتران متعدد القاعدة و يُغير من قاعدته عند س = أ. وكان $\underset{\text{س}\to\text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}\,\text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to\text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}\,\text{ق(س)} = \text{ل}$ فإن $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\,\text{ق(س)}$ موجودة وتساوي ل.

نشاط (٣)

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤}{\text{س} - ٤} & \text{، س} \neq ٤ \\ -١ & \text{، س} = ٤ \end{cases}$ فإن

$\underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نهـا}}\,\text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}}\,\dfrac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤}{\text{س} - ٤}$ (لماذا؟) = ...

$\underset{\text{س}\to ٤^{-}}{\text{نهـا}}\,\text{ق(س)} =$ .... ، $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}}\,\text{ق(س)} =$ ....

ق(٤) = ...

تمارين ومسائل (٥-٣)

١) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٢ & \text{، س} \geq ٠ \\ \text{س} - ٢ & \text{، س} < ٠ \end{cases}$

أجد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\,\text{ق(س)}$ ، $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\,\text{ق(س)}$ إن وُجدت.

٢) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{٤ - \text{س}}{\text{س} - ٤} & \text{، س} > ٤ \\ \text{أس}^{٢} - ٩ & \text{، س} \leq ٤ \end{cases}$ ، أجد قيمة أ إذا علمت أن $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}}\,\text{ق(س)}$ موجودة.

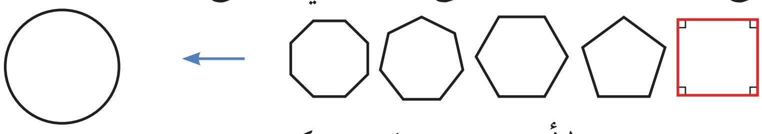
٣) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١٦}{\text{س} + ٤} & \text{، س} \neq -٤ \\ \text{أ} & \text{، س} = -٤ \end{cases}$ ، أجد قيمة أ إذا علمت أن $\underset{\text{س}\to -٤}{\text{نهـا}}\,\text{ق(س)} = \text{ق(}-٤\text{)}$

٤) إذا علمت أن $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\,\dfrac{\text{س}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{\text{س} - \text{أ}} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\,(\text{س}+٥)$ ، س ≠ أ أجد قيمة أ.

٥-٤ نهاية الاقتران عندما س $\longrightarrow \infty$ Limits at Infinity

نشاط (١)

الرياضيات فن وجمال، وللهندسة نصيب وإسهام فيها، ويشتهر الثوب الفلسطيني بمطرزات هي أشكال هندسية منتظمة وغير منتظمة، ومن الجمال الهندسي في التطريز إضافة ضلع إلى المربع، ليصبح خماسياً، وإضافة ضلع للخماسي ليصبح سداسياً وهكذا ....



المتتالية التي تمثل عدد الأضلاع في كل شكل هي ٤ ، ٥ ، ... ، ... ، ..... يمكن أن تستمر في النمط إلى مالانهاية، ويسمى الشكل عندها .... وإذا كان محيط أي شكل من الأشكال السابقة يساوي وحدة واحدة، فيمكن إيجاد طول ضلع الشكل باستخدام العلاقة:

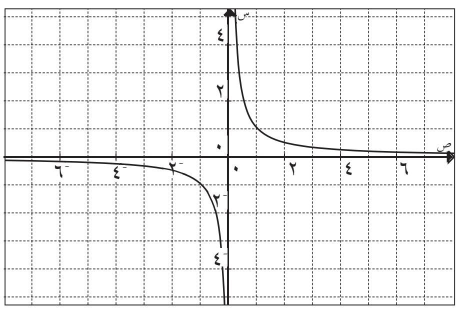
طول الضلع = المحيط ÷ عدد الأضلاع.

طول ضلع المربع = $\frac{١}{٤}$ ، طول ضلع الخماسي = $\frac{١}{٥}$ ، وهكذا

المتتالية التي تمثل أطوال الأضلاع هي $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، ....

إذا رمزنا لعدد الأضلاع بالرمز س فيكون طول الضلع ممثلاً بالعلاقة ق(س) = $\frac{١}{س}$

كلما اقتربت س من ∞ اقترب $\frac{١}{س}$ من الصفر. نعبر عن ذلك رياضياً $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} = ٠$.



قاعدة (١):

إذا كان جـ ، أ ∈ ح ، ن عدداً صحيحاً موجباً، فإن:

١. $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}$ جـ = جـ

٢. $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{أ}{س^{ن}} = ٠$ ، س $\neq$ ٠ .

٣. $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} س^{ن} = \infty$

قاعدة (٢):

$\infty \pm$ **جـ** $= \infty$.

$-\infty \pm$ **جـ** $= -\infty$، **جـ** عدد حقيقي.

$\infty \times$ **جـ** $=$ **جـ** $\times \infty = \infty$، **جـ** عدد حقيقي موجب.

$\infty \times$ **جـ** $=$ **جـ** $\times \infty = -\infty$ ، **جـ** عدد حقيقي سالب.

مثال (١): أجد $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ ٣س^{٢} − ٥س + ١

الحل: $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ ٣س^{٢} − ٥ س + ١

$= \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ س^{٢} (٣ − $\frac{٥}{س}$ + $\frac{١}{س^{٢}}$)

$= \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ س^{٢} ($\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ ٣ − $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ $\frac{٥}{س}$ + $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ $\frac{١}{س^{٢}}$)

$= \infty$

مثال (٢): أجد $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ $\frac{\text{٥س − ٢س}^{٢}\text{ + ١}}{\text{٣س}^{٢}\text{ + ٢}}$

الحل: $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ $\frac{\text{٥س − ٢س}^{٢}\text{ + ١}}{\text{٣س}^{٢}\text{ + ٢}}$

$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ $\frac{\text{س}^{٢}\text{ (} \frac{٥}{س} \text{ − ٢ + } \frac{١}{س^{٢}}\text{)}}{\text{س}^{٢}\text{ (٣ + } \frac{٢}{س^{٢}}\text{)}}$

$= \frac{-٢}{٣}$ لماذا؟

مثال (٣): أجد $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٥س + ١}{س^{٢} + ٤}$

الحل: $= \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٥س + ١}{س^{٢} + ٤}$

$$= \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س\left(٥ + \dfrac{١}{س}\right)}{س^{٢}\left(١ + \dfrac{٤}{س^{٢}}\right)}$$

$$= \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{١}{س} \times \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\left(٥ + \dfrac{١}{س}\right)}{\left(١ + \dfrac{٤}{س^{٢}}\right)}$$

= صفر لماذا؟

ملاحظة:

$\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-١} س^{ن-١} + \dots}{ب_{م} س^{م} + ب_{م-١} س^{م-١} + \dots}$ ، ن ، م $\in$ ط تساوي:

١) $\dfrac{أ_{ن}}{ب_{م}}$ إذا كان ن = م

٢) صفر إذا كان ن < م

٣) ∞ أو $-\infty$ إذا كان ن > م

تمارين ومسائل (٥-٤)

أجد كلاً من النهايات الآتية:

أ) $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} (-٥س + ٢)$

ب) $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{٨س^{٣} + ١ - (س^{٢} - ٤)}{س^{٥} + ٣ + (س^{٤} + ١)}$

جـ) $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{(س + ٢)\,(٣س + ١)}{(س + ١)\,(س + ٣)}$

د) إذا كان $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{ن} + ٥}{٣س^{٢} + ١} = \dfrac{١}{٣}$ جد قيمة ن

هـ) إذا علمت أن $ق(س) = أس + ٣$ وأن $هـ(س) = \dfrac{٤س^{٣} - ٢س + ١}{س - س^{٣}}$

وكان $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}} ق(س) = \underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} هـ(س)$ أجد قيمة أ

و) $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{٥س}{س - ١} - \dfrac{٢س}{س + ١} \right)$

ط) $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{٥} - ٣س + ٢}{س^{٢} + ٦}$

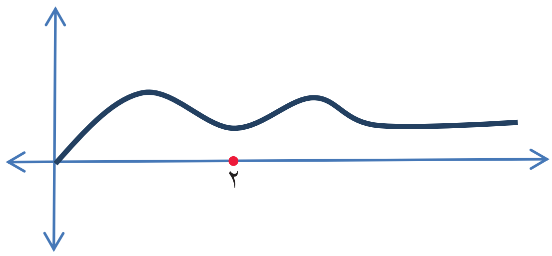
٥-٥ الاتصال (Continuity)

نشاط (١)

لدعم صمود أهلنا في مدينة القدس وإنعاش اقتصادهم، قررت مدرسة عسقلان الثانوية للبنات تنظيم رحلة مدرسية إلى مدينة القدس. وأثناء السفر في الحافلة لاحظت سلمى عدّاد السرعة في الحافلة، فكانت السرعة تتغير صعوداً ونزولاً فتارةً تصل السرعة إلى ٩٠كم/ساعة، وتارةً أخرى تنزل إلى ٥٠كم/ساعة.

تساءلت سلمى: هل السرعة تنتقل مباشرة من ٥٠ كم/ ساعة إلى ٩٠ كم/ ساعة، أم تنتقل لتمر بالسرعات الواقعة بين ٥٠ و ٩٠؟

أجابتها معلمة الفيزياء بـ ....



إذا كانت الحافلة تسير حسب العلاقة الممثلة بالشكل، هل يمكن تمثيل هذه العلاقة دون رفع القلم؟

مثل هذه العلاقة تكون متصلة؛ لأنها ترسم دون رفع القلم.

$\underset{ن \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(ن) = ... ، $\underset{ن \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(ن) = ...

$\underset{ن \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(ن) = ... ، ق(٢) = ...

العلاقة بين $\underset{ن \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(ن) و ق(٢) = ...

تعريف: الاتصال عند نقطة:

يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = أ إذا تحققت الشروط الآتية:

١. ق (أ) موجودة ومعرفة كعدد حقيقي.

٢. $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة.

٣. $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق (أ)

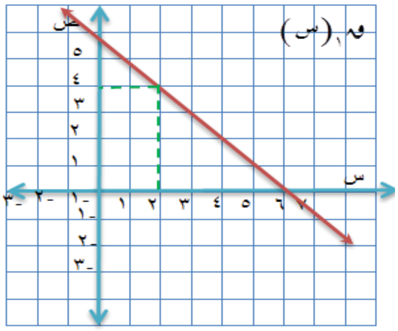
نشاط (٢)

في الشكل المجاور:

ق (٢) = ٤

نهـا ق(س) = ٤ .
س ← ٢

ق (٢) = نهـا ق(س) = ٤ .
س ← ٢



ألاحظ أن الشكل يمثل الاقتران كثير الحدود ص = ٦ − س وهو متصل دائماً.

قاعدة:

الاقترانات كثيرة الحدود متصلة في مجالها.

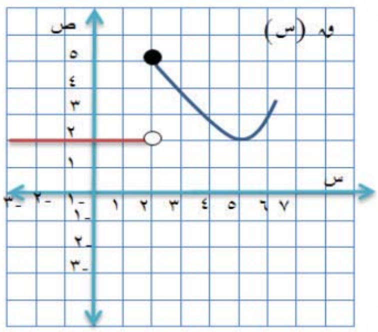
نشاط (٣)

في الشكل المجاور:

ق(٢) = ... ، نهـا ق(س) = ...
س ← ٢

لأن ....

هل ق(س) متصلاً عند س = ٢.



مثال (١): إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١} & \text{، س} \neq ١ \\ ٤ & \text{، س} = ١ \end{cases}$

أبحث اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١.

الحل:

ق(١) = ٤ ، نهـا ق(س) = ٢
س ← ١

نهـا ق(س) ≠ ق(١) ومنها ق(س) غير متصل عند س = ١.
س ← ١

مثال (٢): إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س^{٢} - ٢ \text{ ، } س < ٠ \\ س - ٢ \text{ ، } س \geq ٠ \end{cases}$

أبحث اتصال الاقتران ق(س) عند س = صفر.

الحل:

أبحث شروط الاتصال عند س = صفر لأن الاقتران ق(س) يغير قاعدته عندها.

ق(٠) = ٠ − ٢ = -٢

$\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = -٢ لماذا؟

$\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = -٢ لماذا؟

$\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = -٢ لماذا؟

ومنها $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) = -٢

ق(٠) = $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) = -٢

- ق(س) متصل عند س = -٢

نشاط (٤)

إذا كان ق(س) = ٣س + ١، هـ (س) = $س^{٢}$.

يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = ٢ لأنه اقتران كثير حدود.

يكون الاقتران هـ(س) متصلاً عند س = ٢ لأن ....

(ق + هـ)(س) متصل عند س = ٢ لأن مجموع اقتراني كثيري حدود يساوي اقتران كثير حدود.

(ق − هـ)(س) متصل عند س = ٢ لأن ....

(ق × هـ)(س) متصل عند س = ٢ لأن ....

أناقش:

هل $\frac{ق}{هـ}$ متصل عند س = ٢، حيث هـ (س) ≠ ٠ ؟

قاعدة:

إذا كان ق (س)، هـ (س) اقترانين متصلين عند س = أ فإن:

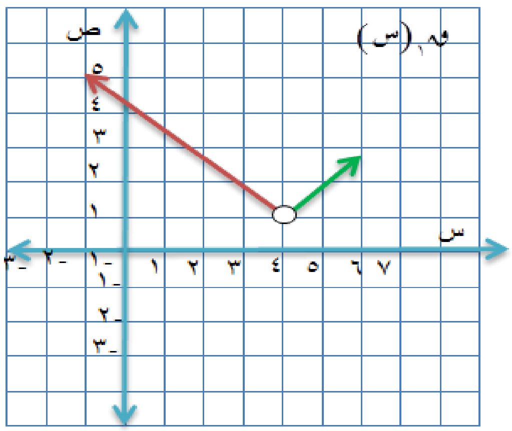
١. (ق ± هـ) (س) يكون متصلاً عند س = أ.

٢. (ق × هـ) (س) يكون متصلاً عند س = أ.

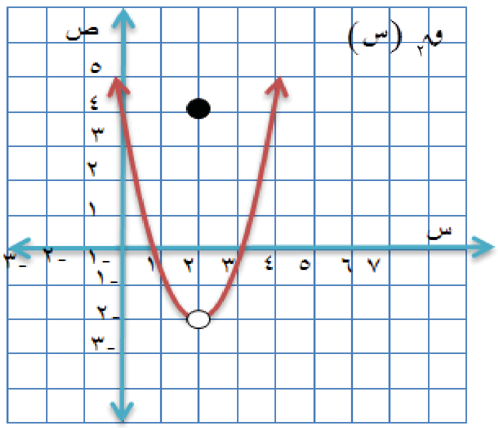
٣. $\frac{ق}{هـ}$ (س) يكون متصلاً عند س = أ حيث هـ (أ) ≠ صفر

تمارين ومسائل (٥-٥)

① أبيّن سبب عدم اتصال الاقترانات الآتية، عند النقطة المذكورة إزاء كل منها:



عند س = ٤



عند س = ٢

② أبحث اتصال الاقترانات الآتية، عند قيم س المشار لها في كل حالة:

أ- ق(س) = ٣س − ٦ . عند س = ١

ب- ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٢س}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ٧ & ، س = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

③ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣ - س & ، س < ١ \\ س^٢ + ١ & ، س \geq ١ \end{cases}$ أبحث اتصال الاقتران ق(س) ، عند س = ١

٥-٦ تمارين عامة

(١) أختار رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) ما قيمة نهـا$_{\text{س} \leftarrow ٢}$ (س^{٣} + ٢س^{٢} + ٦)؟

أ) -٦ ب) -٥ جـ) ٥ د) ٦

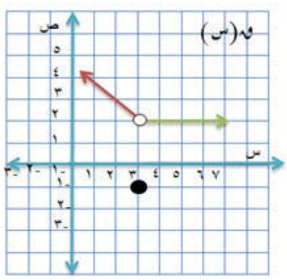
٢) إذا كان نهـا$_{\text{س} \leftarrow ٥}$ ٣ق(س) = ٣ ، نهـا$_{\text{س} \leftarrow ٥}$ هـ(س) = ٢ . ما قيمة نهـا$_{\text{س} \leftarrow ٥}$ ٢ق(س) + نهـا$_{\text{س} \leftarrow ٥}$ هـ^{٢}(س)؟

أ) ٣ ب) ٥ جـ) ٦ د) ٨

٣) ما قيمة نهـا$_{\text{س} \leftarrow ٦}$ $\frac{\text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ٦}$ ؟

أ) $\frac{١}{٦}$ ب) $\frac{١}{٧}$ جـ) $\frac{١}{٨}$ د) غير موجودة

٤) في الشكل المجاور، ما قيمة نهـا$_{\text{س} \leftarrow ٣}$ ق(س)؟



أ) ٢ ب) غير موجودة جـ) صفر د) ٣

٥) إذا كان نهـا$_{\text{س} \leftarrow \text{ﻡ}}$ (س^{٢} − ٣س) = -٢ ما قيمة الثابت ﻡ ؟

أ) ١، ٢ ب) -٢، -١ جـ) -١ د) ٢، -١

٦) إذا كان ق(س) = $\frac{٦\text{س}^{٤} + ٥\text{س}}{٣\text{س}^{٤} + \text{س} + ٤}$. ما قيمة نهـا$_{\text{س} \leftarrow \infty}$ ق(س)؟

أ) -٣ ب) ٢ ج) صفر د) ∞

٢ أجد النهايات الآتية:

أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢س}{س^{٢} - ٤} - \frac{س^{٢}}{س^{٢} - ٤} \right)$

ب) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{س}{س^{٢} - ٧س}$

ج) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

د) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$

٣ إذا كان $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{أس^{٣} + ٢ ب س^{٢} + ٩}{٤س^{٢} + ١} = ٨$ أجد قيمة كل من أ ، ب.

أقيّم ذاتي أعبر بلغتي كيف أوظف المفاهيم التي تعلمتها في هذه الوحدة في حياتي العملية.

فكرة ريادية

أوظّف ما تعلمته من مهارات في هذه الوحدة في تصميم دليل لزيارة البلدة القديمة في الخليل؛ لتساعد الزائرين للوصول للحرم الإبراهيمي، وتجاوز حواجز الاحتلال المحيطة به. موضحاً فيه نهاية كل شارع، بالإضافة إلى نقاط التقاطع والاتصال مع الشوارع الأخرى.

أناقش مع زملائي:

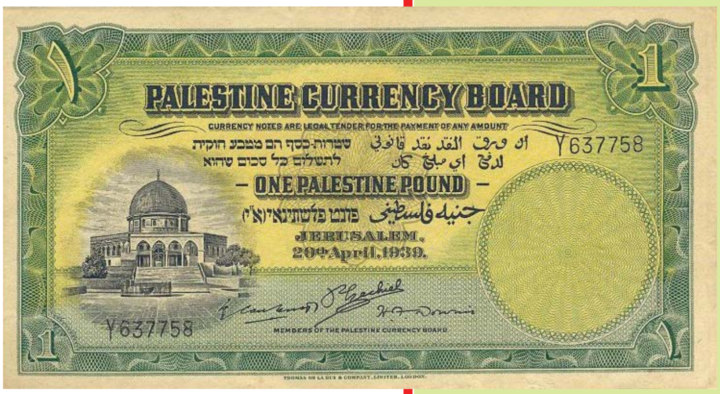
- النجاحات والآثار الإيجابية المترتبة على إصدار هذا الدليل: ....
....
- المخاطر التي يمكن أن تواجه إصدار هذا الدليل، من حيث:

المخاطر النفسية: ....

المخاطر الاجتماعية: ....

المخاطر المادية: ....

القرارات التي يمكن اتخاذها: ....



الوحدة السادسة

الرياضيّات الماليّة

كيف يمكنك أن تجمع وتوفر المال
لمستقبل أفضل؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الرياضيّات الماليّة في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ التعرف إلى مفهوم الدفعات، وكيفية حسابها.

٢ التعرف إلى مفهوم التقسيط، وحساباته.

٣ التعرف إلى الفائدة، وحسابها.

٤ التعرف إلى مفهوم المخاطرة، وأنواعها.

٥ أن يقيس الطالب مخاطر الاستثمار.

٦-١ الدفعات (Payments)

نشاط (١)

تعمل سارة مهندسةً للديكور في مدينة رام الله، وتسكن في إحدى قرى محافظة سلفيت. بدأت تعاني من أعباء السفر اليوميّ بعد مرور عام على عملها. فكرت سارة بشراء بيت في رام الله، و لكن دخلها الشهري غير كافٍ لشراء البيت.

- أقترح حلاً لمشكلة سارة، وأناقشه مع مجموعة من زملائي:

....

الدفعة: هي مجموعة من المبالغ المتساوية تستحق في فترات متساوية.

و ستقتصر دراستنا في هذه الوحدة على الدفعات الدوريّة المنتظمة، حيث تقسم إلى:

أ. الدفعات الدوريّة العاديّة: حيث يكون موعد الدفعة في نهاية كل فترة، كما يظهر في الشكل الزمني الآتي:

صفر	١	٢	٣
-	الدفعة	الدفعة (٢)	الدفعة (٣)

ففي الفترة الأولى، والتي تبدأ من نقطة الصفر، وهي تعبر عن الزمن الحاضر، وتنتهي عند النقطة (١) التي تعبر عن نهاية الفترة الأولى وبداية الفترة الثانية، أجد أن الدفعة الأولى تمت في نهاية الفترة الأولى، و كذلك بالنسبة للدفعة الثانية، والثالثة.

ب. الدفعات الدوريّة الفوريّة (المقدمة).

حيث موعد الدفعة هو بداية كل فترة، كما يظهر في الشكل الآتي:

صفر	١	٢	٣
الدفعة (١)	الدفعة (٢)	الدفعة (٣)	-

ألاحظ أن الدفعة الأولى قد حصلت في بداية الفترة الأولى، وكذلك الدفعة الثانية، والثالثة.

تمارين ومسائل (٦-١)

١ أضع إشارة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وإشارة (✗) أمام العبارة الخاطئة فيما يأتي:

أ) في الدفعات الدوريّة العاديّة يكون موعد الدفع في نهاية الفترة الزمنيّة. ( )

ب) إن عدد الدفعات الدوريّة الفوريّة، يقل بمقدارٍ واحدٍ عن عدد الدفعات الدوريّة العاديّة. ( )

ج) تسمى الدفعات التي تدفع في فترات زمنيّة غير متساوية بالدفعات المنتظمة. ( )

٢ أعرف الدفعة، وأذكر أنواعها.

٣ أوضح أنواع الدفعات الدوريّة المنتظمة؟

٦-٢ القيمة المستقبلية للدفعات المنتظمة (Future Value of Annuity)

سوف نتعلم في هذا البند، حساب القيمة المستقبلية للدفعات المنتظمة العاديّة والفوريّة.

أولاً: القيمة المستقبلية لدفعات دوريّة عاديّة.

نشاط (١)

ضمن منافسة البنوك على استقطاب الزبائن، شاهدت يارا إعلاناً في تلفزيون فلسطين، يتحدث عن برنامج للتوفير يعرضه أحد البنوك الفلسطينية، بحيث يقدم ١٢٪ من قيمة مبلغ التوفير سنوياً. إذا ادخرت يارا مبلغاً من المال قيمته ٢٠٠ دينار فإن:

- ما ستقبضه يارا بعد عام، هو ٢٠٠ + ٢٠٠ × ٠,١٢ = ٢٠٠ + ٢٤ = ٢٢٤ ديناراً.
- ما ستقبضه يارا بعد عامين، هو ....
- ما ستقبضه يارا بعد ثلاثة أعوام، هو ....

تعريف: القيمة المستقبليّة لدفعات دوريّة عاديّة: هي جملة مجموعة من الدفعات قيمة كل منها (د) وعددها (ن) تدفع في نهاية كل فترة زمنية معينة، محسوبة على أساس معدل فائدة معين (ع) . تسمى جملة الدفعات العادية، ويرمز لها بالرمز (ج د ع). و يمكن حسابها باستخدام العلاقة:

$$ج\ د\ ع = د \times \left[\frac{(ع + ١)^{ن} - ١}{ع} \right] \quad .... (١)$$

مثال (١): يدفع فراس ثمن مكيف كهربائي ٢٠٠ دينار دفعةً دوريّةً عاديّةً سنويّةً بمعدل فائدة ١٠٪، أحسب جملة ما دفعه فراس في نهاية السنة الثالثة.

الحل:

جملة الدفعة الأولى = ٢٠٠ × (١ + ١٠) × (١ + ١٠) = ٢٤٢ ديناراً .

= ٢٠٠ × (١ + ١٠٪)^{٢} = ٢٤٢ ديناراً.

جملة الدفعة الثانية = ٢٠٠ × (١ + ١٠٪) = ٢٢٠ ديناراً .

جملة الدفعة الثالثة =٢٠٠ دينار، حيث لم يمر على هذه الدفعة أي فترة زمنية.

وبذلك يكون جملة الدفعات الثلاث = ٢٤٢ + ٢٢٠ + ٢٠٠ = ٦٦٢ ديناراً.

ملاحظة:

يجب أن يكون معدل الفائدة (ع) محسوباً عن نفس الوحدة الزمنية الفاصلة بين الفترات. أي إذا كانت الدفعات شهرية، ومعدل الفائدة سنوياً، يجب قسمة معدل الفائدة على ١٢.

مثال (٢): يودع سعيد مبلغ ٢٥٠ ديناراً نهاية كل شهر في حساب توفير، بمعدل فائدة ٦٪ سنوياً.
أحسب:

١) جملة توفير سعيد في نهاية السنة الخامسة.

٢) أجد قيمة الفوائد التي حصل عليها سعيد عن المدة كلها.

الحل:

١) الفائدة الشهريّة = ٠,٠٦ ÷ ١٢ = ٠,٠٠٥

جملة توفير سعيد في نهاية السنة الخامسة هي ج دع = ٢٥٠ × $\dfrac{\left(١ + \dfrac{٥}{١٠٠٠}\right)^{٦٠} - ١}{\dfrac{٥}{١٠٠٠}}$ = ١٢٦٢,٥٦ ديناراً.

٢) قيمة الفوائد = جملة الدفعات − مجموع الدفعات.

= ١٢٦٢,٥٦ − ١٢٥٠ = ١٢,٥٦ ديناراً.

ثانياً: القيمة المستقبلية لدفعات دوريّة فوريّة.

هنا تدفع الدفعات في بداية الفترة الزمنيّة، ويمكنني أن أتعرف عليها من خلال الرسم التوضيحي الآتي:

الزمن	صفر	١	٢	....	ن − ٢	ن − ١	ن
الدفعة	د	د	د		د	د	-
الجملة							ج د ف

حيث (ج د ف) ترمز لجملة الدفعات الفوريّة.

ألاحظ أن الفرق بين جملة الدفعات الفوريّة وجملة الدفعات العاديّة، هو وجود فترة زمنيّة إضافيّة، تحسب عنها الفوائد في حالة الدفعات الفوريّة.

أي أن ج د ف = ج د ع × (١ + ع).

ج د ف = د × $\left[\dfrac{(١ + ع)^{ن} - ١}{ع}\right]$ × (١ + ع) .... (٢)

نشاط (٢)

أعلنت شركة صرافة عن برنامج للاستثمار، بحيث يدفع المشترك في بداية كل سنة مبلغ ٢٠٠٠ دينار. على أن تعطيه الشركة ١٢٪ فائدة سنوية، ستكون جملة دفعاته في نهاية السنة الرابعة، كما يأتي:

- جملة الدفعة الأولى:

$$= ٢٠٠٠ \times (١+٠,١٢) \times (١+٠,١٢) \times (١+٠,١٢) \times (١+٠,١٢)$$

$$= ٢٠٠٠ \times (١+٠,١٢)^{٤} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- جملة الدفعة الثانية = ________________
- جملة الدفعة الثالثة = ________________
- جملة الدفعة الرابعة = ________________
- جملة الدفعة الخامسة = ٢٠٠٠ دينار. (لماذا ؟)

مثال (٣): أجد جملة الدفعات في نهاية السنة الرابعة في النشاط السابق، باستخدام العلاقة (١) ، ثم أحسب الأرباح؟

الحل:

$$\text{ج د ف} = ٢٠٠٠ \times \frac{((١ + ١٢\%)^{٤} - ١)}{١٢\%} \times (١ + ١٢\%)$$

$$= ٩٥٥٨,٦٥٦ \times ١,١٢ = ١٠٧٠٥,٦٩٤ \text{ دنانير.}$$

الأرباح = ج د ف − مجموع الدفعات بدون فوائد

$$= ١٠٧٠٥,٦٩٤ - ٨٠٠٠ = ٢٧٠٥,٦٩٤ \text{ دنانير.}$$

مثال (٤): إذا كان مطلوباً من جميل ٢٥٠٠٠ دينار بعد ٥ سنوات، ليتمكن من شراء بيت في بيت لحم، فكم يجب عليه أن يدفع لشركة عقارات في بداية كل شهر إذا كان معدل الفائدة ١٢٪ سنوياً ؟

الحل:

$$٢٥٠٠٠ = \text{د} \times \frac{((١ + ١\%)^{٦٠} - ١)}{١\%} \times (١ + ١\%)$$

$$٢٥٠٠٠ = \text{د} \times ٨٢,٤٨٦٣$$

$$\text{د} = \frac{٢٥٠٠٠}{٨٢,٤٨٦٣} = ٣٠٣,٠٨ \text{ دنانير.}$$

تمارين ومسائل (٢-٦)

١ يودع شخص مبلغ ١٦٠٠ دينار نهاية كل عام في حساب توفير، بفائدة سنويّة ٦٪. كم ستكون جملة توفيراته في نهاية السنة الثامنة؟

٢ أجد جملة دفعة سنوية مبلغها ٢٠٠٠٠ دينار، وعدد مبالغها ١٠ بمعدل فائدة ٨٪ سنوياً، إذا كانت الدفعة:

أ) عاديّة ب) فوريّة.

٣ وضع أبو داود خطة مستقبلية لتعليم أبنائه في الجامعة بعد ١٠ سنوات. و كانت خطته هي توفير ٢٠٠٠٠ دينار. فاستثمر أموالاً بفائدة ١٢٪ سنوياً في إحدى الشركات. فكم يجب أن يستثمر في نهاية كل عام ليتمكن من توفير المبلغ؟

٦-٣ القيمة الحالية للدفعات المنتظمة (Present Value of Annuity)

و سنتعلم في هذا البند حساب:

١) القيمة الحالية لدفعات دوريّة عاديّة. ٢) القيمة الحالية لدفعات دوريّة فوريّة.

أولاً: القيمة الحالية لدفعات دوريّة عاديّة:

وهي القيمة الحالية لمجموعة من الدفعات قيمة كل منها (د) و عددها (ن)، تدفع في نهاية كل فترة زمنية، محسوبة على أساس معدل خصم معين (ع) . ويرمز له بالرمز (ق ح ع)، حيث:

$$\text{ق ح ع} = \text{د} \times \left[\frac{1 - \dfrac{1}{(1 + \text{ع})^{\text{ن}}}}{\text{ع}} \right] \quad \text{.............................. (1)}$$

نشاط (١)

في برنامج لتسديد ثمن هاتف نقّال على ثلاث دفعاتٍ، قيمة كل منها ١٥٠ ديناراً، بمعدل خصم ٤. أرادت مريم حساب القيمة الحالية للدفعات الثلاث و مقدار الخصم، وذلك للاشتراك في البرنامج.

- باستخدام العلاقة (١) فإن $\text{ق ح ع} = 150 \left[\frac{1 - \left(\dfrac{1}{(1{,}04)^{3}}\right)}{0{,}04} \right] = 416{,}26$ ديناراً.

- مبلغ الخصم، هو ....

نشاط (٢)

لأربع دفعات عاديّة سنويّة قيمة كل منها ٢٠٠ دينار، بفائدة سنوية ٥٪ هي ....
....

ملاحظة: يجب أن يكون معدل الخصم ع من نفس الفترة الزمنية الفاصلة بين الدفعات.

ثانياً: القيمة الحالية لدفعات دوريّة فوريّة (ق ح ف):

هي القيمة الحالية لمجموعة من الدفعات قيمة كل منها (د) و عددها (ن) تدفع في بداية كل فترة زمنية، محسوبة بمعدل خصم (ع) ويرمز لها بالرمز (ق ح ف).

وهي تختلف عن القيمة الحالية للدفعات العاديّة، في أن الدفعات العاديّة تخصم لفترة إضافيّة أكثر من الدفعات الفوريّة.

أي أن $(\text{ق ح ع}) = (\text{ق ح ف}) \times \left[\dfrac{١}{١ + \text{ع}}\right]$

و منها $\text{ق ح ف} = \text{ق ح ع} \times (١ + \text{ع})$

و بتعويض قيمة ق ح ع من المعادلة السابقة، أجد أن:

$$\text{ق ح ف} = \text{د} \times \left[\dfrac{١ - \dfrac{١}{(١ + \text{ع})^{\text{ن}}}}{\text{ع}}\right] (١ + \text{ع}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢)$$

• معدل الفائدة و معدل الخصم نفس المعنى.

نشاط (١)

يريد أبو محمود أن يدفع أجرة سكن بناته في جامعة بير زيت عن أربع سنوات دفعةً واحدةً. فإذا كانت الأجرة السنويّة تدفع بداية كل سنة، و قيمتها ٢٥٠٠ دينار ، و أن معدل الفائدة هو ١٠٪ .

١) فإنه يجب على أبو محمود أن يدفع أجرة السكن:

$$\text{ق ح ف} = ٢٥٠٠ \times \dfrac{١ - \dfrac{١}{(١ + ١٠\%)^{٤}}}{١٠\%} \times (١ + ٠,١٠)$$

$= ٧٩٢٤,٦٦ \times ١,٠٨ = ٨٥٥٨,٦٣٦$ ديناراً.

٢) مبلغ الخصم، هو ....

تمارين ومسائل (٦-٣)

١) أجد القيمة الحالية لدفعة مبلغها ١٠٠٠٠ دينار، وبفائدة معدلها ٦٪ سنوياً، وعدد مبالغها ١٨. إذا كانت الدفعة:

أ - فوريّة   ب- عاديّة.

٢) أجد القيمة الحالية لدفعات فوريّة شهريّة، قيمة كل منها ١٣٠ ديناراً لفترة ٥ سنوات بمعدل فائدة ٨٪.

٣) أجد مبلغ الخصم على ٥ دفعات عاديّة قيمة كل منها ١٠٠ دينار بمعدل خصم ٢٪.

٦-٤ التقسيط (Installment)

نشاط (١)

تقدم شركات بيع الأجهزة الكهربائيّة والأدوات المنزليّة عروضاً للبيع بالتقسيط بمناسبة عيد الأم. أجمع بعض عروض هذه الشركات، و أسجل شروط كل عرض. (قد تساعدني مواقع التواصل الاجتماعي، والمجلات، والصحف الفلسطينية في جمع الإعلانات).

- أكتب بلغتي الخاصة تعريفاً للتقسيط ....

- أعرض لزملائي إعلاناً للبيع بالتقسيط، ثم أسجل:

١) ثمن السلعة .... ٢) قيمة القسط ....

٣) سعر الفائدة .... ٤) مدة التقسيط ....

التقسيط: هو بيع يُعَجَّل فيه المبيع (السلعة) ويتأجل فيه الثمن كلُّه، أو بعضُه، على أقساطٍ معلومةٍ لآجالٍ معلومةٍ.

و يعتمد حساب التقسيط على:

١) قيمة السلعة. ٢) نسبة الدفعة، أو قيمتها(الدفعة المقدمة).

٣) نسبة الفائدة. ٤) عدد السنوات التي سوف يدفع فيها القسط.

مثال (١): تعرض شركة للأجهزة الكهربائية ثلاجة بقيمة ٢٠٠٠ دينار. فإذا كانت تريد ٥٠٪ من قيمة الثلاجة دفعة مقدمة، وباقي ثمن الثلاجة على عشرة أقساط شهريّة بفائدة ١٠٪ .

أحسب:

١) قيمة الدفعة الأولى. ٢) قيمة القسط الشهريّ.

الحل:

١) قيمة الدفعة الأولى = ٢٠٠٠ × ٠,٥٠ = ١٠٠٠ دينار.

٢) لحساب القسط الشهريّ، أحسب:

المبلغ المتبقي للدفع بالإضافة إلى فوائده = ١٠٠٠ + ١٠٠٠ ×١٠٪ = ١١٠٠ دينار.

و بذلك يكون القسط الشهري = ١١٠٠ ÷ ١٠ = ١١٠ دنانير.

تمارين ومسائل (٦-٤)

١ ترغب جمعيةٌ نسائيةٌ شراء ٢٥ حاسوباً محمولاً لإنشاء مختبر حاسوب. إذا تلقت الجمعية عرضاً من إحدى الشركات المزوِّدة، كما يأتي:

ثمن الجهاز ١٢٠٠ دينار، وتريد ١٥٪ من ثمن الأجهزة دفعةً أولى، على أن تدفع الجمعية باقي المبلغ على أقساط شهريّة لمدة ثلاث سنوات، بفائدة ٦٪، ما قيمة القسط الشهري؟

٢ أعلنت شركة مواصلات في بيت لحم عن نيتّها بيع حافلة نقل عمومي بخط سير بيت لحم – رام الله، حسب الشروط الآتية:

ثمن الحافلة ٨٠٠٠٠ دينار، وتريد ٣٠٪ من قيمة الحافلة دفعةً أولى، ويتم تقسيط باقي الثمن على أربعة أقساط سنويّة بفائدة ١٢٪. ما قيمة القسط السنويّ؟

٦-٥ الفائدة (Interest)

نشاط (١)

مرح طالبة في الصف الثامن الأساسي في مدرسة فاطمة الزهراء، ربحت مرح مبلغاً من المال؛ لحصولها على المركز الأول في مسابقةٍ على مستوى مدارس فلسطين. قررت مرح استثمار المبلغ إلى أن تدخل الجامعة، وبذلك تسهم في تأمين دراستها الجامعية.

- أناقش مع زملائي، كيف يمكن لمرح استثمار مبلغ الجائزة؟

....

- إذا ادخرت مرح مبلغ ١٠٠ دينار في أحد البنوك بفائدة سنوية ٧٪ فإن المبلغ في نهاية السنة الأولى، سيصبح ....

تعريف:

الفائدة: العائد الذي نحصل عليه نتيجة استثمار مبلغ من المال لفترة زمنية محددة وفقاً لمعدل معين. وهي نوعان: الفائدة البسيطة، والفائدة المركبة.

أولاً: الفائدة البسيطة

نشاط (٢)

قامت شركة فلسطينية للاتصالات باستثمار مبلغ ٨٠٠٠٠٠ دينار في أحد المشاريع لمدة ٣ سنوات بمعدل فائدة بسيطة ٦٪ .

- مبلغ الفائدة في السنة الأولى = ٨٠٠٠٠٠ × ٠,٠٦ = ٤٨٠٠٠ دينار.
- مبلغ الفائدة في السنة الثانية = ...
- مبلغ الفائدة في السنة الثالثة = ...
- إجمالي الفائدة = ...

تسمى الفائدة في هذه الحالة بالفائدة البسيطة.

تعريف:

الفائدة البسيطة: هي فائدة تُحسب على أصل مبلغ الاستثمار. هذه الفائدة تظل ثابتةً طوال مدة الاستثمار، بفرض ثبات قيمة المبلغ المستثمر طوال فترة الاستثمار. ويمكن حسابها باستخدام القاعدة: مبلغ الفائدة البسيطة = مبلغ الاستثمار × معدل الفائدة × المدة الزمنية... (١)

مثال (١):

أودعت وداد مبلغاً من المال في أحد البنوك الفلسطينية، بفائدة سنويّة بسيطة ٥,٥٪ لمدة ١٢ سنة، إذا كان مبلغ الفائدة الذي حصلت عليه وداد في نهاية المدة ١١٨٨٠ ديناراً، أحسب المبلغ المودع؟

الحل:

باستخدام العلاقة (١) يكون مبلغ الفائدة البسيطة = المبلغ الأصلي × نسبة الفائدة × المدة الزمنية.

١١٨٨٠ = المبلغ الأصلي × ٥,٥٪ × ١٢

١١٨٨٠ = المبلغ الأصلي × ٠,٦٦ (بالقسمة على ٠,٦٦)

١١٨٨٠ ÷ ٠,٦٦ = المبلغ الأصلي

١٨٠٠٠ دينار = المبلغ الأصلي (المبلغ المودع).

ثانياً: الفائدة المركبة

نشاط (٣)

أرادت رهام أن تستثمر مبلغاً من المال في أحد البنوك بفائدةٍ معينةٍ، على أن تضيف مبلغ الفائدة على المبلغ المودع في كل عام؛ حتى تحصل على ربحٍ أكبر.

- إذا أودعت ١٠٠ دينار بفائدة سنوية ٨٪ ، تحصل على مبلغ فائدة.......... في نهاية العام الأول.
- إذا أبقت رهام مبلغ الفائدة في البنك يصبح المبلغ المودَع ....
- في العام الثاني ستتقاضى رهام فائدةً على المبلغ الجديد هي ....

تسمى الفائدة بهذه الطريقة الفائدة المركبة.

تعريف:

الفائدة المركبة: هي فائدة تُحسب على أصل المبلغ، مُضافاً إليه قيمة فائدة الفترة السابقة؛ وبالتالي فإن قيمة الفائدة تتغير في كل فترة من فترات الاستثمار. ويمكن حسابها باستخدام العلاقة:

الفائدة المركبة = المبلغ × ((١ + معدل الفائدة)$^{\text{المدة}}$ − ١) .... (٢)

و بالرموز ف = م × ((١ + ع)$^{\text{ن}}$ − ١)

نشاط (٤)

قامت شركة فلسطينية للاتصالات باستثمار مبلغ ٨٠٠٠٠٠ دينار في أحد المشاريع لمدة ٣سنوات، بمعدل فائدة مركبة ٦٪. أحسب إجمالي الفائدة التي ستحصل عليها الشركة من هذا الاستثمار.

فائدة الاستثمار = مبلغ الاستثمار معدل الفائدة × ١

(ألاحظ أن الفائدة السنوية تعني أن الفترة الزمنية هي ١)

فائدة الاستثمار للعام الأول = ٨٠٠٠٠٠ × ٦٪ = ٤٨٠٠٠ دينار.

و هي تساوي أيضاً ٨٠٠٠٠٠ [(١ + ٠,٠٦)^{١} − ١ (أتحقق)

فائدة الاستثمار للعام الثاني = (٨٠٠٠٠٠ + ٤٨٠٠٠) × ٦٪ = ٥٠٨٨٠ ديناراً

و هي تساوي أيضاً ٨٠٠٠٠٠ [(١ + ٠,٠٦)^{٢} − ١ (أتحقق)

- فائدة الاستثمار للعام الثالث = ...

و هي تساوي أيضاً ....

- إجمالي الفائدة المركبة = ...

و يمكننا حساب إجمالي الفائدة المركبة خلال فترة الاستثمار باستخدام العلاقة (٢)

فائدة الاستثمار = ٨٠٠٠٠٠ × ((١+ ٠,٠٦)^{٣} − ١)

فائدة الاستثمار = ١٥٢٨١٢,٨٠ ديناراً.

أناقش:

إذا كنت سأستثمر مبلغاً من المال لفترة زمنية محددة، هل سأستثمره بفائدة بسيطة أم مركبة؟

ملاحظات عند حساب الفائدة البسيطة، أو المركبة:

١. معدل الفائدة قد يكون سنويّاً، أو نصف سنويّ، أو ربع سنويّ، وقد يكون شهريّاً، وقد يكون أقل من ذلك (بالأيام، بالساعات، ......).

٢. في بعض الحالات، يتم ذكر معدل الفائدة ١٢٪ ولا يتم ذكر هل هذه الفائدة سنوية/ نصف سنوية؟ حينها نعمل على أساس أن المعدل سنويّ.

مثال (٢): قامت جمعية للزيت في فلسطين باستثمار مبلغ (٥٠٠٠٠٠) دينار لمدة ٣ شهور، بمعدل سنويّ بسيط ٨٪. فما الفائدة التي تحصل عليها الجمعية؟

الحل:

الفائدة = ٥٠٠٠٠٠ × ٨٪ × (٣ ÷ ١٢ تحويل فترة الاستثمار إلى سنوات) = ١٠٠٠٠ دينار.

تمارين و مسائل (٦-٥)

١ قامت جمعية الأسرة السعيدة باستثمار مبلغ ٤٠٠٠٠ دينار لمدة عامين، بمعدل نصف سنوي بسيط ٤٪. فما الفائدة التي تحصل عليها هذه الجمعية؟

٢ إذا كانت الفائدة التي ربحتها شركة للمواد الغذائية في مدينة الخليل ٢٥٠٠٠ دينار في ٦سنوات، بمعدل فائدة بسيطة ٥٪، فما مبلغ الاستثمار؟

٣ أقارن بين الفائدة البسيطة والفائدة المركبة، التي يحصل عليها شخص استثمر ١٠٠٠٠ دولار لمدة ٤ سنوات، بمعدل فائدة ٨٪.

٦-٦ المخاطرة (Risk)

نشاط (١)

أرادت جمعية أسر شهداء مجزرة الحرم الإبراهيمي استثمار مبلغ من المال في أحد المشاريع. فأخذت تبحث في الاستثمار في المشاريع الصغيرة، وعن نسبة نجاحها، وعن التحديات التي تحول دون الحصول على العوائد المرجوّة. فوجدت أنه لا بد من الأخذ بعين الاعتبار المخاطر التي يمكن أن يتعرض لها الاستثمار.

- من المخاطر ما يتعلق بالوضع السياسي، كأن تمنع سلطات الاحتلال دخول المواد الخام الضرورية لنمو المشروع من إسمنت و غيره من مواد البناء، كما هو الحال في قطاع غزة.

أبحث مع مجموعة من زملائي عن تحديات أخرى، يمكن أن تعرض الاستثمار للخسارة. و أناقشها، وأقترح حلولاً لها.

تعريف المخاطرة:
احتمالية تأثير الحوادث المتوقعة وغير المتوقعة تأثيرا عكسياً على رأس مال الاستثمار، أو على عوائده.

و تقسم المخاطر إلى قسمين: المخاطر المنتظمة، والمخاطر غير المنتظمة.

أ. المخاطرة المنتظمة:

هي ذلك الجزء من المخاطرة الذي تسببه عناصر تؤثر على السوق ككل، وبالتالي لا يمكن التخلص منه من خلال المعالجة، لأنه يؤثر على كل الشركات في نفس الوقت. ومن هذه العناصر: التضخم، وأسعار الفائدة، والسياسات المالية والنقدية، ووجود كوارث طبيعية، وعدم الاستقرار السياسي، وتأثير الاحتلال كما في فلسطين.

ب. المخاطرة غير المنتظمة:

المخاطرة التي تسببها عناصر خاصة بالشركة، وبالتالي يمكن التخفيض من حدّتها من خلال المعالجة، لأن أي تأثيرات سلبية على شركة، قد تقابلها تأثيرات إيجابية على شركة أخرى. ومن هذه العناصر: إضرابات العمال ، وسوء إدارة الشركة، وارتفاع مستوى الديون.

نشاط (٢)

من مخاطر الاستثمار في مجال الزراعة في فلسطين:

- المخاطر السياسية، وتأثير الاحتلال الإسرائيلي من النواحي الآتية:

• الحاجة إلى المياه، حيث تمنع السلطات الإسرائيلية البحث عن المياه الجوفية في السهول الزراعية، وهنا يلجأ المزارع الفلسطيني إلى الاعتماد على مياه الأمطار بحفر الآبار الزراعية و البرك، وغير ذلك من الحلول المؤقتة والمحدودة، وبالتالي لا يحصل المزارع على العوائد المتوقعة من الإنتاج.

أناقش مع مجموعة من زملائي:

- المخاطر المالية ....

- المخاطر النفسية ....

- المخاطر الاجتماعية ....

و لحساب المخاطر، والحكم على عوائد الاستثمار، يمكننا التعريج على مصطلحات من علم الإحصاء، مثل: التباين، والانحراف المعياري. فكلما قلّت قيمة الانحراف المعياري انخفضت درجة خطورة المشروع، والعكس صحيح.

ويتم قياس المخاطر والحكم عليها بعد حساب العائد المتوقع للاستثمار

العائد المتوقع للاستثمار = $\sum$ (العائد المحتمل × احتمال حدوثه)

حيث العائد المحتمل يمثل العائد المتوقع في الحالة الاقتصادية المشار إليها.

مثال (١): فيما يأتي جدول للوضع الاقتصادي للعوائد المحتمل حدوثها من استثمار ١٠٠ ألف دينار في أحد المشروعات.

الحالة الإقتصادية	العائد المحتمل	احتمال حدوثها
كساد (تراجع)	٢٠٪ -	٠,٢٠
عادية	١٥٪	٠,٣٠
نمو	٢٥٪	٠,٤٠

ما العائد المتوقع لهذا المشروع ؟

الحل:

∑ (احتمال حدوثه) × (العائد المحتمل) = العائد المتوقع

= ((-٢٠ × ٠,٢٠) + (١٥٪ × ٠,٣٠) + (٢٥٪ × ٠,٤٠))

= -٤٪ + ٤,٥٪ + ١٠٪

= ١٠,٥٪

و عند حساب التباين للعائد المتوقع كان التباين =

∑ (احتمال حدوث الحالة الاقتصادية × (العائد المحتمل للحالة – العائد المتوقع)^{2}.

= ٠,٢ × (-٠,٢٠ – ٠,١٠٥)^{2} + ٠,٣٠ × (٠,١٥ – ٠,١٠٥)^{2} + ٠,٤٠ × (٠,٢٥ – ٠,١٠٥)^{2}.

= ٠,٠٢١٧٧

= ٢,١٧٧ (لماذا؟)

و بحساب الانحراف المعياري، وهو الجذر التربيعي للتباين يكون:

الانحراف المعياري = ٠,١٤٧٥

و للمفاضلة بين الاستثمار في شركتين أحسب الانحراف المعياري للشركتين بنفس الطريقة، وأستثمر في الشركة ذات الانحراف المعياري الأقل.

و يمكن أيضاً الحكم على مخاطر الاستثمار من خلال حساب معامل الاختلاف ويحسب معامل الاختلاف عن طريق قسمة الانحراف المعياري على الوسط الحسابي (القيمة المتوقعة) حسب المعادلة:

معامل الاختلاف = الانحراف المعياري ÷ العائد المتوقع

مثال (٢): في المثال السابق، أحسب معامل الاختلاف.

الحل:

معامل الاختلاف = الانحراف المعياري ÷ العائد المتوقع

= ٠,١٤٧٥ ÷ ٠,١٠٥ = ١,٤٠٤٧

و القاعدة العامة، هي: كلما كان معامل الاختلاف أقل للخيار الاستثماري يكون أفضل. أي أختار الخيار الاستثماري الذي معامل اختلافه أقل.

تمارين ومسائل (٦-٦)

(١) ما المخاطرة في الاستثمار؟ وما طرق قياسها؟

(٢) قرر جابر استثمار مبلغ ٨٠٠٠ دينار في إحدى الشركتين الآتيتين: الشركة (أ)، و الشركة (ب)، و الجدول الآتي يبين توزيعات الاحتمالات لمعدلات العوائد لكلا الشركتين:

الوضع الإقتصادي	احتمال حدوث الوضع الإقتصادي	الشركة (أ)	الشركة (ب)
نمو	٠,٢	٪١٠٠	٠,١٥
عادي	٠,٦	٪٢٥	٠,٢٠
تراجع	٠,٢	٪٥٠	٠,١٠

أحسب:

(١) العائد المتوقع لكل شركة.

(٢) تباين عوائد الشركتين.

(٣) معامل الاختلاف للشركتين.

(٤) في أي الشركتين أنصح جابراً أن يستثمر نقوده؟ ولماذا؟

٦-٧ تمارين عامة

١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) في الدفعات الدوريّة العاديّة، متى يكون موعد الدفع ؟

أ) بداية الفترة الزمنيّة   ب) في منتصف الفترة الزمنيّة

جـ) في نهاية الفترة الزمنيّة   د) في أي وقت خلال الفترة.

٢) اشترى عمر شقةً سكنيةً بمبلغ ٨٠٠٠٠ دينار، إذا دفع ما قيمته ٢٠٪ من المبلغ دفعةً أولى، كم تبلغ الدفعة الأولى ؟

أ) ١٦٠٠ دينار   ب) ١٦٠٠٠ دينار   جـ) ٨٠٠٠ دينار   د) ٨٠٠٠٠ دينار

٣) أودعت رماح مبلغ ١٠٠٠٠ دينار في بنك بفائدة بسيطة ٨٪. ما جملة ما ستقبضه رماح بعد سنتين؟

أ) ١٦٠٠ دينار   ب) ١١٦٠٠ دينار   جـ) ١٠٦٠٠ دينار   د) ١٨٠٠٠ دينار

٤) أي العناصر الآتية هي من عناصر المخاطرة غير المنتظمة؟

أ) التضخم   ب) تذبذب أسعار الفائدة   ج) إضراب العمال   د) السياسات الماليّة والنقديّة

٥) الانحراف المعياري لعوائد الاستثمار في أربع شركات كما يأتي. أي الشركات الأربع الآتية تكون مخاطر الاستثمار فيها أكبر ؟

أ) ٠,٢٥   ب) ٠,٠٢٥   جـ) ٠,٠٠٥٢   د) ٠,٠٠٢٥

٢ ذهب كريم لمعرض لتجارة السيارات في مدينة جنين لشراء سيارة بالتقسيط لمدة ٥ سنوات. إذا كان سعر السيارة ٩٠٠٠ دينار والدفعة المقدمة ٢٠٪ من سعر السيارة، ونسبة الفائدة ٥,٥٪. أحسب:

١- القسط الشهريّ.   ٢- كم سيدفع كريم قيمة السيارة؟

٣ يريد خليل أن يستثمر أمواله في فلسطين، وكان أمامه شركتان للاستثمار، هما: الشركة (س) والشركة (ص). إذا كان العائد الذي سوف يحققه خليل من الاستثمار في أي شركة مرتبطاً في الوضع الاقتصادي الذي سيسود خلال فترة الاستثمار، و قد توقع محللون اقتصاديون احتمالات الوضع الاقتصادي، و العائد الذي سيتحقق في كل حالة كالآتي:

الوضع الإقتصادي	احتمال تحقق	العائد على الإستثمار في حالة تحقق هذا الوضع	
		الشركة (س)	الشركة (ص)
نمو	٪٣٠	٪٧٠	٪٢٥
عادي	٪٤٠	٪٢٠	٪٢٠
تراجع	٪٣٠	-٪٣٠	٪١٥

أحسب العائد المتوقع لكل من الشركتين؟ و أبين متى تكون المخاطرة أكبر؟

أقيّم ذاتي أعبر بلغتي عن المفاهيم الاكثر اثارة التي تعلمتها في هذه الوحدة بما لا يزيد عن اربعة اسطر.

فكرة ريادية:

تعتبر صادرات التوت الأرضي (الفراولة) من أهم صادرات دولة فلسطين للدول الأوروبية، فإذا أردت أن أستثمر أموالي في زراعة هذه الفاكهة وتصديرها، أدرس هذه الفكرة من حيث :

* النجاحات الممكنة: ....

....

* المخاطر من حيث:

- المخاطر المالية ....
- المخاطر النفسية ....
- المخاطر الاجتماعية ....
- المخاطر السياسية، وتأثير الاحتلال ....

* اتخاذ القرار: ....

....

جدول الأرقام العشوائية

Line \ Col.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
1	10460	15011	01536	02011	81647	91646	69179	14194	62590	36207	20969	99570	91291	90700
2	22368	46573	25595	85393	30995	89198	27982	53402	93965	34095	52666	19174	39615	99505
3	24130	48360	22527	97265	76393	64809	15179	24830	49340	32081	30680	19655	63348	58629
4	42167	93093	06243	61680	07856	16376	39440	53537	71341	57004	00849	74917	97758	16379
5	37570	39975	81837	16656	06121	91782	60468	81305	49684	60672	14110	06927	01263	54613
6	77921	06907	11008	42751	27756	53498	18602	70659	90655	15053	21916	81825	44394	42880
7	99562	72905	56420	69994	98872	31016	71194	18738	44013	48840	63213	21069	10634	12952
8	96301	91977	05463	07972	18876	20922	94595	56869	69014	60045	18425	84903	42508	32307
9	89579	14342	63661	10281	17453	18103	57740	84378	25331	12566	58678	44947	05585	56941
10	85475	36857	53342	53988	53060	59533	38867	62300	08158	17983	16439	11458	18593	64952
11	28918	69578	88231	33276	70997	79936	56865	05859	90106	31595	01547	85590	91610	78188
12	63553	40961	48235	03427	49626	69445	18663	72695	52180	20847	12234	90511	33703	90322
13	09429	93969	52636	92737	88974	33488	36320	17617	30015	08272	8411	27156	30613	74952
14	10365	61129	87529	85689	48237	52267	67689	93394	01511	26358	85104	20285	29975	89868
15	07119	97336	71048	08178	77233	13916	47564	81056	97735	85677	29372	74461	28551	90707
16	51085	12765	51821	51259	77452	16308	60756	92144	49442	53900	70960	63990	75601	40719
17	02368	21382	62404	60268	89368	19885	55322	44819	01188	65255	64835	44919	05944	55157
18	01011	54092	33362	94904	31273	04146	18594	29852	71585	85030	51132	01915	92747	64951
19	52162	53916	46369	58586	23216	14513	83149	98736	23495	64350	94738	17752	35156	35749
20	07056	97628	33787	09998	42698	06691	76988	13602	51851	46104	88916	19509	25625	58104
21	48663	91245	85826	14346	09172	30168	90229	04734	59193	22178	30421	61666	99904	32812
22	54164	58492	00421	74103	47070	25306	76468	26384	58151	06646	21524	15227	96909	44592
23	32639	32363	05597	24200	13363	38005	94342	28728	35806	06912	17012	64161	18296	22851
24	29334	27001	87637	87308	58731	00256	45834	15398	46557	41135	10367	07684	36188	18510
25	02488	33062	28834	07351	19731	92420	60952	61280	50001	67658	32586	86679	50720	94953
26	81525	72295	04839	96423	24878	82651	66566	14778	76797	14780	13300	87074	79666	95725
27	29676	20591	68086	26432	46901	20849	89768	81536	86645	12659	92259	57102	80428	25280
28	00742	57392	39064	66432	84673	40027	32832	61362	98947	96067	64760	64584	96096	98253
29	05366	04213	25669	26422	44407	44048	37937	63904	45766	66134	75470	66520	34693	90449
30	91921	26418	64117	94305	26776	25940	39972	22209	71500	64568	91402	42416	07844	69618
31	00582	04711	87917	77341	42206	35126	74087	99547	81817	42607	43808	76655	62028	76630
32	00725	69884	62797	56170	86324	88072	76222	36086	84637	93161	76038	65855	77919	88006
33	69011	65795	95876	55293	18988	27354	26575	08625	40801	59920	29841	80150	12777	48501
34	25976	57948	29888	88604	67917	48708	18912	82271	65424	69774	33611	54262	85963	03547
35	09763	83473	73577	12908	30883	18317	28290	35797	05998	41688	34952	37888	38917	88050
36	91567	42595	27958	30134	04024	86385	29880	99730	00036	84855	29080	09250	79656	73211
37	17955	56349	90999	49127	20044	59931	06115	20542	18059	02008	73708	83517	36103	42791
38	46503	18584	18845	49618	02304	51038	20655	58727	28168	15475	56942	53389	20562	87338
39	92157	89634	94824	78171	84610	82834	09922	25417	44137	48413	25555	21246	35509	20468
40	14577	62765	35605	81263	39667	47358	56873	56307	61607	45918	89686	20103	77490	18062
41	98427	07523	00062	64270	01638	92477	66969	98420	04880	45585	46565	04102	46880	45709
42	34914	63976	88720	82765	34476	17032	87589	40836	32427	70002	70663	88863	77775	69348
43	70060	28277	39475	46473	23219	53416	94970	25832	69975	94884	19661	72828	00102	66794
44	53976	54914	06990	67245	68350	82948	11398	42878	80287	88267	47363	46634	06541	97809
45	76072	29515	40980	07391	58745	25774	00987	80059	39911	96189	41151	14222	60697	59583
46	90725	52210	83974	29992	65831	38857	50490	83765	55657	14361	31720	57375	56228	41546
47	64364	67412	33339	31926	14883	24413	59744	92351	97473	89286	35931	04110	23726	51900
48	08962	00358	31662	25388	61642	34072	81249	35648	56891	69352	48373	45578	78547	81788
49	95012	68379	93526	70765	10592	04542	76463	54328	02349	17247	28865	14777	62730	92277
50	15664	10493	20492	38391	91132	21999	59516	81652	27195	48223	46751	22923	32261	85653

المشروع

شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع.
ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

ميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينفّذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفّر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومترابطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلّب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطّط له مسبقاً.

ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخّل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.
٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.
٣. تحديد خطوات سير المشروع.
٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، **(شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).**
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلّي.

ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلّاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلّم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. **الأهداف** التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.

٢. **الخطة** من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحّدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.

٣. **الأنشطة** التي قام بها الطلبة من حيث، تنوّعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.

٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التى استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

المراجع

لخواجة، مصطفى عبد المنعم (2013) : مقدمة في الرياضيات البحتة: الدوال والمصفوفات والمحدد، دار التعليم الجامعي، القاهرة.

التميمي، علي جاسم (2009): مقدمة في الجبر الخطي، دار المسيرة، عمان .

زيتون، عايش محمود (2004): أساسيات الإحصاء الوصفي، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان .

قنديلجي، عامر إبراهيم (2008): البحث العلمي واستخدام مصادر المعلومات التقليدية والالكترونية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع- عمان- الأردن.

صالحة، رائد بشير و عاشور، أروى عيد (2017): الرياضيات العامة ، الجامعة الإسلامية

طبش، خليل (20132): مبادئ الرياضيات العامة , الجامعة الإسلامية .

عوض، عدنان (1991): الرياضيات العامة وتطبيقاتها الاقتصادية، دار الفرقان_ اربد_ الأردن .

الشراونة، عبد الحكيم عامر (2006): موسوعة الرياضيات في النهايات والتفاضل، دار الاسراء للنشر والتوزيع_عمان_ الأردن .

Bell,E,T (1937): Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Lanl B.Boyer(1989): History of Mathematics Wiley,N.Y

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume1

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume2

لجنة المناهج الوزارية

د. صبري صيدم **د. بصري صالح** **م. فواز مجاهد**

أ. ثروت زيد **أ. عزام ابو بكر** **أ. عبد الحكيم أبو جاموس**

د. شهناز الفار **د. سمية النخالة** **م. جهاد دريدي**

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد مطر	د. سمية النخالة
د. محمد صالح (منسقًا)	د. علا الخليلي	أ. أحمد سياعرة
د. معين جبر	د. شهناز الفار	أ. قيس شبانة
د. علي عبد المحسن	د. علي نصار	أ. مبارك مبارك
د. تحسين المغربي	د. أيمن الأشقر	أ. عبد الكريم صالح
د. عادل فوارعة	أ. ارواح كرم	أ. نادية جبر
أ. وهيب جبر	أ. حنان أبو سكران	أ. أحلام صلاح
د. عبد الكريم ناجي	أ. كوثر عطية	أ. نشأت قاسم
د. عطا أبوهاني	د. وجيه ضاهر	أ. نسرين دويكات
د. سعيد عساف	أ. فتحي أبو عودة	

المشاركون في ورشات عمل كتاب الرياضيات للصف الحادي عشر الريادي والفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي:

أيمن أبوزياد	محمد أبو سليم	سمير درويش	نايف الطيطي
مصطفى عفانة	مي عصايرة	ريم جابر	عادل فوارعة
رجاء العاجز	عوني الفقيه	كريم العارضة	أرواح كرم
منال الصباغ			