١٢

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دولـــة فلـسـطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيـــات

الفرع العلمي والصناعي

فريق التأليف:

د. محمد صالح (منسقاً)
أ. أرواح كرم
أ. رائدة عويس
أ. عبد الكريم صالح
أ. موسى حراحشة
أ. قيس شبانة
أ. نسرين دويكات

مركز المناهج

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين

تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٨ / ٢٠١٩ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائــرة الفنية

إشراف فني وتصميم	كمال فحماوي

تحكيم علمي	د. محمد نجيب
تحرير لغوي	أ. عمر عبد الرحمن
قراءة	د. محمد عواد
متابعة المحافظات الجنوبية	د. سمية النخّالة

الطبعة الأولى

٢٠١٩ م/ ١٤٤٠ هـ

دولــة فلسطين

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

+970-2-2983250 فاكس | +970-2-2983280 هاتف

تقديم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقررّة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٨ م

مقدمة

يسرنا أن نقدم لزملائنا المعلمين والمعلمات، ولطلبتنا الأعزاء كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي العلمي والصناعي، وَفْق الخطوط العريضة لوثيقة الرياضيات، والتي تم تطويرها بناءً على التغذية الراجعة والدراسات الهادفة إلى تطوير المناهج الفلسطينية، ومواكبتها لمهارات القرن الحادي والعشرين، مستندين في ذلك لمعايير وطنية ودولية.

لقد اشتمل محتوى الكتاب، على أنشطةٍ وتطبيقاتٍ وسياقاتٍ حياتيةٍ، من أجل إفساح المجال للطلبة للتفكير والإبداع، ولإبراز أهمية الرياضيات في الحياة، وقد تم مراعاة التسلسل المنطقي للمفاهيم والنظريات والتعميمات وتم برهنة بعض النظريات (للمعلم فقط).

وقد اشتمل الفصل الأول على ثلاث وحدات، هي: حساب التفاضل، وتطبيقات التفاضل، والمصفوفات.

في الوحدة الأولى (حساب التفاضل) فقد تم تقديم متوسط التغير، قواعد الاشتقاق، مشتقة الاقترانات المثلثية، قاعدة لوبيتال، مشتقة الاقترانات الأسّيّة واللوغريتمية، كما تم عرض بعض التطبيقات الهندسية والفيزيائية على الاشتقاق، بالإضافة إلى قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني.

وفي الوحدة الثانية (تطبيقات التفاضل)، تم تقديم نظريتي القيمة المتوسطة ورول، فترات التزايد والتناقص، القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران، نقط الانعطاف، مجالات التقعر للأعلى وللأسفل، ثم عرضت تطبيقات عملية على القيم القصوى.

أما في الوحدة الثالثة (المصفوفات) تم تقديم مفهوم المصفوفة ورتبتها، العمليات عليها، محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الأولى والثانية والثالثة، النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية وحل أنظمة المعادلات الخطية بثلاث طرق هي: طريقة النظير الضربي، طريقة كريمر، طريقة جاوس.

أما الفصل الثاني فقد اشتمل على ثلاث وحدات، هي: التكامل غير المحدود وتطبيقاته، التكامل المحدود وتطبيقاته ، والأعداد المركبة.

ففي الوحدة الرابعة (التكامل غير المحدود وتطبيقاته) تم تقديم مفهوم التكامل غير المحدود من خلال معكوس المشتقة، وتم التعرف على قواعد التكامل غير المحدود وتطبيقاته الفيزيائية والهندسية، وأخيراً طرق التكامل الثلاث (التكامل بالتعويض، والتكامل بالأجزاء، والتكامل بالكسور الجزئية).

أما في الوحدة الخامسة (التكامل المحدود وتطبيقاته) فقد تم تقديم مفهوم التجزئة ومجموع ريمان ، ثم التكامل المحدود، وخصائصه، وتطبيقاته في حساب المساحة والحجوم الدورانية.

وفي الوحدة السادسة (الأعداد المركبة) تم عرض مفهوم العدد المركب، والعمليات على الأعداد المركبة (المساواة ، والجمع والطرح، والضرب) ثم عرضت عملية القسمة، وفي نهاية الوحدة عرض حل المعادلة التربيعية في (ك) وايجاد الجذور التربيعية للعدد المركب.

وقد حرصنا أن تشمل كل وحدة على تمارين عامة متنوعة بين المقالية والموضوعية (الاختيار من متعدد)، لحرصنا على تغطية كافة المفاهيم والتعميمات والمهارات الواردة في الوحدة، لتكون عوناً للطلبة على التدرب والتمكن من المهارات.

نتمنى أن نكون بهذا العمل قد حققنا مطالب عناصر العملية التعليمية كافة، بإخراج منهاجٍ فلسطينيٍ واقعيٍ ، يربط الطالب بظواهر رياضيةٍ حياتيةٍ، آملين من زملائنا المعلمين والمعلمات والمديرين والمديرات في مدارس الوطن، تقديم التغذية الراجعة لمركز المناهج قبل تطبيق الكتاب المقرر، وأثناء تطبيقه في الميدان، وبعد التطبيق.

والله ولي التوفيق

المؤلفون

المحتـــويات

البنود التي باللون الأحمر تستثنى من الفرع الصناعي

الوحدة ١

حساب التفاضل

Differentiation

تكثر في ربوع فلسطين الشوارع والطرق الملتوية والخطرة في المناطق الجبلية، هل تعتقد أن تصميم هذه الشوارع في تلك المناطق مشابه لتصميمها في المناطق المستوية الأفقية؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف حساب التفاضل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. إيجاد متوسط التغير، وتفسيره هندسياً وفيزيائياً.
٢. حساب المشتقة الأولى عند نقطة باستخدام قواعد الاشتقاق.
٣. التعرف إلى المشتقات العليا للاقتران، وإجراء بعض التطبيقات عليها.
٤. إيجاد مشتقة الاقترانات المثلثية.
٥. التعرف إلى مشتقة الاقتران الأسّي الطبيعي، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي.
٦. إيجاد بعض النهايات باستخدام قاعدة لوبيتال.
٧. التعرف إلى قاعدة السلسلة، واستخدامها في إيجاد مشتقة تركيب اقترانين.
٨. حساب المشتقة الأولى لعلاقة ضمنية.
٩. التعرف إلى المعنى الهندسي والفيزيائي للمشتقة، وحل مسائل عليهما.

١ - ١ متوسط التغير (Rate of Change)

نشاط ١: عائلة فلسطينية مكونة من: أم محمد وولديها التوأمين محمد وخالد كانت كتلة محمد قبل عشر سنوات ٣٢ كغم، وأصبحت اليوم٦٢ كغم، أما كتلة خالد فكانت ٢٩ كغم، ولكنها اليوم ٥٢ كغم. ارتاحت أم محمد للتغير في كتلة محمد، بينما ذهبت بابنها خالد إلى الطبيب ... برأيك لماذا؟

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ ، $س_١ \neq س_٢$ فإن:

- التغير في س يساوي $س_٢ - س_١$ ونرمز له بالرمز Δس ويقرأ دلتا س .
- التغير في الاقتران ق(س) يساوي ق($س_٢$) - ق($س_١$) ويرمز له بالرمز Δص.
- متوسط التغير في الاقتران ص = ق(س) يساوي $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$$= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

ويمكن كتابته على الصورة $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ}$

حيث هـ = Δس $\neq$ ٠ ، ونسميه اقتران متوسط التغير عند $س_١$.

مثال ١ : إذا كان ص = ق(س) = $س^٣$ - ٥س + ٣ ، جد:

١) Δس عندما تتغير س من $^-١$ إلى ٢.

٢) التغير في ق(س) عندما تتغير س من $^-١$ إلى ٢.

٣) متوسط التغير في ق(س) عندما تتغير س من $^-١$ إلى ٢.

الحل :

١) بما أن $س_١ = {}^-١$ ، $س_٢ = ٢$ ، فإن Δس = $س_٢ - س_١ = ٣$

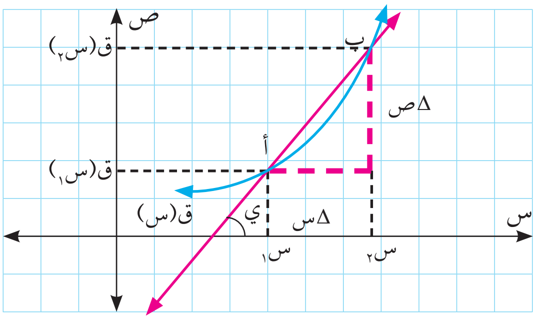
٢) Δص = ق($س_٢$) - ق($س_١$) = ق(٢) - ق($^-١$) = ١ - ٧ = $^-٦$

٣) متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{^-٦}{٣} = {}^-٢$

المعنى الهندسي لمتوسط التغير:

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) والمستقيم المار بالنقطتين أ ، ب والذي يسمى قاطعاً للمنحنى، ويكون

ميله = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$



تعريف:

متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ يساوي ميل القاطع المار بالنقطتين، ($س_١$ ، ق($س_١$)) ، ($س_٢$ ، ق($س_٢$)) ونسمي الزاوية (ي) التي يصنعها القاطع للمنحنى مع الاتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية ميل المستقيم، ويكون (ظاي = ميل القاطع).

مثال ٢ : إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) = س + جا٢س في النقطتين (٠ ، ق(٠)) ، ($\frac{\pi}{٢}$ ، ق($\frac{\pi}{٢}$))

١ احسب ميل المستقيم ل.

٢ جد قياس زاوية ميل المستقيم ل.

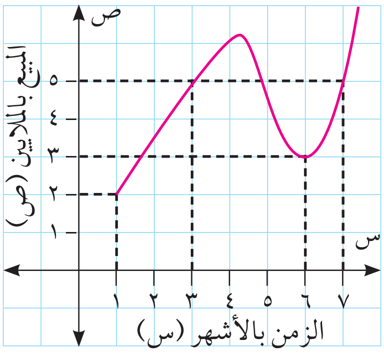
الحل :

١ ميل المستقيم ل = متوسط تغير ق(س) في الفترة $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

$$= \frac{ق(\frac{\pi}{٢}) - ق(٠)}{\frac{\pi}{٢} - ٠} = \frac{\frac{\pi}{٢} + جا(٢ \times \frac{\pi}{٢}) - (٠ + جا٠)}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{\frac{\pi}{٢}}{\frac{\pi}{٢}} = ١$$

٢ ميل المستقيم ل = ظا ي = ١ ومنها قياس زاوية ميل المستقيم ل هو $\frac{\pi}{٤}$ (لماذا؟)

نشاط ٢: يمثل منحنى الاقتران ص = ق(س) في الشكل المجاور مبيع شركة سيارات حيث ص: المبيع بالملايين خلال س شهراً، أراد عمر من الرسم إيجاد متوسط التغير في المبيع عندما تتغير س من ١ إلى ٣، فكتب



$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق(٣)} - \text{ق(١)}}{\text{٣} - \text{١}} = \frac{\text{٥} - \text{٢}}{\text{٣} - \text{١}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$$

والآن أكمل: متوسط التغير في ص عندما تتغير س من ٣ إلى ٧ يساوي ....

متوسط التغير في ص عندما تتغير س من ٣ إلى ٦ يساوي........

مثال ٣: إذا كان ص = ق(س) = $\sqrt{\text{٢س} + \text{١}}$ ، وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ب يساوي $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$. احسب قيمة ب حيث ب > ٠

الحل:

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق(س}_\text{٢}\text{)} - \text{ق(س}_\text{١}\text{)}}{\text{س}_\text{٢} - \text{س}_\text{١}} = \frac{\text{ق(ب)} - \text{ق(٠)}}{\text{ب} - \text{٠}} = \frac{\sqrt{\text{٢ب} + \text{١}} - \sqrt{\text{١}}}{\text{ب} - \text{٠}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

أي أن $\text{٢}\sqrt{\text{٢ب} + \text{١}} - \text{٢} = \text{ب}$

$\text{٢}\sqrt{\text{٢ب} + \text{١}} = \text{ب} + \text{٢}$

وبالتربيع، وحل المعادلة ينتج أن: ب = ٠ أو ب = ٤ (القيمة ب = ٠ تهمل، لماذا؟)

نشاط ٣: ليكن ص = ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^\text{٢} &، \text{س} \geq \text{١} \\ \text{٢س} - \text{١} &، \text{س} < \text{١} \end{cases}$

لبيان أن متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ١ + هـ

هو $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \begin{cases} \text{٢} + \text{هـ} &، \text{هـ} > \text{٠} \\ \text{٢} &، \text{هـ} < \text{٠} \end{cases}$ ، فإننا نجد

١ عندما هـ > ٠ : متوسط التغير $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق(١} + \text{هـ)} - \text{ق(١)}}{\text{هـ}}$

$$= \frac{\text{(١} + \text{هـ)}^\text{٢} - \text{(١)}^\text{٢}}{\text{هـ}} = \text{٢} + \text{هـ}$$

❷ أكمل: عندما هـ $<$ ٠ فإن $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ = ...

❸ اعتمد على ما سبق في إيجاد متوسط التغير في الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

- عندما تتغير س من ١ إلى ٣
- عندما تتغير س من ١ إلى ⁻٢

المعنى الفيزيائي لمتوسط التغير:

تعريف:

إذا كانت ف = ق(ن) حيث ف المسافة التي يقطعها الجسم، ن الزمن، فإن متوسط التغير في المسافة عندما تتغير ن من ن_1 إلى ن_2 هو $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}_2 - \text{ف}_1}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1} = \frac{\text{ق}(\text{ن}_2) - \text{ق}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$

ويسمى السرعة المتوسطة في الفترة [ن_1 ، ن_2].

مثال ٤ : يتحرك جسم على خط مستقيم، بحيث أن بعده ف بالأمتار عن النقطة (و) بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ف = ق(ن) = ن^2 + ٨ ن ، جد:

❶ السرعة المتوسطة في الفترة [٠ ، ٣].

❷ إذا كانت السرعة المتوسطة في الفترة [١ ، أ] تساوي ١٣ م/ث جد قيمة أ.

الحل :

① ن_1 = ٠ ، ن_2 = ٣

السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(٠)}{٣ - ٠} = \frac{٣^2 + ٨ \times ٣ - ٠}{٣} = \frac{٣٣}{٣}$ = ١١ م/ث

② السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ق}(\text{أ}) - \text{ق}(١)}{\text{أ} - ١} = \frac{\text{أ}^2 + ٨ \times \text{أ} - ٩}{\text{أ} - ١}$ = ١٣

بالتبسيط ينتج أن: أ^2 – ٥أ + ٤ = ٠ ، وبحل المعادلة ينتج أن قيمة أ المطلوبة هي ٤

تمارين ١ - ١

١ إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{س}$ + س^٢، جد:

أ التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٣ إلى ٥.

ب متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٤ إلى ١.

٢ إذا كان ق(س) = جتاس − ٣ جاس جد متوسط التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [$\frac{\pi}{٢}$، π].

٣ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٦ - س & ، س < ٢ \\ س^٢ + أس & ، س \geq ٢ \end{cases}$

وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى أ ، أ > ٢ يساوي ٩، احسب قيمة أ.

٤ إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٣]، يساوي ٤، وكان ك(س) = س^٢ + ٣ق(س)، جد متوسط التغير للاقتران ك(س) في نفس الفترة.

٥ إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (١ ، أ)، (٣ ، ب) وصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. احسب متوسط التغير في الاقتران هـ(س) = ٣ق(س) + س^٢ − ١ في الفترة [١ ، ٣].

٦ يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث أن بعده ف بالأمتار عن نقطة الانطلاق بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة ف = ق(ن) = ن^٢ + ب ن وكانت السرعة المتوسطة في الفترة [١ ، ٣] تساوي ٦ م/ث. فما قيمة الثابت ب؟

٧ إذا كان ق(س) = أ س^٢ + ب س + جـ. أثبت أن متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٢ إلى ن يساوي أ(ن + ٢) + ب

٨ أ إذا كان ق(س) = س + هـ$^{س+١}$، (هـ العدد النيبيري)

جد متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ١

ب إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = س + لـوهـ س^ن، س > ٠ عندما تتغير س من ١ إلى هـ يساوي $\frac{٣ - هـ}{١ - هـ}$، احسب قيمة ن.

١ - ٢ قواعد الاشتقاق (Rules of Differentiation)

نشاط ١: أنشأ السيد مراد مصنعاً للألبان في إحدى المدن الفلسطينية، ليزود السوق الفلسطيني بمنتجات الألبان، بعد النقص الحاصل من مقاطعة بضائع الاحتلال، والذي يعتبر شكلاً من أشكال المقاومة السلمية، فإذا كان بهذا المصنع خطّان للإنتاج، بحيث ينتج الخطّ الأول عبوات من الألبان وَفق الاقتران $ق(ن) = ن^{٢} + ن$.

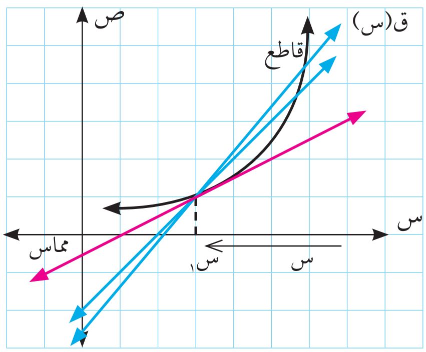
أما الخطّ الثاني فينتج عبوات وَفقَ الاقتران $هـ(ن) = ن^{٢} + ٢ن$ حيث ن الزمن بالساعات.

- يكون معدل التغير في إنتاج الخطّ الأول من العبوات بعد ن ساعة يساوي $قَ(ن) = ٢ن + ١$
- أما معدل التغير في إنتاج الخطّ الثاني من العبوات فيساوي ....
- كمية إنتاج الخطّين من العبوات بدلالة ن يساوي ....
- معدل التغير في إنتاج المصنع بدلالة ن يساوي.................. ماذا تستنتج؟

تعلمت في الدرس السابق مفهوم متوسط التغير للاقتران $ص = ق(س)$ عندما تتغير س من $س_{١}$ إلى $س_{١} + \Delta س$ وكان

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_{١} + \Delta س) - ق(س_{١})}{\Delta س}، \quad \Delta س \neq ٠$$

وإذا أخذنا $\underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ وكانت هذه النهاية موجودة فإننا نسميها معدل التغير للاقتران ق(س) عند $س_{١}$ أو المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند $س = س_{١}$ ونقول إن ق(س) قابل للاشتقاق عند $س_{١}$ (أي كلما اقتربت س من $س_{١}$ فإن متوسط تغير الاقتران (ميل القاطع) يؤول إلى معدل تغير الاقتران ق(س) (ميل المماس) عند $س = س_{١}$، انظر الشكل المجاور.



تعريف (١)*:

إذا كانت ص = ق(س) اقتراناً معرفاً عند $س_١$ في مجاله، وكانت $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ}$

موجودة فإن قيمة هذه النهاية تسمى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند $س_١$،

ونرمز لها بأحد الرموز الآتية: $قَ(س_١)$ أو $صَ\Big|_{س = س_١}$ أو $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س = س_١}$

ويمكن كتابتها على النحو $قَ(س_١) = \underset{س \leftarrow س_١}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$

تعريف (٢):

ليكن الاقتران ق(س) معرفاً عندما س = $س_١$ فإن:

$قَ(س_١)^+ = \underset{هـ \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ}$ (مشتقة ق(س) من يمين العدد $س_١$)

$قَ(س_١)^- = \underset{هـ \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ}$ (مشتقة ق(س) من يسار العدد $س_١$)

وعندما $قَ(س_١)^+ = قَ(س_١)^- = ل$، فإن ق(س) قابل للاشتقاق عند $س_١$ وتكون $قَ(س_١) = ل$

تعريف (٣):

- إذا كان الاقتران ق(س) معرفاً على [أ ، ب] فإن ق(س) غير قابل للاشتقاق عند أطراف الفترة [أ ، ب].
- يكون ق(س) قابلاً للاشتقاق على] أ ، ب[إذا كان قابلاً للاشتقاق عند كل نقطة فيها.

فكّر وناقش:

مجال قَ(س) $\subseteq$ مجال ق(س).

قاعدة (١):

إذا كان ق(س) = جـ حيث جـ ∈ ح فإن قَ(س) = ٠ لجميع قيم س ∈ ح.

* لا يطلب من الطلبة إيجاد المشتقة بالتعريف.

مثال ١ : جد قَ(س) لكل مما يأتي: ① ق(س) = ٥ ② ق(س) = جتا π

الحل :
① قَ(س) = ٠
② قَ(س) = ٠

قاعدة (٢):

إذا كان ق(س) = س فإن قَ(س) = ١

قاعدة (٣):

إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق وكان جـ $\in$ ح فإن ك(س) = جـ ق(س) قابل للاشتقاق وتكون كَ(س) = جـ قَ(س).

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٥س ، جد قَ(س)

الحل : قَ(س) = ٥ × ١ = ٥

قاعدة (٤):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، فإن ك(س) = ق(س) ± هـ(س) قابل للاشتقاق، وتكون كَ(س) = قَ(س) ± هـَ(س).

ملاحظة:

تبقى القاعدة (٤) صحيحة لأكثر من اقترانين.

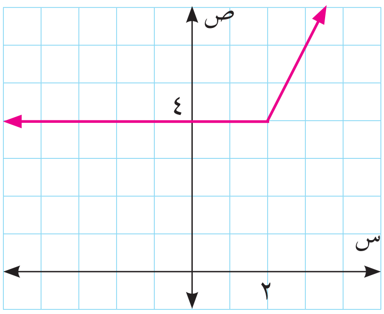
مثال ٣ : إذا كان قَ(١) = ٥ ، كَ(١) = ⁻٣ ، وكان ل(س) = ٢س + ق(س) − ٣ ك(س) ، جد لَ(١).

الحل : لَ(س) = ٢ + قَ(س) − ٣ كَ(س)

لَ(١) = ٢ + قَ(١) − ٣ كَ(١)

وبالتعويض ينتج أن: لَ(١) = ١٦

مثال ٤ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{٢س} ، & \text{س} \geq \text{٢} \\ \text{٤} ، & \text{س} < \text{٢} \end{cases}$ ، جد قَ(٢)



الحل : ق(س) متصل على مجاله (تحقق من ذلك)، ومنها يكون

قَ(س) = $\begin{cases} \text{٢} ، & \text{س} > \text{٢} \\ \text{٠} ، & \text{س} < \text{٢} \end{cases}$

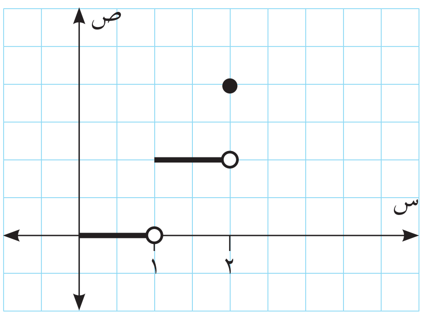
أما عند س = ٢ فنبحث بالمشتقة عن يمينها وعن يسارها

فتكون قَ(٢)$^+$ = ٢ ، قَ(٢)$^-$ = ٠ ، ومنها قَ(٢) غير موجودة. (لماذا؟)

مثال ٥ : إذا كان ق(س) = [س] ، س ∈ [٠ ، ٢] . جد قَ(س)

الحل : نعيد كتابة ق(س) دون رمز أكبر عدد صحيح.

ق(س) = $\begin{cases} \text{٠} ، & \text{٠} \leq \text{س} < \text{١} \\ \text{١} ، & \text{١} \leq \text{س} < \text{٢} \\ \text{٢} ، & \text{س} = \text{٢} \end{cases}$



لاحظ أن ق(س) منفصلاً عند س = ١

قَ(س) = $\begin{cases} \text{٠} ، & \text{٠} < \text{س} < \text{١} \\ \text{٠} ، & \text{١} < \text{س} < \text{٢} \end{cases}$

قَ(٠) غير موجودة ، قَ(٢) غير موجودة ..... (لماذا؟)

و قَ(١) غير موجودة ..... (لماذا؟)

أتعلم:

عند إيجاد المشتقة باستخدام قواعد الاشتقاق، لا بد من بحث الاتصال أولاً.

قاعدة (٥):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق فإن ك(س) = ق(س) × هـ(س) قابل للاشتقاق وتكون كَ(س) = ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س)

مثال ٦ : إذا كان ق(س) = (٥س − ١)(٢ − س) جد قَ(س)، ثم قَ(⁻١).

الحل :

قَ(س) = (٥س − ١) × (⁻١) + (٥) (٢ − س)

ومنها قَ(س) = ⁻٥س + ١ + ١٠ − ٥س = ⁻١٠س + ١١

وتكون قَ(⁻١) = ⁻١٠ × ⁻١ + ١١ = ٢١

مثال ٧ : إذا كان ق(س) = س ك (س) جد قَ(٢) علماً بأن ق(٢) = ⁻٦ ، كَ(٢) = ٤

الحل :

قَ(س) = س × كَ(س) + ١ × ك(س)

قَ(٢) = ٢كَ(٢) + ك(٢) = ٨ + ك(٢)

لكن ق(٢) = ٢ × ك(٢) ، ومنها ك(٢) = ⁻٣

قَ(٢) = ٨ − ٣ = ٥

نظرية:

إذا كان ق(س) = س^{ن} ، فإن قَ(س) = ن س$^{ن-١}$، ن ≠ ١ ، ن ∈ ص$^{+}$

مثال ٨ : إذا كان ق(س) = س^{٣} − ٢س + ٥، جد قَ(س)، ثم قَ(−٢).

الحل : قَ(س) = ٣س^{٢} − ٢ ومنها قَ(−٢) = ٣(−٢)^{٢} − ٢ = ١٠

أتعلم:

إذا كان ق(س) كثير حدود، فإن ق(س) قابل للاشتقاق.

نظرية:

يكون ق قابلاً للاشتقاق عند س = س$_{١}$

إذا وفقط إذا كان ق(س) متصلاً عند س$_{١}$ و قَ(س$_{١}$)$^{+}$ = قَ(س$_{١}$)$^{-}$

مثال ٩ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^{٢} + \text{ب} & \text{،} \quad \text{س} \geq ١ \\ \text{س}^{٣} + \text{س} & \text{،} \quad \text{س} < ١ \end{cases}$ ،

أوجد قيمة أ ، ب علماً بأن ق(س) قابل للاشتقاق على ح

الحل : نعلم أن ق(س) متصل عند س = ١ ..... (لماذا؟)

ومنها $\lim\limits_{\text{س} \to ١}$ ق(س) = ق(١) أي أن أ + ب = ٢

قَ(س) = $\begin{cases} \text{٢أ س} & \text{،} \quad \text{س} \geq ١ \\ \text{٣س}^{٢} + ١ & \text{،} \quad \text{س} < ١ \end{cases}$ ،

وكذلك قَ(١)$^{+}$ = قَ(١)$^{-}$ ومنها ٢أ = ٤

أي أن أ = ٢ ، ب = ٠

قاعدة (٦):

إذا كان ك(س) ، م(س) اقترانين قابلين للاشتقاق فإن ق(س) = $\frac{ك(س)}{م(س)}$ ، م(س) ≠ ٠

قابل للاشتقاق وتكون قَ(س) = $\frac{م(س) \times كَ(س) - ك(س) \times مَ(س)}{(م(س))^٢}$

نتيجة:

إذا كان ق(س) = $س^{ن}$ ، فإن قَ(س) = ن $س^{ن-١}$ ، ن ∈ ص ، س ≠ ٠

مثال ١٠: إذا كان ق(س) = $\frac{١}{س^٣}$ + $\frac{س^٢}{س - ١}$ ، جد قَ(−١).

الحل : ق(س) = $س^{-٣}$ + $\frac{س^٢}{س - ١}$

قَ(س) = −٣ × $س^{-٤}$ + $\frac{(س - ١) \times ٢س - س^٢ \times ١}{(س - ١)^٢}$

قَ(س) = $\frac{-٣}{س^٤}$ + $\frac{(س - ١) \times ٢س - س^٢}{(س - ١)^٢}$ ومنها قَ(−١) = $\frac{-٩}{٤}$ (تحقّق من ذلك)

مثال ١١: إذا كان ق(س) = $\frac{س^٢ - ٢}{س + ٣}$ ، س ≠ −٣. جد قيمة/ قيم س التي تجعل قَ(س) = $\frac{-٣}{٤}$

الحل : قَ(س) = $\frac{(س + ٣) \times ٢س - (س^٢ - ٢) \times ١}{(س + ٣)^٢}$ بالتبسيط والاختصار، ينتج أن:

قَ(س) = $\frac{س^٢ + ٦س + ٢}{(س + ٣)^٢}$ ، لكن قَ(س) = $\frac{-٣}{٤}$

$\frac{س^٢ + ٦س + ٢}{(س + ٣)^٢} = \frac{-٣}{٤}$

وبالضرب التبادلي والاختصار، ينتج أن: س = −١ ، س = −٥

المشتقات العليا (Higher Derivatives)

إذا كان ص = ق(س) = س^{٤} + ٣س^{٢} − ٢، جد قَ(س).

هل يمكنك تكرار عملية الاشتقاق بالنسبة لـ س؟ ولماذا؟

نسمي المشتقات التي تلي المشتقة الأولى بالمشتقات العليا.

وإذا كانت ص = ق(س) حيث ق قابل للاشتقاق، فإن المشتقة الأولى هي صَ = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قَ(س) تمثل اقتراناً جديداً. وإذا كانت المشتقة الأولى قابلةً للاشتقاق، فإن مشتقتها $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)$ تسمى المشتقة الثانية، ويرمز لها بالرمز صً أو قً(س) أو $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ وتقرأ (دال اثنين ص دال س تربيع) وهكذا بالنسبة للمشتقات الثالثة والرابعة... ونعبر عن المشتقة من الرتبة ن بإحدى الصور الآتية:

ص$^{(ن)}$ أو $\frac{\text{د}^{ن}\text{ص}}{\text{د س}^{ن}}$ أو ق$^{(ن)}$(س)، حيث ن ∈ ص$^{+}$، ن > ٢

فكّر وناقش:

هل يوجد اختلاف بين كل من $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ و $\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{٢}$؟

مثال ١٢: إذا كان ق(س) = س^{٥} + ٤س^{٣} − ١، جد ق$^{(٥)}$(س). ثم جد ق$^{(٤)}$(٢).

الحل :

قَ(س) = ٥س^{٤} + ١٢س^{٢} ، قً(س) = ٢٠س^{٣} + ٢٤س

ق$^{(٣)}$(س) = ٦٠س^{٢} + ٢٤ ، ق$^{(٤)}$(س) = ١٢٠س ، ق$^{(٥)}$(س) = ١٢٠

ق$^{(٤)}$(٢) = ١٢٠ × ٢ = ٢٤٠

نشاط ٤: إذا كان ق(س) كثير حدود، وكان ق(س) + قً(س) = ٢س^{٣} − ٣س ، فلإيجاد قَ(١) نجد:

أولاً قاعدة ق(س)، لاحظ أن ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة ..... (لماذا؟)

ومنه ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د والآن أكمل:

قً(س) = ...

ق(س) + قً(س) = ... = ٢س^{٣} − ٣س ومنها أ = ... ، ب = ... ، جـ = ... ، د = ...

ومنها ق(س) = ... ، قَ(س) = ... ، ومنها قَ(١) = ...

مثال ١٣: إذا كان ص = $\frac{١}{س}$، س ≠ ٠ ، أثبت أن: س^{٢}ص$''$ + س ص$'$ = ص

الحل : ص = $\frac{١}{س}$ ، ص$'$ = $\frac{-١}{س^٢}$ ، ص$''$ = $\frac{٢}{س^٣}$

ومنها س^{٢}ص$''$ + س ص$'$ = س^٢ × $\frac{٢}{س^٣}$ + س × $\frac{-١}{س^٢}$

= $\frac{٢}{س}$ − $\frac{١}{س}$ = $\frac{١}{س}$ = ص وهو المطلوب

تمارين ١ - ٢

١ جد ق$'$(س) في كل مما يأتي عند قيم س إزاء كلّ منها:

أ ق(س) = س^٥ − س^٢ + جـ ، حيث جـ ثابت ، عندما س = −١

ب ق(س) = (س^٣ − ١)(١٢ + س) ، عندما س = ٣

جـ ق(س) = $\frac{س^٢}{٥ − س^٢}$ ، عندما س = −٢

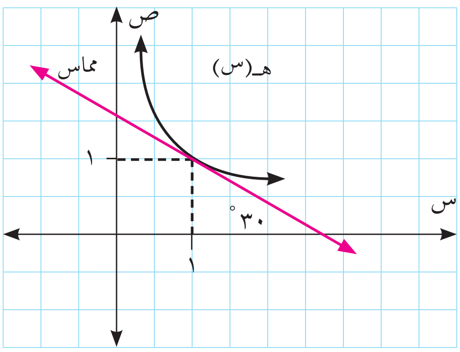
٢ بالاعتماد على المعطيات في الجدول المجاور، جد ما يأتي:

أ (ق + هـ^٢)$'$(١)

ب $\left(س^٢ ق − \frac{٣}{هـ}\right)'$(١)

ق(١)	ق$'$(١)	هـ(١)	هـ$'$(١)
٢	٣	−١	−٣

٣ إذا كان ق(س) = $\frac{س}{س^٢ + ١}$ وكان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران هـ(س)، فجد $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'$(١)



٤ أ إذا كانت ص = $\frac{س}{س + ١}$ ، س ≠ $^-$١ ، أثبت أن: ٢ص صَ + س صً = ٠

ب إذا كانت ص = أ س^{٥} + $\frac{٥}{س^{٤}}$ ، س ≠ ٠ ، أثبت أن: صً = $\frac{٢٠ ص}{س^{٢}}$

٥ إذا كان ق(س) = (١ − س)(١ + س)(١ + س^{٢}) (١ + س^{٤}) (١ + س^{٨})، جد قَ(١).

٦ إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = [٢س]

أولاً: جد: أ قَ(٠) ب هـَ(٠)

جـ (ق × هـ)(س) د (ق × هـ)َ(٠)

ثانياً: هل هذا يتناقض مع قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانيين؟ فسّر إجابتك.

٧ إذا كان ق(س) = س^{٤} + أ س^{٣} − ٣ ، جد قيمة أ ، حيث ق$^{(٣)}$(٢) = ١٨

٨ إذا كان ق(س) = س^{ن} ، ن ∋ ص ، وكان ق$^{(٣)}$(س) = أ س ، جد قيمة أ

١ - ٣ مشتقات الاقترانات المثلثية (The Derivative of Trigonometric Functions)

نشاط ١: أظهر التقرير الصحي السنوي لفلسطين للعام ٢٠١٤ أن أمراض القلب والأوعية الدموية المسبب الأول لوفيات الفلسطينيين، وبنسبة بلغت ٢٩,٥٪ من مجموع الوفيات المبلّغ عنها.

١ هل سبق أن سمعت بحاجة مريض لتخطيط قلب؟ وهل شاهدت تخطيط قلب؟

٢ سبق ودرست الاقترانات المثلثية ، ما وجه الشبه بين تخطيط القلب ومنحنى بعض الاقترانات المثلثية؟

لقد تعرفت في الدروس السابقة اشتقاق الاقترانات كثيرة الحدود، والاقترانات النسبية، وستتعرف في هذا الدرس على قواعد خاصة لإيجاد مشتقة الاقترانات المثلثية.

قاعدة (١):

إذا كان ق(س) = جاس، س بالتقدير الدائري فإن قَ(س) = جتاس

مثال ١ : إذا كان ق(س) = س جاس ، جد قَ$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

الحل :

ق(س) = س جاس

قَ(س) = جاس + س جتاس

قَ$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ = ١

قاعدة (٢):

إذا كان ق(س) = جتاس ، س بالتقدير الدائري ، فإن قَ(س) = ⁻جاس

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{جتاس}}$ ، جد ق$'$(س)

الحل : ق$'$(س) = $\dfrac{\text{جتاس} \times ٢\text{س} - \text{س}^{٢} \times {}^{-}\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

= $\dfrac{٢\text{س جتاس} + \text{س}^{٢}\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

قاعدة (٣):

- إذا كان ق(س) = ظاس ، فإن ق$'$(س) = قا^{٢}س.
- إذا كان ق(س) = ظتاس ، فإن ق$'$(س) = $^{-}$قتا^{٢}س.
- إذا كان ق(س) = قاس ، فإن ق$'$(س) = قاس ظاس .
- إذا كان ق(س) = قتاس ، فإن ق$'$(س) = $^{-}$قتاس ظتاس.

فكّر وناقش:

تحقّق من صحة القواعد السابقة بالتعويض بدلالة جاس، جتاس، ثم باستخدام قواعد الاشتقاق.

مثال ٣ : إذا كان ق(س) = قاس + ظاس ، جد ق$'$(س) ، ق$'\left(\dfrac{\pi}{٤}\right)$.

الحل : ق$'$(س) = قاس ظاس + قا^{٢}س = قاس(ظاس + قاس)

ق$'\left(\dfrac{\pi}{٤}\right)$ = قا$\dfrac{\pi}{٤}\left(\text{ظا}\dfrac{\pi}{٤} + \text{قا}\dfrac{\pi}{٤}\right)$ = ٢ + $\sqrt{٢}$ (لماذا؟)

مثال ٤ : إذا كانت ص = قتاس ظتاس ، أثبت أن: $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قتاس − ٢قتا^{٣}س

الحل : $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $^{-}$قتاس ظتاس ظتاس + قتاس × $^{-}$قتا^{٢}س = $^{-}$قتاس ظتا^{٢}س − قتا^{٣}س

= $^{-}$قتاس ($^{-}$١ + قتا^{٢}س) − قتا^{٣}س

= قتاس − قتا^{٣}س − قتا^{٣}س = قتاس − ٢قتا^{٣}س

تمارين ١ - ٣

١ جد $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍ مما يأتي:

أ ص = ٢ جتاس − ٢ ظاس

ب ص = $\frac{١ - قاس}{١ + قاس}$

جـ ص = $\frac{س}{قتاس + ظتاس}$

د ص = س^{٢}قاس

٢ إذا كانت ص = ظاس ، س زاوية حادة أثبت أن: $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ = ٢ص(١ + ص^٢).

٣ إذا كانت ص = $\frac{جاس}{س}$ ، س ≠ ٠ ، أثبت أن: صً + $\frac{٢}{س}$ صَ + ص = ٠

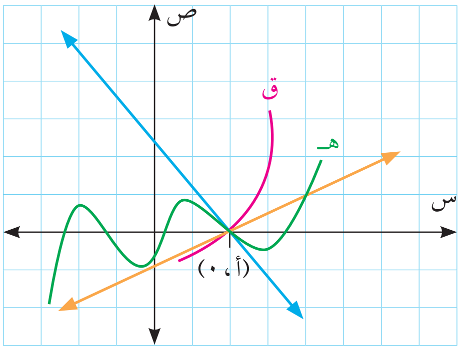
٤ إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^٢ − جتاس ، س ∈ [−٢ π ، ٢ π] ،

جد مجموعة قيم س التي تجعل قً(س) = ٠

١ – ٤ قاعدة لوبيتال، ومشتقة الاقتران الأسّي واللوغاريتمي (L'Hôpital's Rule)

أولاً: قاعدة لوبيتال

نشاط ١: قال أحمد لمعلم الرياضيات: اتفقت أنا وزملائي بأن نسمي النقطة (أ ، ٠) بالنقطة الذهبية قال له المعلم: لماذا يا أحمد، أجاب أحمد: لأنه إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين كثيري حدود يمران بالنقطة (أ ، ٠) فإن:



١) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \left(\text{ق(س)} \pm \text{هـ(س)}\right) = ٠$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \left(\text{ق(س)} \times \text{هـ(س)}\right) = ٠$

أما $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ بالتعويض المباشر $\dfrac{\text{ق(أ)}}{\text{هـ(أ)}} = \dfrac{٠}{٠}$

تعلمت في الصف الحادي عشر كيفية إيجاد النهايات التي تكون على الصورة غير المعينة $\left(\dfrac{٠}{٠}\right)$ ولاحظت أن كثيراً منها يحتاج إلى خطواتٍ عديدةٍ وأحياناً معقدةٍ، وهنا سوف نتعلم طريقة جديدة لحساب قيمة بعض هذه النهايات.

قاعدة لوبيتال:

إذا كان ق(س)، هـ(س) قابلين للاشتقاق عند النقطة س = أ ، ل ∈ ح ، وكانت

$\dfrac{\text{ق(أ)}}{\text{هـ(أ)}} = \dfrac{٠}{٠}$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \dfrac{\text{قَ(س)}}{\text{هـَ(س)}} = \text{ل}$ فإن $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \text{ل}$

البرهان: (للمعرفة فقط) بما أن ق(أ) = ٠ ، هـ(أ) = ٠

فإن $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \dfrac{\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}}{\text{هـ(س)} - \text{هـ(أ)}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \dfrac{\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}}{\text{هـ(س)} - \text{هـ(أ)}} \times \dfrac{(\text{س} - \text{أ})}{(\text{س} - \text{أ})}$

$$= \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}}{(\text{س} - \text{أ})} \times \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - \text{أ})}{\text{هـ(س)} - \text{هـ(أ)}}$$

$$= \frac{\text{قَ(أ)}}{\text{هـَ(أ)}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(لماذا؟)}$$

ملاحظة:

سوف لا نتعرض لحالات لوبيتال الأخرى.

مثال ١ : جد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل : من خلال التعويض المباشر تكون $\frac{\text{جا}\,0}{0} = \frac{0}{0}$ ، ومنها يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال

فتكون $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس}}{1} = \text{جتا}\,0 = 1$

نشاط ٢: استخدمت سعاد المشتقة الأولى في إيجاد قيمة $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{س}}$ فكتبت:

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}\,0 - \text{جتاس}}{\text{س} - 0} = - \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس} - \text{جتا}\,0}{\text{س} - 0}$$

وهي على الصورة $- \left(\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(0)}}{\text{س} - 0} \right) = -\text{قَ(0)} = \text{جا}\,0 = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(لماذا؟)}$

وعند استخدام قاعدة لوبيتال في إيجاد قيمة النهاية

فإن $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

مثال ٢ : جد $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل : من خلال التعويض المباشر تكون $\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$

ومنها $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2} = \underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{2\text{س}}{1} = 4$

ملاحظة:

عند استخدام قاعدة لوبيتال، إذا كانت $\frac{\text{ق}'(\text{أ})}{\text{هـ}'(\text{أ})} = \frac{٠}{٠}$

فإننا نستمر بتطبيق القاعدة حتى نحصل على عدد حقيقي.

مثال ٣ : جد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}^{٢}}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل : من خلال التعويض المباشر تكون $\frac{١ - \text{جتا}٠}{٠^{٢}} = \frac{٠}{٠}$

$$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}^{٢}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{٢\text{س}} \quad \text{لكن} \quad \frac{\text{جا}٠}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

نطبق قاعدة لوبيتال مرةً أخرى

$$\text{فتكون} \quad \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{٢\text{س}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس}}{٢} = \frac{١}{٢}$$

مثال ٤ : إذا كان $\text{ق}'(٢) = ٥$ جد:

$$\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٢ - ٥\text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}}$$

الحل : نفرض $٢ - ٥\text{هـ} = \text{و}$ ، ومنها $\text{هـ} = \frac{٢ - \text{و}}{٥}$ ، وعندما $\text{هـ} \leftarrow ٠$ فإن $\text{و} \leftarrow ٢$

$$\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٢ - ٥\text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{و} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{و}) - \text{ق}(٢)}{\frac{٢ - \text{و}}{٥}}$$

$$= -٥ \underset{\text{و} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{و}) - \text{ق}(٢)}{\text{و}}$$

$$= -٥ \times \text{ق}'(٢) = -٥ \times ٥ = -٢٥$$

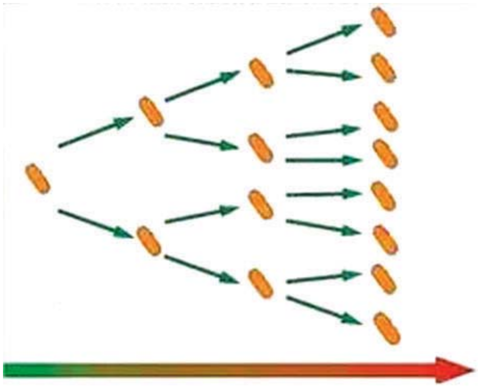
ثانياً: مشتقة الاقتران الأسّي واللوغاريتمي

نشاط ٣: تعتبر البكتيريا من الكائنات المجهرية الدقيقة بدائية النواة، وواسعة الانتشار، نتعامل معها يومياً دون أن نراها وتعتبر من أوائل الكائنات الحية التي وجدت على الأرض.

هناك بعض أنواع البكتيريا تنشطر الخلية الواحدة فيها كل ٢٠ دقيقة إلى خليتين.

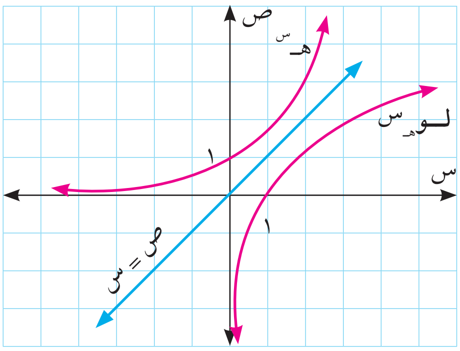
توصل العلماء إلى أن عدد البكتيريا في الساعة ن يساوي $٢^{٣ن}$.

بعد كم دقيقة سيكون عدد خلايا البكتيريا ١٠٧٣٧٤١٨٢٤ خلية؟



تعلمت سابقاً الاقتران الأسّي الذي يكتب على الصورة ق(س) = $أ^{س}$ ، أ ≠ ١ ، أ > ٠ والاقتران اللوغاريتمي على الصورة ل(س) = $لــو_{أ}$ س ، س > ٠ ، أ ≠ ١ ، أ > ٠

وسوف نقتصر دراستنا على الاقتران الأسّي الطبيعي ق(س) = $هـ^{س}$ ، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، ق(س) = $لــو_{هـ}$ س ، حيث هـ تسمى العدد النبيري.



تعريف:

العدد النبيري هو العدد الحقيقي، غير النسبي، الذي قيمته التقريبية هـ ≅ ٢,٧١٨٢٨١٨

ويحقق العلاقة الآتية: $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{هـ^{س} - ١}{س} = ١$

ونورد بعض خصائص الاقترانين:

الاقتران الأسّي الطبيعي / مجاله ح

١) $\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س}+\text{ص}}$

٢) $\dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{ص}}} = \text{هـ}^{\text{س}-\text{ص}}$

٣) $(\text{هـ}^{\text{س}})^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س ص}}$

٤) $\text{هـ}^{٠} = ١$

٥) $\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \text{س}$ ، $\text{س} > ٠$

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي / مجاله ح^{+}

١) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$

٢) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$

٣) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{س} > ٠$

٤) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} = \text{س}$

قاعدة (١):

إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، فإن $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}$ ، $\text{ص} > ٠$

قاعدة (٢):

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن $\text{قَ}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

البرهان (للمعرفة فقط):

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{و}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}+\text{و}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{و}} = \underset{\text{و}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}+\text{و}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{و}}$$

$$= \underset{\text{و}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{و}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{و}} = \underset{\text{و}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{\text{و}} - ١)}{\text{و}}$$

$$= \text{هـ}^{\text{س}} \underset{\text{و}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(\text{هـ}^{\text{و}} - ١)}{\text{و}} = \text{هـ}^{\text{س}} \times ١ = \text{هـ}^{\text{س}}$$

مثال ٤ : إذا كان ق(س) = $\text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ + قتاس ، فجد قَ(س) .

الحل : قَ(س) = $\text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٣\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ − قتاس ظتاس

قاعدة (٣):

إذا كان ق(س) = $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، س > ٠ ، فإن قَ(س) = $\frac{١}{\text{س}}$

مثال ٥ : إذا كان ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{١٠}$ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س = ٥

الحل : ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{١٠} = ١٠\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

ومنها يكون $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١٠ \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{١٠}{\text{س}}$

$$\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=٥} = \frac{١٠}{٥} = ٢$$

مثال ٦ : بيّن باستخدام قاعدة لوبيتال ما يأتي:

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} = ١$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١} = \frac{١}{٢}$

الحل : ١) بالتعويض المباشر $\frac{\text{هـ}^{٠} - ١}{٠} = \frac{٠}{٠}$ لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال

ومنها $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١} = \text{هـ}^{٠} = ١$

٢ بالتعويض المباشر تكون $\frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\ ١}{١^{٢} - ١} = \frac{٠}{٠}$ لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال

ومنها $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{س}}{\text{س}^{٢} - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\frac{١}{\text{س}}}{٢\text{س}} = \frac{١}{٢}$

مثال ٧ : جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

١ $\text{ق(س)} = \text{س هـ}^{\text{س}}$

٢ $\text{ع(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{س}$ حيث $\text{س} > ٠$

الحل :

١ $\text{قَ(س)} = \text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}$

٢ $\text{عَ(س)} = \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{س} = \text{هـ}^{\text{س}} \left(\frac{١}{\text{س}} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{س}\right)$

تمارين ١ - ٤

١ احسب النهايات الآتية باستخدام قاعدة لوبيتال:

أ) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}-١} - \text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$ ب) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٤\text{س}}{\text{ظاس}}$ جـ) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - \text{جاس}}{\text{س}^{٣}}$

٢ جد $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كلّ مما يأتي:

أ) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}$

ب) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{س} > ٠$

جـ) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\dfrac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٨}}}$ ، $\text{س} > ٠$

د) $\text{ص} = (\text{هـ}^{\text{س}} - ٢)(\text{هـ}^{\text{س}} + ٢)$

٣ إذا كان $\text{قَ}(١) = -٢$ ، $\text{ق}(٣) = -٢$ ، $\text{قَ}(٣) = ٤$ جد قيمة النهايات الآتية:

أ) $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(٣ + ٥\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{١٠\text{هـ}}$

ب) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{ق}(١) - \text{ق}(\text{س})}$

٤ إذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{هـ}^{\text{س}} + ١$ ، فجد قيمة/ قيم س التي تجعل $\text{صَ} = \text{ص}$

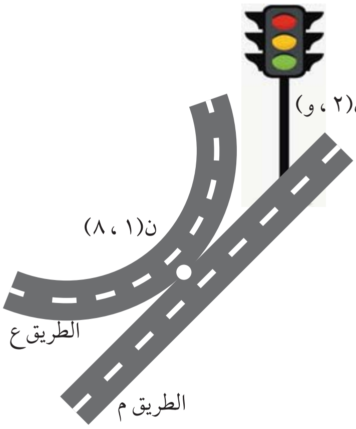
٥ أثبت باستخدام قاعدة لوبيتال أنّ: $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \dfrac{\text{ن}}{\text{م}}(\text{أ})^{\text{ن}-\text{م}}$ ، $\text{أ} \neq ٠$

٦ جد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س ق}(١) - \text{ق}(\text{س})}{\text{س} - ١}$ باستخدام قاعدة لوبيتال، علماً بأن $\text{قَ}(١) = ٣$ ، $\text{ق}(١) = ٦$

٧ إذا كان $\text{قَ}(٢) = ٣$ ، $\text{قً}(٢) = ٥$ ، جد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{قَ}(٢\text{س}) - \text{قَ}(٢)}{\text{س} - ١}$

١ - ٥ تطبيقات هندسية وفيزيائية (Geometric and Physical Applications)

أولاً: تطبيقات هندسية:

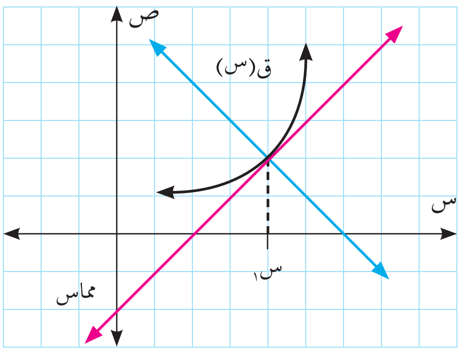


نشاط ١: يمثل الشكل المجاور طريقين م ، ع أحدهما مستقيم والآخر منحني، يلتقيان عند الموقع ن، والذي تمثله النقطة (١ ، ٨) في مستوى إحداثي متعامد، فإذا كانت معادلة الطريق ع هي:

ص = ٤س^{٢} + ٤س

١ جد معادلة الطريق م علماً بأن الطريقين متماسان عند النقطة ن.

٢ إذا كانت النقطة ل (٢ ، و) تمثل موقع إشارة ضوئية في مستوى الطريقين، فما قيمة (و) بحيث تقع الإشارة الضوئية على الطريق م؟



نلاحظ في الشكل المجاور أن معدل التغير للاقتران ق(س) (ميل المنحنى) عند س$_{١}$ هو ميل المماس المرسوم للمنحنى وتساوي قَ(س$_{١}$) ونسمي النقطة (س$_{١}$ ، ق(س$_{١}$)) نقطة التماس.

تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند النقطة أ (س$_{١}$ ، ق(س$_{١}$))، فإن ميل المنحنى عند النقطة أ هو ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س)، ويساوي قَ(س$_{١}$) .

ويعرف العمودي على منحنى الاقتران، بأنه العمودي على المماس للمنحنى عند نقطة التماس.

مثال ١ : جد ميل منحنى الاقتران ق(س) = $س^٣$ + ٥س عند س = ١، ثم جد معادلتي المماس والعمودي على المماس عند تلك النقطة.

الحل : ميل المنحنى عند س = ١ يساوي قَ(١)

قَ(س) = $٣س^٢$ + ٥ ومنها قَ(١) = ٨ = ميل المماس

لكن نقطة التماس هي (١ ، ق(١)) = (١ ، ٦)

معادلة المماس هي: ص − $ص_١$ = م(س − $س_١$)

أي: ص − ٦ = ٨(س − ١) ومنها ص = ٨س − ٢

ميل العمودي على المماس = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}} = \frac{-١}{٨}$

ومنها تكون معادلة العمودي على المماس هي:

٨ص + س − ٤٩ = ٠ (تحقق من ذلك)

مثال ٢ : إذا كان المماس لمنحنى ق(س) = $\frac{٤}{س}$ ، س > ٠ ، يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، أثبت أن العمودي على المماس عند نقطة التماس لمنحنى ق(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٠).

الحل : نفرض نقطة التماس أ($س_١$ ، $ص_١$)

ميل المماس = ظا ١٣٥ = ⁻١ ، قَ(س) = $\frac{-٤}{س^٢}$

لكن ميل المنحنى عند $س_١$ = $\frac{-٤}{س_١^٢}$

ومنها ⁻١ = $\frac{-٤}{س_١^٢}$

إذن $س_١$ = ٢ لأن $س_١$ > ٠

نقطة التماس هي (٢ ، ٢) ، ومنها ميل العمودي = $\frac{-١}{-١}$ = ١

معادلة العمودي هي ص − ٢ = ١(س − ٢) ومنها ص = س

النقطة (٠ ، ٠) تقع على العمودي على المماس.

أي أن العمودي على المماس يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

مثال ٣ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = \frac{س^٢}{هـ^س}$ عند النقطة التي إحداثيها السيني = ١

الحل : $ق\bar{}(س) = \frac{٢س هـ^س - س^٢ هـ^س}{(هـ^س)^٢}$ ومنها يكون ميل المماس = $ق\bar{}(١) = \frac{١}{هـ}$ (لماذا ؟)

عندما $س_١ = ١$ ، فإن $ص_١ = \frac{١}{هـ}$ فتكون معادلة المماس هي:

$ص - \frac{١}{هـ} = \frac{١}{هـ}(س - ١)$ ، ومنها هـ ص = س

مثال ٤ : إذا كان المستقيم $ص = {}^-٣س + جـ$ يمس منحنى $ق(س) = {}^-٢س^٢ + ٥س + ١$

جد نقطة/ نقط التماس.

الحل : نفرض أن نقطة التماس $(س_١ ، ص_١)$ ، $ق\bar{}(س) = {}^-٤س + ٥$

وبما أن ميل المماس = ميل المنحنى

إذن $^-٣ = {}^-٤س_١ + ٥$ ومنها $س_١ = ٢$

نقطة التماس = (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٣) (تحقق من ذلك)

مثال ٥ : إذا كان المستقيم $ص = جـ س + ٥$ يمس منحنى الاقتران $ق(س) = أس^٣ + ب س^٢$

عند النقطة $(^-١ ، {}^-٣)$ جد قيم أ ، ب ، جـ

الحل : النقطة $(^-١ ، {}^-٣)$ تحقق معادلة المستقيم، ومنها $^-٣ = جـ \times {}^-١ + ٥$

$^-٨ = {}^-جـ$ أي أن جـ = ٨ ومنها $ص = ٨س + ٥$

لكن النقطة $(^-١ ، {}^-٣)$ تحقق معادلة المنحنى

$^-٣ = أ \times (^-١)^٣ + ب \times (^-١)^٢$ أي أن $^-٣ = {}^-أ + ب$ ... (١)

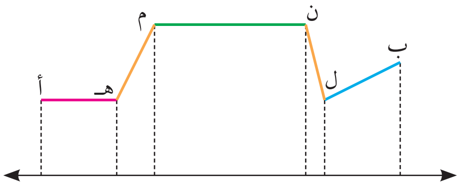
كما أن ميل المماس = ميل المنحنى عند النقطة $(^-١ ، {}^-٣)$

ومنها $٣أس^٢ + ٢ب س \Big|_{س=^-١} = ٨$ ومنها $٣أ - ٢ب = ٨$ ... (٢)

وبحل المعادلتين ينتج أن: أ = ٢ ، ب = $^-١$

ثانياً: تطبيقات فيزيائية:

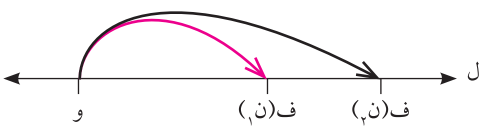
نشاط ٢: الشكل المجاور يمثل المسار (الملون) بين مدينتين أ ، ب ، انتقلت سيارة من المدينة أ باتجاه المدينة ب، ثم عادت إلى المدينة أ. هل الزمن الذي تستغرقه السيارة في الإياب يتساوى مع الزمن الذي استغرقته في الذهاب؟



لتكن (و) نقطة على المستقيم ل وتحرك جسم عليه بحيث كانت ف تمثل بعد الجسم عن النقطة (و) بعد ن ثانية فإن:

السرعة المتوسطة في الفترة $[ن_١ ، ن_٢]$

تساوي $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$



تعريف:

السرعة اللحظية (ع) عند الزمن ن هي ع(ن) = $\frac{د ف}{د ن} = \bar{ف}$

التسارع اللحظي (ت) عند الزمن ن هو $\frac{د ع}{د ن} = \frac{د^٢ ف}{د ن^٢} = \bar{\bar{ف}}$

مثال ٦: تحرك جسم على خط مستقيم، بحيث إن بعده عن نقطة ثابتة (و) يتحدد بالعلاقة ف = $ن^٣ - ٩ن^٢ + ٧$ حيث ف بعده بالأمتار ، ن الزمن بالثواني، جد:

١) السرعة المتوسطة للجسم في الفترة [١ ، ٣]

٢) تسارع الجسم عندما يعكس الجسم من اتجاه حركته.

الحل : ف = $ن^٣ - ٩ن^٢ + ٧$

١) السرعة المتوسطة $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١} = \frac{-٤٧ - -١}{٣ - ١} = -٢٣$ م/ ث.

٢ ف$\bar{}$(ن) = ع(ن) = ٣ن^{٢} − ١٨ن

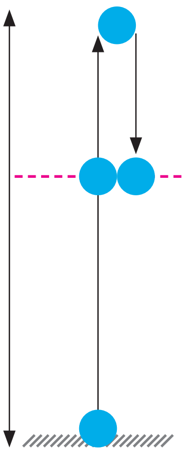
يعكس الجسم اتجاه حركته في اللحظة التي تتغير فيها إشارة ع

أي عندما ع(ن) = ٠ ومنها ٣ن^{٢} − ١٨ن = ٠ ⇐ ٣ن(ن − ٦) = ٠ ، ن = ٠، ن = ٦ ثوانٍ

يعكس الجسم اتجاه حركته بعد ٦ ثوانٍ

ت(ن) = ٦ن − ١٨ ⇐ ت(٦) = ٦ × ٦ − ١٨ = ١٨ م/ث^{٢}

مثال ٧ : قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض، بحيث يتحدد بعده عن سطح الأرض بالعلاقة ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن^{٢} ،
حيث ف: ارتفاع الجسم بالأمتار، ن: الزمن بالثواني، جد:



١ أقصى ارتفاع يصله الجسم.

٢ سرعة الجسم وهو على ارتفاع ١٥ م من سطح الأرض.

٣ المسافة التي قطعها الجسم خلال الثواني الأربعة الأولى.

الحل : ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن^{٢}

١ عندما يصل الجسم أقصى ارتفاع فإن ع(ن) = ٠

ع(ن) = ٢٠ − ١٠ن = ٠ أي أن ن = ٢ ثانية

∴ أقصى ارتفاع = ف(٢) = ٢٠ × ٢ − ٥ × ٤ = ٢٠م

٢ عندما يكون الجسم على ارتفاع ١٥م فإن ف(ن) = ١٥

⇐ ٢٠ن − ٥ن^{٢} = ١٥ ⇐ ٥ن^{٢} − ٢٠ن + ١٥ = ٠

⇐ (ن − ١)(ن − ٣) = ٠ ومنها ن = ١ ، ن = ٣

يكون الجسم على ارتفاع ١٥م عندما:

- ن = ١ أي أن ع(١) = ٢٠ − ١٠ × ١ = ١٠ م/ث، الجسم صاعد.
- ن = ٣ ، أي أن ع(٣) = ٢٠ − ١٠ × ٣ = $^{-}$١٠ م/ث، (ماذا تعني السرعة السالبة؟)

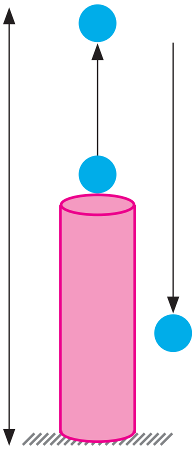
٣ عندما ن = ٤ ثانية يكون الجسم على ارتفاع : ف(٤) = ٢٠ × ٤ − ٥ × ١٦ = ٠م ،

أي يكون الجسم قد وصل سطح الأرض،

وتكون المسافة المقطوعة = ٢ × أقصى ارتفاع − ف(٤) = ٤٠م

مثال ٨ : قذف جسم رأسياً إلى أعلى من قمة برج بحيث إن ارتفاعه عن البرج بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة

ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن^{٢} ، جد:



١ ارتفاع البرج علماً بان أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض = ١٨٠م

٢ سرعة ارتطام الجسم بسطح الأرض.

٣ المسافة الكلية المقطوعة خلال الثواني السبعة الأولى.

الحل :

١ عند أقصى ارتفاع عن قمة البرج تكون ع(ن) = ٠

ع(ن) = فَ(ن) = ٣٠ − ١٠ن = ٠ ومنها ن = ٣

أقصى ارتفاع عن قمة البرج = ف (٣) = ٤٥م

لكن أقصى ارتفاع عن سطح الأرض= ١٨٠م ، ارتفاع البرج = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥م

٢ يرتطم الجسم بالأرض عندما تكون ف(ن) = $^{-}$١٣٥م (فسّر).

بحل المعادلة ينتج أن ن = ٩ ومنها السرعة ٣٠ − ١٠ × ٩ = $^{-}$٦٠ م/ ث

٣ عندما ن = ٧ الإزاحة = $^{-}$٣٥ أي أن المسافة المقطوعة = ١٢٥م (لماذا؟)

تمارين ١ - ٥

١ جد النقطة/ النقط على منحنى ق(س) = $س^٢$ – ٢س + ١ التي يكون عندها المماس للمنحنى عمودياً على المستقيم س + ٢ص – ٤ = صفر

٢ جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = ٣ – $ظا^٢$س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

٣ إذا كان المماس لمنحنى ق(س) = $لو_{هـ} \frac{س}{٢}$ عندما س = ٢ يقطع محوري السينات والصادات في النقطتين ب ، جـ على الترتيب، جد مساحة المثلث م ب جـ ، حيث م نقطة الأصل.

٤ إذا كان المستقيم س = أ – ٦ص يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٣س}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢ ، جد قيم أ.

٥ قذف جسم رأسياً إلى أعلى وَفق العلاقة ف = ٤٠ن – ٥$ن^٢$، حيث ف ارتفاعه بالأمتار، ن بالثواني. جد سرعة الجسم عندما تكون المسافة الكلية المقطوعة ١٠٠ م.

٦ من نقطة على سطح الأرض قذف جسم رأسياً إلى أعلى، وكان ارتفاعه ف بالأمتار بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة ف = ٣٠ن – ٥$ن^٢$،
جد:

أ أقصى ارتفاع يصله الجسم.

ب سرعة الجسم وهو نازل عندما يكون على مستوى سطح العمارة التي ترتفع ٤٠ م.

١ - ٦ قاعدة السلسلة (Chain Rule)

نشاط ١: تعتبر التروس (المسننات) من الأجزاء الميكانيكية المهمة التي تسهم في نقل الحركة وهي عبارة عن عجلات دائرية لها بروزات تتشابك مع أسنان الترس الآخر، وهكذا لتشكل سلسلة من التروس بأحجام مختلفة، تسهم في تسهيل الحركة المطلوبة ونقلها.
بالاعتماد على الشكل المجاور.

١ حدد اتجاه الحركة للترسين: الأحمر والأصفر علماً بأن حركة الأزرق باتجاه عقارب الساعة.

٢ إذا فرضنا أن الترس الأزرق يدور س مرة، فإن الأحمر (ح) يدور $\frac{٤}{٣}$ س مرة (ح = $\frac{٤}{٣}$ س)، أما الأصفر (ص) فيدور $\frac{١}{٢}$ ح مرة (ص = $\frac{٢}{٣}$ س).
(لاحظ عدد المسننات في كل ترس). هل يمكن إيجاد $\frac{د ص}{د س}$؟

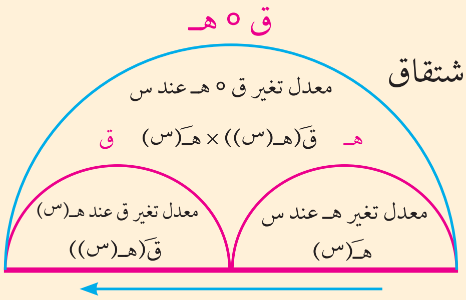
تواجهنا بعض الاقترانات مثل ق(س) = (س^{٢} + ١)^{٣}، والمطلوب إيجاد قَ(س)، وهنا نلجأ إلى فك المقدار أولاً ثم اشتقاق الناتج، أو استخدام مشتقة حاصل الضرب، ولكن هذه الطريقة تزداد صعوبةً وتعقيداً كلما كان الأسّ كبيراً، وهذا يدعو إلى البحث عن طريقة أسهل لإيجاد مشتقة هذه الاقترانات. فمثلاً، إذا كان ص = ق(س) = (س^{٢} + ١)^{٣}، وفرضنا أن ع = هـ(س) = س^{٢} + ١ فيكون ص = ق(ع) = ع^{٣}

أتذكر:

(ق ∘ هـ) (س) = ق(هـ(س)) هو الاقتران المركب من ق ، هـ

قاعدة السلسلة:

إذا كانت ص = ق(ع) ، ع = هـ(س)
وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق و ق(س) قابلاً للاشتقاق
عند هـ(س) ، مدى هـ ⊆ مجال ق
فإن $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$
أي أن (ق ∘ هـ)َ (س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)



مثال ١ : إذا كان $ق(س) = س^{٣} + س$ ، $هـ(س) = س^{٢}$ ، جد:

١ $(ق \circ هـ)'(س)$ ٢ $(هـ \circ هـ)'(٢)$

الحل : $ق'(س) = ٣س^{٢} + ١$ ، $هـ'(س) = ٢س$

١ $(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= ق'(س^{٢}) \times ٢س = (٣(س^{٢})^{٢} + ١) \times ٢س = ٦س^{٥} + ٢س$

٢ $(هـ \circ هـ)'(٢) = هـ'(هـ(٢)) \times هـ'(٢)$

$= هـ'(٤) \times هـ'(٢) = ٨ \times ٤ = ٣٢$

مثال ٢ : إذا كان $ص = ع^{٢} - ٥ع$ ، $ع = \frac{١}{س + ١}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ٠$

الحل : $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = (٢ع - ٥) \times \frac{-١}{(س + ١)^{٢}}$ ، عندما $س = ٠$ فإن $ع = ١$

ومنها $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س = ٠ ، ع = ١} = (٢ - ٥) \times \frac{-١}{(٠ + ١)^{٢}} = -٣ \times -١ = ٣$

مثال ٣ : جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $ص = س\, ق(س^{٢} + ١)$ عندما $س = ٢$، علماً بأن $ق(س)$ قابل للاشتقاق، $ق'(٥) = ٣$ ، $ق(٥) = -١$

الحل : $\frac{دص}{دس} = ١ \times ق(س^{٢} + ١) + س \times ٢س\, ق'(س^{٢} + ١)$

ميل المماس $= \left.\frac{دص}{دس}\right|_{س = ٢} = ق(٥) + ٨\, ق'(٥) = -١ + ٢٤ = ٢٣$

ميل المماس = ٢٣ ، نقطة التماس هي $(٢ ، -٢)$. (لماذا؟)

معادلة المماس هي $ص - -٢ = ٢٣(س - ٢)$ ومنها $ص = ٢٣س - ٤٨$

نتيجة:

إذا كان ص = $(\text{هـ}(س))^{ن}$ ، وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق ، ن ∈ ص

فإن $\frac{د ص}{د س} = ن(\text{هـ}(س))^{ن-1} \times \text{هـَ}(س)$

مثال ٤ : إذا كان $ق(س) = \left(\frac{س + 1}{س - 1}\right)^{5}$ ، جد قَ(٢)

الحل : $قَ(س) = 5\left(\frac{س + 1}{س - 1}\right)^{4} \times \frac{(س - 1) \times 1 - 1(س + 1)}{(س - 1)^{2}}$

$= 5\left(\frac{س + 1}{س - 1}\right)^{4} \times \frac{-2}{(س - 1)^{2}}$

$قَ(2) = 5 \times 3^{4} \times -2 = -810$

نشاط ٢: إذا كان ص = $(\text{قاس} + \text{ظاس})^{ن}$ فإن:

$\frac{د ص}{د س} = ن(\text{قاس} + \text{ظاس})^{ن-1}$ (..........)

$= ن\ \text{قاس}(\text{قاس} + \text{ظاس})^{ن-1} (\text{قاس} + \text{ظاس}) =$ ....

ملاحظة:

يمكن تعميم قاعدة السلسلة لتشمل أكثر من اقترانين.

مثال ٥ : إذا كان ص = $(ع^{2} + \frac{64}{ع})$، ع = $س^{3}$، س = أ م + ٤ ، جد أ بحيث $\left.\frac{د ص}{د م}\right|_{س = 2} = 90$

الحل : $\frac{د ص}{د م} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} \times \frac{د س}{د م}$

أي أن $\frac{د ص}{د م} = (2ع - \frac{64}{ع^{2}}) \times 3س^{2} \times أ$ ، عندما س = ٢ ، فإن ع = ٨

ومنها $\left.\frac{د ص}{د م}\right|_{س = 2} = (16 - 1) \times 12 \times أ = 90$ ومنها أ = $\frac{1}{2}$

قاعدة:

إذا كان ك(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن:

- ق(س) = $\text{هـ}^{\text{ك(س)}}$ قابل للاشتقاق، وتكون قَ(س) = كَ(س) $\text{هـ}^{\text{ك(س)}}$
- م(س) = $\text{لـو}_{\text{هـ}}$ ك(س) ، ك(س) > ٠ قابل للاشتقاق وتكون مَ(س) = $\dfrac{\text{كَ(س)}}{\text{ك(س)}}$

مثال ٦ :

١ إذا كان ص = $\text{هـ}^{\text{جتاس}}$ فجد $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س = $\dfrac{\pi}{٢}$

٢ إذا كان ص = $\text{لـو}_{\text{هـ}}$ $\text{س}^{٢}$ ، فبيّن أن: صً . $\text{هـ}^{\text{ص}}$ = −٢

الحل :

١ $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = −جاس $\text{هـ}^{\text{جتاس}}$ ومنها $\left.\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٢}}$ = −١ $\text{هـ}^{٠}$ = −١

٢ ص = ٢$\text{لـو}_{\text{هـ}}$ س ومنها صَ = $\dfrac{٢}{\text{س}}$ ، صً = $\dfrac{-٢}{\text{س}^{٢}}$ = $\dfrac{-٢}{\text{هـ}^{\text{ص}}}$ (لماذا؟)

أي أن صً . $\text{هـ}^{\text{ص}}$ = −٢

تمارين ١ - ٦

١ جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س = ١ لكل مما يأتي:

أ ص = $(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)^{-٣}$

ب ص = $\text{س}^{٢}$ قا $\frac{\pi}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

جـ ص = ٥ع^{٢} − ٧، ع = $\frac{١}{\text{س}^{٢} + ١}$

د ص = ظا $\left(\frac{\pi}{\text{س}}\right)$ + جتا^{٢}(π س) ، س ≠ ٠

هـ ص = (لو$_{\text{هـ}}$ س)^{٣} ، س > ٠

٢ إذا كان ق(س) = $\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{م}(\text{س}))}{٢\text{س}}$ ، وكان م(١) = هـ^{٢} ، مَ(١) = ٢هـ ، فجد قَ(١).

٣ جد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ ق(س) = هـ$^{\text{س}^{٢}+\text{س}}$

ب ع(س) = لو$_{\text{هـ}}$(س^{٣} − ٣س^{٢}) ، س > ٣

٤ إذا كان ق(س) = س^{٢}م(س^{٢} + ١) اعتمد على الجدول المجاور في إيجاد قً(١).

م(٢)	مَ(٢)	مً(٢)
٥	−١	١

٥ إذا كان ص = ق^{٣}(س) − ق(س^{٣})، جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س = ٢

علماً بأن ق(٢) = ١ ، قَ(٢) = −٢ ، قَ(٨) = ٢.

٦ إذا كان ص = ن^{٢} + ٥ن وكانت $\left.\frac{\text{د ن}}{\text{د س}}\right|_{\text{ن}=١}$ = ٢ ، جد $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{ن}=١}$.

٧ إذا كان ق(س) = س + $\frac{١}{\text{س}}$ ، هـ(س) = جتاس ، س ≠ ٠ ، أثبت أن: (ق ∘ هـ)َ(س) = جا^{٣}س قا^{٢}س.

٨ جد: أ $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}(٢\text{س} + \text{هـ}) - \text{ظا } ٢\text{س}}{\text{هـ}}$

ب $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(١ + ٣\text{هـ}) - \text{ق}(١ - ٣\text{هـ})}{١٠ \text{ هـ}}$ ، علماً بأن قَ(١) = −٢

١ - ٧ الاشتقاق الضمني (Implicit Differentiation)

نشاط ١: شب حريق في إحدى البنايات، وهرعت قوات الدفاع المدني للمشاركة في إطفاء الحريق وإنقاذ المواطنين، فاستخدم أحد رجال الإطفاء سلّماً طوله ٢٠ متراً للوصول إلى أحد شبابيك البناية، ولكن السلّم بدأ بالتزحلق بحيث يبتعد أسفل السلّم عن البناية بشكلٍ أفقيٍّ.

تلاحظ من الشكل أن العلاقة بين س ، ص هي $س^{٢} + ص^{٢} = ٤٠٠$

ما اتجاه سير أعلى السلّم ؟ وهل يمكنك إيجاد $\frac{د ص}{د س}$ بناءً على ما تعلمته سابقاً؟

يمكنك كتابة العلاقة السابقة على الصورة $ص = \sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}$ ، واستخدام قاعدة السلسلة في إيجاد مشتقة العلاقة.

سبق لك إيجاد مشتقة الاقتران ص = ق(س) عندما تكون العلاقة بين المتغيرين صريحة (ص معرفة بدلالة س)، ولكن في العلاقة $س^{٢} + ٥ص^{٢} = س ص - ٣$ ليس من السهل كتابة ص بدلالة س ، فنسميها علاقةً ضمنيةً، ونجد $\frac{د ص}{د س}$ بطريقة تسمى الاشتقاق الضمني، حيث يتم اشتقاق كل من طرفي العلاقة بالنسبة إلى س ضمن قواعد الاشتقاق.

مثال ١ : إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} + ١ = ٤س - ص$ ، جد $\frac{د ص}{د س}$ ، ثم جد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، ١)

الحل : نشتق طرفي العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س :

$٢س + ٢ص \bar{ص} = ٤ - \bar{ص}$

$٢ص \bar{ص} + \bar{ص} = ٤ - ٢س$ (تجميع الحدود التي تحوي $\bar{ص}$ على جهة واحدة)

$\bar{ص}(٢ص + ١) = ٤ - ٢س$ (إخراج عامل مشترك $\bar{ص}$ من الطرف الأيمن)

$\Leftarrow \bar{ص} = \frac{٤ - ٢س}{٢ص + ١}$ ومنها $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(١ ، ١) = \frac{٤ - ٢}{٢ + ١} = \frac{٢}{٣}$

مثال ٢ : إذا كان ٣ص = جاس جتا٢ص ، جد $\frac{د ص}{د س}$

الحل : نشتق طرفي العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س

٣صَ = جتاس جتا٢ص + جاس × − ٢ جا٢ص × صَ

٣صَ + ٢ جاس × جا٢ص × صَ = جتاس جتا٢ص

ومنها صَ = $\frac{\text{جتاس} \times \text{جتا٢ص}}{\text{٣ + ٢ جاس} \times \text{جا٢ص}}$

مثال ٣ : جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة (س + ص)^{٣} − ٣ص^{٢} = ٥ ، ص > ٠ ، عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم س + ص = ٢

الحل : بالتعويض بدل س + ص بالعدد ٢ في معادلة المنحنى ينتج أن: ٢ ^{٣} − ٣ص^{٢} = ٥

إذن ص = ١ ، ومنها نقطة التقاطع هي(١ ، ١)

لكن ميل المماس = ميل المنحنى عند النقطة (١ ، ١)

نشتق العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س فينتج ٣(س + ص)^{٢} (١ + صَ) − ٦ص صَ = ٠

وبتعويض النقطة (١ ، ١) ينتج أن: ٣(١ + ١)^{٢} (١ + صَ) − ٦ صَ = ٠ ومنها صَ = −٢

ميل المماس = −٢ وتكون معادلة المماس هي: ص = −٢س + ٣

مثال ٤ : إذا كانت ص = ع^{٣} + ١ ، س^{٢}ع = ع^{٢} − ٢ ، جد $\frac{د ص}{د س}$ ، عندما ع = ٢ ، س > ٠

الحل : $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ع}$ × $\frac{د ع}{د س}$

لإيجاد $\frac{د ع}{د س}$ نشتق العلاقة س^{٢}ع = ع^{٢} − ٢ ضمنياً بالنسبة إلى س وينتج

س^{٢} $\frac{د ع}{د س}$ + ٢س ع = ٢ع $\frac{د ع}{د س}$

ومنها $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}(\text{س}^{٢} - ٢\text{ع}) = -٢\text{س ع}$

أي أن: $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{س ع}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{ع}}$

وبما أن: $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٣\text{ع}^{٢}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{ع}^{٢} \times \frac{-٢\text{س ع}}{(\text{س}^{٢} - ٢\text{ع})} = \frac{-٦\text{س ع}^{٣}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{ع}}$

عندما ع = ٢ ، س = ١ (لماذا)

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=١} = ١٦$

قاعدة:

إذا كانت ص = $\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ ، م ، ن $\in$ ص ، م $\neq$ ن ، ن $\neq$ ٠ ، فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}\,\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}-١}$

نتيجة:

إذا كان ق(س) = $(\text{هـ(س)})^{\text{ن}}$ ، ن $\in$ ح

وكان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن ق$'$(س) = ن $(\text{هـ(س)})^{\text{ن}-١}$ $\times$ هـ$'$(س)

مثال ٥ : إذا كان ق(س) = $(\text{س}^{٣} + ٥\text{س} - ٢)^{\frac{٣}{٤}}$ ، جد ق$'$(٢)

الحل : ق$'$(س) = $\frac{٣}{٤}(\text{س}^{٣} + ٥\text{س} - ٢)^{-\frac{١}{٤}} \times (٣\text{س}^{٢} + ٥)$

$= \frac{٣}{٤} \times \frac{(٣\text{س}^{٢} + ٥)}{\sqrt[٤]{\text{س}^{٣} + ٥\text{س} - ٢}}$

ق$'$(٢) $= \frac{٣}{٤} \times \frac{(٣ \times ٢^{٢} + ٥)}{\sqrt[٤]{٢^{٣} + ٥ \times ٢ - ٢}}$

$= \frac{٣}{٤} \times \frac{١٧}{٢} = \frac{٥١}{٨}$

مثال ٦ : احسب $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{\sqrt[٣]{س + ٧} - ٢}{س - ١}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل : بالتعويض المباشر تكون $\frac{\sqrt[٣]{١ + ٧} - ٢}{١ - ١} = \frac{٠}{٠}$ وبتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{\sqrt[٣]{س + ٧} - ٢}{س - ١} = \lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{\frac{١}{٣}(س + ٧)^{\frac{-٢}{٣}}}{١} = \frac{١}{١٢} \quad ..... \quad \text{(لماذا؟)}$$

مثال ٧ : جد النقط على منحنى العلاقة $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم $ص + ٢س = ٥$

الحل : ميل المماس = ميل المستقيم الموازي له = $^{-}٢$ (لماذا؟)

نشتق العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س : $\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{ص'}{٢\sqrt{ص}} = ٠$ (لماذا)

ومنها $ص' = \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

لكن $\sqrt{ص} = ٣ - \sqrt{س}$

ومنها $ص' = \frac{\sqrt{س} - ٣}{\sqrt{س}} = {}^{-}٢$

أي أن: $٣\sqrt{س} = ٣ \Leftarrow \sqrt{س} = ١ \Leftarrow س = ١$ ومنها $ص = ٤$

أي أن: النقطة المطلوبة هي (١ ، ٤).

نشاط ٢: إذا كان $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} = ٥$س ص ، س ، ص $\neq ٠$

❶ بضرب طرفي المعادلة بالمقدار (س ص) ينتج ٢ص +٣س = ٥س^{٢}ص^{٢}

❷ نشتق طرفي المعادلة ضمنياً: ....

❸ $\frac{د ص}{د س}$ ....

❹ $\frac{د ص}{د س}\Big|_{(١ ، ١)}$ تساوي ....

❺ هل يمكن إيجاد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (٢ ، ٣)؟ ..... (لماذا؟)

نشاط ٣: إذا كانت ص = $\frac{(س + ١)^{٥}(٢ + س)^{٤}}{(س^{٢} + ١)^{٣}}$

لإيجاد $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س = ٠}$ نأخذ لوغاريتم الطرفين فيصبح:

لـوهـ ص = لـوهـ $\frac{(س + ١)^{٥}(٢ + س)^{٤}}{(س^{٢} + ١)^{٣}}$

وبتطبيق قوانين اللوغاريتمات تصبح:

لـوهـ ص = ٥لـوهـ(س + ١) + ٤لـوهـ(٢ + س) − ٣لـوهـ(س^{٢} + ١)

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س تكون $\frac{ص'}{ص}$ = ...

منها $\frac{د ص}{د س}$ = ...

ومنها $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س = ٠}$ = ...

تمارين ١ - ٧

١ جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يأتي :

أ $س^٣ + س ص + ٢ص^٢ = ٥$

ب $ص = \sqrt[٥]{١ - س^٢} + ٣$

جـ $ص = جا(س + ص)$

د $\frac{١}{ص} + \frac{١}{س} = ٢$

٢ جد معادلة العمودي على منحنى الدائرة التي معادلتها $ص = س^٢ - ٣س + ص^٢ = ٢٥$ ، عند كل من نقطتي تقاطعها مع منحنى $ص = س^٢ - ٣س + ٥$

٣ يتحرك جسم على خط مستقيم وَفق العلاقة $ف^٢ = أن^٢ + ٢٤$ حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، جد قيمة أ الموجبة. علماً بأن سرعته بعد ٢ ثانية تساوي ١ م/ ث.

٤ إذا كانت $ف = أجا(٢ن + م)$، $أ \neq ٠$ هي معادلة الحركة لجسيم يتحرك على خط مستقيم، حيث أ ، م عددان ثابتان، أثبت أن: $ت = {}^{-}٤$ ف عددياً. ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني.

٥ إذا كان المستقيم المار بالنقطة $({}^{-}٢ ، ٠)$ يمس منحنى العلاقة $٤س^٢ + ص^٢ = ٤$، جد نقطة/ نقط التماس.

٦ إذا كان $هـ^{ص} + هـ^{س} = هـ^{-ص} + هـ^{-س}$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(-١ ، ١)$.

٧ إذا كانت $س^٢ = لـو_{هـ}(س ص)$ ، $س ، ص > ٠$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(١ ، هـ)$.

٨ إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق وكانت $ص = (ق(س))^م \times (هـ(س))^م$

أثبت أن : $\frac{صَ}{ص} = م\left(\frac{قَ}{ق} + \frac{هـَ}{هـ}\right)(س)$ ، حيث $م \neq ٠$ ، $ق(س) ، هـ(س) \neq ٠$

تمارين عامة

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كلٍ مما يأتي:

١ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٤ وكان متوسط تغير نفس الاقتران في الفترة [٣ ، ٧] يساوي ⁻٥، فما متوسط تغير الاقتران ق(س) في [١ ، ٧]؟

أ) ٢ ب) ١ جـ) ⁻١ د) ⁻٢

٢ إذا كان المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند النقطة (٢ ، ⁻١) يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فما قيمة $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{٢س - ٤}$؟

أ) ⁻١ ب) $\frac{-١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

٣ إذا كان ق(س) = جتا٢س، فما قيمة قً(س) + ٦ق(س) ؟

أ) جتا٢س ب) جا٢س جـ) ٢جتا٢س د) ٢جا٢س

٤ إذا كان ق($\sqrt{٢س + ١}$) = $س^٣$ + ٢ وكان ق قابلاً للاشتقاق، فما قيمة قَ(٣) ؟

أ) ١٦ ب) ٢٩ جـ) ٤٨ د) ١٤٤

٥ إذا كان $س^٢$ – س ص + $ص^٢$ = ٣، فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، ⁻١) ؟

أ) ⁻٢ ب) ⁻١ جـ) ١ د) ٢

٦ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٢ &، س \neq ٥ \\ ١٠س &، س = ٥ \end{cases}$ ، فما قيمة قَ(٥) ؟

أ) ٠ ب) ٤ جـ) ١٠ د) غير موجودة

٧ يتحرك جسيم على خط مستقيم وَفق العلاقة: ف(ن) ع(ن) = ن

ف: المسافة بالأمتار، ن : الزمن بالثواني، ع(ن) السرعة، وكانت ع(٢) = ٣م/ ث، فما قيمة التسارع عندما ن = ٢ ثانية؟

أ) ⁻٨ م/ث^٢ ب) ٨م/ ث^٢ جـ) ١٢ م / ث^٢ د) ⁻١٢م/ ث^٢

٨ إذا كان $\bar{ق}$(س) = $\frac{١}{١ + س^٢}$ ، هـ(س) = ظاس ، فما قيمة (ق ο هـ)$\bar{}$(س) ؟

أ) قا^{٢}س   ب) جتا^{٢}س   جـ) ١   د) قا^{٢}س ظا^{٢}س

٩ إذا كانت ق(س) = (س^٢ + ٧)$^{\frac{٢}{٣}}$ ، فما قيمة $\bar{\bar{ق}}$(١) ؟

أ) $\frac{١١}{١٨}$ ب) $\frac{٤}{٩}$ جـ) $\frac{١٥}{١٨}$ د) $\frac{١}{٢}$

١٠ إذا كانت س = جتاص ، ص ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ ؟

أ) $\frac{١}{\sqrt{١ - س^٢}}$ ب) $\frac{-١}{\sqrt{١ - س^٢}}$ جـ) $\frac{-س}{\sqrt{١ - س^٢}}$ د) $\frac{س}{\sqrt{١ - س^٢}}$

١١ إذا كان (ق ο هـ)$\bar{}$(٣) = ١٥ ، وكان ق(س) = س^٢ – ٩ ، $\bar{هـ}$(٣) = ٥ ، فما قيمة هـ(٣)؟

أ) ٠   ب) ١,٥   جـ) ٢   د) ٣

١٢ أي الاقترانات الآتية يكون قابلاً للاشتقاق على مجاله؟

أ) ق(س) = [س – ٢]   ب) ق(س) = |س – ٢| – |س|

جـ) ق(س) = $\sqrt{س^٢ + ٢س + ١}$ د) ق(س) = [س + ٢] – [س]

٢ إذا كان $\bar{ق}$(١) = –٢ ، ق(٣) = –٢ ، $\bar{ق}$(٣) = ٤ ، جد $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(١ + ٩هـ) – ق(١)}{\sqrt{١ + هـ} – ١}$

٣ جد متوسط التغير للاقتران ص = ق(س) = (س + ١)هـ$^{س^٢ - س}$ عندما تتغير س من ٠ إلى ١

٤ إذا كان ق(٢) = ٣ ، $\bar{ق}$(٢) = –١، جد $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{ق(س^٢ + ٢س – ١) – ق(٢)}{س^٢ – ١}$.

٥ جد قيمة كل من النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال

أ $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{هـ^{٤س} – ١}{ظاس}$ ب $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{هـ^{س^٢} – هـ^{س}}{٢س}$

جـ $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا٢س – جاس}{٢س}$ د $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{١ – جتاس}{س جاس}$

٦ إذا كان $\text{هـ(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{ق(س} - ١) & ، \text{س} \geq ١ \\ \text{ق(س)} & ، \text{س} < ١ \end{cases}$ ، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٠ ، ٢] يساوي ٣ جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) في الفترة [٠ ، ٣]

٧ إذا كانت $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)} - ٢}{\text{س} - ١} = ٣$، ق متصلاً على ح.

جد $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣}\,\text{ق(س)} - \text{ق(١)}}{\text{س} - ١}$

٨ يقف أحمد ونزار على سطح بناية، أفلت أحمد كرةً من السكون وَفق العلاقة $\text{ف}_{١}\text{(ن)} = ٥\text{ن}^{٢}$، وفي اللحظة نفسها، رمى نزار كرةً أخرى عمودياً إلى أسفل وَفق العلاقة $\text{ف}_{٢}\text{(ن)} = ١٥\text{ن} + ٥\text{ن}^{٢}$، فإذا ارتطمت كرة أحمد بالأرض بعد ثانية واحدة من ارتطام كرة نزار، ما سرعة ارتطام كرة نزار بالأرض؟
(ف الإزاحة بالأمتار، ن الزمن بالثواني)

٩ إذا كان ق(س) = أجاس ، $\text{هـ(س)} = \dfrac{٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$ فجد قيمة أ بحيث $(\text{هـ} \circ \text{ق})'(\dfrac{\pi}{٦}) = ٠$ ، أ $\neq ٠$

١٠ إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} [٢ - \text{س}] + \text{س}^{٢} & ، ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ \dfrac{٢}{\text{س} + ١} & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$ ،

ابحث في قابلية الاقتران للاشتقاق على مجاله.

١١ يتحرك جسم على خط مستقيم وَفق العلاقة $\text{ف} = ٢(\text{هـ}^{٢\text{ن}} - \text{هـ}^{-٢\text{ن}})$، بيّن أن تسارع الجسم في أي لحظة يساوي ٤ف عددياً. (ف الإزاحة بالأمتار، ن الزمن بالثواني)

١٢ إذا كان ق(س) = $\text{جا}^{٣}\text{س} - \text{جتا}^{٣}\text{س}$ ، جد $\text{ق}''(\dfrac{\pi}{٤})$.

١٣ جد مجموعة قيم س التي تكون عندها $\text{ق}'\text{(س)} = ٠$ في كل مما يأتي:

أ $\text{ق(س)} = (\text{س} - ٢)^{٣}(٢\text{س} + ٣)^{٤}$، س $\in [٠ ، ٣]$

ب ق(س) = جاس (١ + جتاس) ، س $\in [٠ ، \dfrac{\pi}{٢}]$

١٤ جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ ص = ق(س) = $\frac{\text{س هـ}^{\text{٦س}}}{\text{جاس}}$ ، جاس ≠ ٠

ب ص = ق(س) = $\frac{\text{س لـو}_{\text{هـ}}\text{ س}}{\text{جتاس}}$ ، حيث س > ٠ ، جتاس ≠ ٠

١٥ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = أ(جتا٢ن + جا٢ن) حيث ف تمثل بعد الجسم عن النقطة الثابتة (و)، ن الزمن بالثواني. ما تسارع الجسم عندما يكون على بعد ٣ أمتار من النقطة (و)؟

١٦ جد النقطة/ النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى ق(س) = س + $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠ موازياً للقاطع الواصل بين النقطتين (١ ، ٢)، (٢ ، $\frac{\text{٥}}{\text{٢}}$)

١٧ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
أجد متوسط التغير جبريا وهندسيا			
استخدم قاعدة لوبيتال في ايجاد المشتقات			
أجد مشتقات الاقترانات واحل مسائل منوعة عليها			
أجد مشتقة اقترانات ليست كثيرة حدود			
أوظف قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني في ايجاد مشتقة اقترانات			

الوحدة

٢

تطبيقات التفاضل

Differentiation Applications

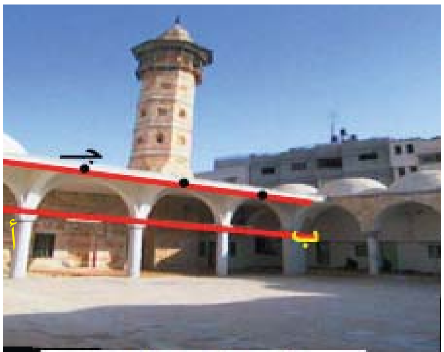
ما سبب انهيار بعض السدود؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف تطبيقات التفاضل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ إيجاد فترات التزايد والتناقص والنقاط الحرجة لاقتران معلوم.
٢ التعرف إلى نظرية القيمة المتوسطة، ونظرية رول، وبعض التطبيقات عليها.
٣ إيجاد القيم العظمى والصغرى لمنحنى اقتران معلوم.
٤ إيجاد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف لمنحنى اقتران معلوم.
٥ تحديد خصائص اقتران، إذا علم منحنى إحدى مشتقاته.
٦ توظيف القيم القصوى المطلقة في حل مسائل حياتية.

أولاً: نظرية رول*

نشاط ١: الشكل المجاور يمثل جزءاً من الأقواس التي تزين المسجد العمري الكبير بغزة حيث الخط أ ب يمثل خطاً أفقياً يصل بين نهايات الأعمدة.
ما ميل الخط الأفقي أ ب ، وما ميل الخط الأفقي المار بالنقطة (جـ)؟ وما قيمة قَ(جـ)؟



المسجد العمري الكبير

نظرية رول*:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب]، وقابلاً للاشتقاق في]أ ، ب[، وكان ق(أ) = ق(ب) فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈]أ ، ب[بحيث قَ(جـ) = ٠

مثال ١ : بيّن أن الاقتران ق(س) = س^{٢} − س − ٦ يحقق شروط نظرية رول في الفترة [٠ ، ١]. ثم جد قيمة، أو قيم جـ التي تعينها النظرية.

الحل :

١ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الإقتران ق(س) في الفترة [٠ ، ١]
ق(س) متصل في الفترة [٠ ، ١] وقابل للاشتقاق في الفترة]٠ ، ١[لأنه كثير حدود
ق(٠) = −٦ ، ق(١) = −٦ ، ومنها ق(٠) = ق(١)
تحققت شروط نظرية رول
إذن يوجد على الأقل جـ ∈]٠ ، ١[بحيث قَ(جـ) = ٠

٢ نجد قيمة/ قيم جـ التي تعينها النظرية:
قَ(س) = ٢س − ١ ومنها قَ(جـ) = ٢جـ − ١ = ٠
جـ = $\frac{١}{٢}$ ∈]٠ ، ١[

* ميشيل رول : هو عالم رياضيات فرنسي اشتهر بوضعه مبرهنة رول (١٦٩١)

مثال ٢ : إذا علمت أن الاقتران ق(س) = جتا٢س + ٢جاس يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ ، π]
حيث أ > ٠ ، فما قيمة/ قيم الثابت أ ؟

الحل : بما أن الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ ، π]
فإن ق(أ) = ق(π) ومنها جتا٢أ + ٢جاأ = ١ (لماذا؟)
إذن ⁻٢جا٢أ + ٢جاأ = ٠ ..... (لماذا؟)
٢جاأ(جاأ − ١) = ٠ ومنها إما جاأ = ٠ فتكون أ = ٠ ، π (مرفوضة)
أو (جاأ − ١) = ٠ ومنها جاأ = ١ فتكون أ = $\frac{\pi}{2}$

مثال ٣ : ابحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س} - ٢ &، ⁻٤ \le \text{س} < ⁻١ \\ \text{س}^٢ - ٧ &، ⁻١ \le \text{س} \le ١ \end{cases}$
في الفترة [⁻٤ ، ١] ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية (إن وجدت).

الحل : نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الإقتران ق(س) في الفترة [⁻٤ ، ١]
١) ق(س) متصل في [⁻٤ ، ⁻١[لأنه كثير حدود
ق(س) متصل في]⁻١ ، ١] لأنه كثير حدود
لكن ق(س) غير متصل عند س = ⁻١ ..... (لماذا؟)
ومنها فإن ق(س) غير متصل على [⁻٤ ، ١]
٢) قَ(س) = $\begin{cases} ١ &، ⁻٤ < \text{س} < ⁻١ \\ ٢\text{س} &، ⁻١ < \text{س} < ١ \end{cases}$ ،
قَ(⁻١) غير موجودة (لماذا؟)
إذن ق(س) غير قابل للاشتقاق على]⁻٤ ، ١[
٣) ق(⁻٤) = ق(١) = ⁻٦
لم تتحقق شروط نظرية رول على [⁻٤ ، ١] ، وهذا لا يعني بالضرورة عدم وجود قيم لـ جـ ، وللبحث عن قيم جـ بحيث قَ(جـ) = ٠ فإنه:
عندما ⁻٤ < س < ⁻١ تكون قَ(س) ≠ ٠ ، لا يوجد جـ في هذه الفترة
عندما ⁻١ < س < ١ فإن ٢جـ = ٠ ، أي أن جـ = ٠ ∈]⁻١ ، ١[
هل يتعارض هذا مع نظرية رول ؟ ..... (لماذا؟)

مثال ٤ : إذا علمت أن الاقتران ق(س) = $\frac{(س^٢ - ٥س + ٦)(س + أ)}{س - ٣}$ ، س ∈ [⁻١ ، ب] يحقق شروط نظرية رول في [⁻١ ، ب]، وكانت قيمة جـ التي تعينها النظرية هي جـ = ٠، فجد الثابتين أ ، ب

الحل : بما أن الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [⁻١ ، ب] فإن:

ق(س) متصل في [⁻١ ، ب] ومنها فإن ب < ٣، ..... (لماذا؟)

وبالتالي ق(س) = (س - ٢)(س + أ) = س^٢ + أس - ٢س - ٢أ ، س ≠ ٣ (لماذا؟)

وبما أن ق(ب) = ق(⁻١) فان ب^٢ - ٢ب + أب = ٣ - أ .... (١) (لماذا؟)

لكن قَ(س) = ٢س + أ - ٢ ، س ∈]⁻١ ، ب[

وبما أن جـ = ٠ فإن قَ(٠) = ٠ ومنها أ = ٢ (لماذا؟)

بتعويض قيمة أ = ٢ في المعادلة (١) نحصل على أن قيمة ب = ١

مثال ٥ : إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [أ ، جـ] بحيث قً(س) موجودة في]أ ، جـ[، وكان ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ)، حيث أ < ب < جـ.

أثبت وجود عدد حقيقي واحد على الأقل د ∈]أ ، جـ[بحيث قً(د) = ٠

الحل :

١ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في [أ ، ب]

وحيث أن قً(س) موجودة في]أ ، جـ[فإن:

ق(س) متصل على [أ ، ب] و قابل للاشتقاق على]أ ، ب[، ق(أ) = ق(ب)

∴ تحقق شروط نظرية رول ومنها يوجد جـ$_١$ ∈]أ ، ب[بحيث قَ(جـ$_١$) = ٠

٢ نبحث في شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في [ب ، جـ]

ق(س) متصل على [ب ، جـ] وقابل للاشتقاق على]ب ، جـ[، ق(ب) = ق(جـ)

∴ تحقق شروط نظرية رول ، ومنها يوجد جـ$_٢$ ∈]ب ، جـ[بحيث قَ(جـ$_٢$) = ٠

لاحظ أن جـ$_١$ < جـ$_٢$ ..... (لماذا؟)

٣ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران قَ(س) في [جـ$_١$ ، جـ$_٢$]

قَ(س) متصل في [جـ$_١$ ، جـ$_٢$] وقابل للاشتقاق في]جـ$_١$ ، جـ$_٢$[(لماذا؟)

قَ(جـ$_١$) = قَ(جـ$_٢$)

∴ تحقق شروط نظرية رول على قَ(س) في [جـ$_١$ ، جـ$_٢$]

يوجد على الأقل عدد مثل د ∈]جـ$_١$ ، جـ$_٢$[⊆]أ ، جـ[بحيث قً(د) = ٠

ثانياً: نظرية القيمة المتوسطة (Mean Value Theorem) *

نشاط ٢: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [أ ، ب] .

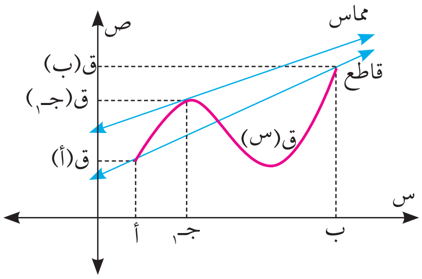
هل ق(س) متصل في [أ ، ب]، وقابل للاشتقاق في]أ ، ب[؟

ما ميل القاطع الواصل بين النقطتين (أ ، ق(أ)) ، (ب ، ق(ب))؟

هل ميل مماس المنحنى عند س = جـ$_1$

يساوي ميل القاطع؟ ..... (لماذا؟)

هل يوجد في الشكل مماسات أخرى لها نفس الميل؟



نظرية القيمة المتوسطة:

إذا كان ق(س) اقترانا متصلاً في [أ ، ب] وقابلاً للاشتقاق في]أ ، ب[

فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈]أ ، ب[بحيث أن قَ(جـ) = $\frac{\text{ق(ب)} - \text{ق(أ)}}{\text{ب} - \text{أ}}$

مثال ٦ : بيّن أن الاقتران ق(س) = س^٣ + ١ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [$^-$٢ ، ١] ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية.

الحل : نبحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [$^-$٢ ، ١]

الاقتران ق(س) متصل في الفترة [$^-$٢ ، ١]، وقابل للاشتقاق في الفترة]$^-$٢ ، ١[لأنه كثير حدود، إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [$^-$٢ ، ١]

يوجد على الأقل جـ ∈]$^-$٢ ، ١[بحيث قَ(جـ) = $\frac{\text{ق(١)} - \text{ق(}^-\text{٢)}}{\text{١} - (^-\text{٢})}$

ومنها ٣جـ^٢ = $\frac{\text{٢} - (^-\text{٧})}{\text{٣}}$ أي أن جـ = ± ١

ومنها جـ = $^-$١ ∈]$^-$٢ ، ١[.....(لماذا ؟)

* تنسب نظرية القيمة المتوسطة للرياضي الفرنسي لاغرانج Lagrange (١٧٣٦-١٨١٣)

مثال ٧ : إذا علمت أن الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{أس + ب} ، & ^-٣ \leq \text{س} \leq ^-١ \\ -\text{س}^٢ ، & ^-١ < \text{س} \leq ٥ \end{cases}$ ، يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [^-٣ ، ٥] ، جد الثابتين أ ، ب.

الحل : بما أن ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [^-٣ ، ٥] فإن:

ق(س) متصل على [^-٣ ، ٥] ومنه ق(س) متصل عند س = ^-١

أي أن: ^-أ + ب = ^-١ .... (١)

كما أن: ق(س) قابل للاشتقاق في]^-٣ ، ٥[:

ق̀(س) = $\begin{cases} \text{أ} ، & ^-٣ < \text{س} \leq ^-١ \\ -٢\text{س} ، & ^-١ < \text{س} < ٥ \end{cases}$ ، أ ، ب ∈ ح

وتكون ق̀(^-١)$^+$ = ق̀(^-١)$^-$ وينتج أن: أ = ٢

بتعويض قيمة أ = ٢ في المعادلة (١) ينتج أن ب = ١

مثال ٨ : ابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق(س) = [٢س + ١] في الفترة [٠ ، ١]، ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تعينها النظرية (إن وجدت).

الحل : نكتب الاقتران ق(س) دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح.

ق(س) = $\begin{cases} ١ ، & ٠ \leq \text{س} < \frac{١}{٢} \\ ٢ ، & \frac{١}{٢} \leq \text{س} < ١ \\ ٣ ، & \text{س} = ١ \end{cases}$ ومنها ق̀(س) = $\begin{cases} ٠ ، & ٠ < \text{س} < \frac{١}{٢} \\ ٠ ، & \frac{١}{٢} < \text{س} < ١ \end{cases}$

نبحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [٠ ، ١]

ق(س) غير متصل في [٠ ، ١] (لماذا؟)

ق(س) غير قابل للاشتقاق في]٠ ، ١[(لماذا؟)

لم تتحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [٠ ، ١]، وهذا لا يعني عدم وجود قيم لـ جـ، وللبحث عن قيمة / قيم جـ (إن وجدت)

$$\text{ق̀(جـ)} = \frac{\text{ق(١)} - \text{ق(٠)}}{١ - ٠} = ٢$$

لكن ق̀(س) ≠ ٢ ، ∀ س ∈]٠ ، ١[، وبالتالي لا يوجد جـ ∈]٠ ، ١[

تمارين ٢ - ١

١ بيّن أيّاً من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية رول في الفترة المعطاة، ثم جد قيمة، أو قيم جـ التي تحددها النظرية في كل حالة (إن وجدت).

أ ق(س) = $\sqrt{٤س - س^٢}$ ، س ∈ [٠ ، ٤]

ب ق(س) = س^٢ – ٢س – ٣ ، س ∈ [–١ ، ٣]

جـ ق(س) = لـوهـ (س + $\frac{١}{س}$)، س ∈ [$\frac{١}{٢}$ ، ٢]

د ق(س) = جا٢س + ٢جاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

٢ بيّن أيّاً من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة المعطاة، ثم جد قيمة أو قيم جـ التي تحددها النظرية في كل حالة (إن وجدت):

أ ق(س) = س^٣ – س – ١ ، س ∈ [–١ ، ٢]

ب ق(س) = $\frac{٤}{س + ٢}$ ، س ∈ [–١ ، ٢]

جـ ق(س) = $\sqrt{س}$ + ٢س ، س ∈ [٤ ، ٩]

٣ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس^٢ + ٢س & ، ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^٣ - ب س + ١٢ & ، ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [٠ ،٣]، جد قيم الثابتين أ ، ب، ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية.

٤ إذا كان ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ∈ [أ ، ب] ، س > صفر، فأثبت باستخدم نظرية القيمة المتوسطة وجود عدد حقيقي واحد على الاقل جـ ∈] أ ، ب [، بحيث جـ^٢ = أ . ب

٥ إذا كان ع(س) = (ق ∘ هـ)(س)، س ∈ [أ ، ب]، ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين في [أ ، ب] وقابلين للاشتقاق في]أ ، ب[، وكان هـ(أ)= ب، هـ(ب) = أ.

أثبت وجود عدد واحد على الأقل جـ ∈]أ ، ب[بحيث ع(أ) – ع(ب) = قَ(جـ)(ب – أ)

٦ إذا كان ق(س) = سجتاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] استخدم نظرية رول لإثبات أن القيمة التي تعينها النظرية هي عندما س = ظتاس.

٢ - ٢ الاقترانات المتزايدة والمتناقصة (Increasing and Decreasing Functions)

نشاط ١: أراد أحد المغامرين السير بسيارته على شارع فوق سلسلة الجبال التي تراها في الصورة، مبتدئاً من النقطة (أ) ومنتهياً بالنقطة (و)، بحيث يلتزم بخط السير الظاهر في الصورة.

تلاحظ أن السيارة أثناء سيرها بين (أ) ، (ب) تكون في حالة صعود.

حدد نقطتين على الصورة تكون السيارة بينهما في حالة نزول. إذا كانت إحداثيات النقطة ب(س$_1$ ، ص$_1$) وإحداثيات النقطة جـ(س$_2$ ، ص$_2$)، أيهما أكبر ص$_2$ أم ص$_1$ ؟

تعريف:

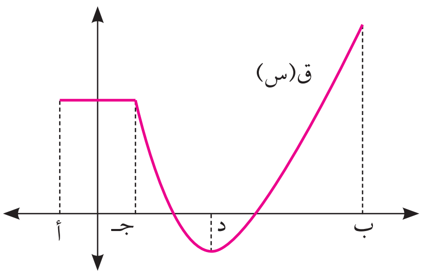
يكون منحنى الاقتران ق(س) المعرف في [أ، ب] ، س$_1$ ، س$_2$ ∈ [أ ، ب]

١ متزايداً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_1$ < س$_2$ فإن ق(س$_1$) < ق(س$_2$)

٢ متناقصاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_1$ < س$_2$ فإن ق(س$_1$) > ق(س$_2$)

٣ ثابتاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_1$ < س$_2$ فإن ق(س$_1$) = ق(س$_2$)

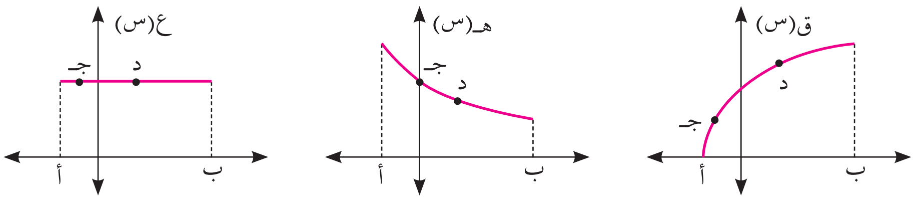
مثال ١ : في الشكل المجاور، حدد الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران ق(س) متزايداً، أو متناقصاً، أو ثابتاً.



الحل : يكون منحنى الاقتران ق(س) ثابتاً في [أ، جـ] ويكون متناقصاً في [جـ ، د] لأنه كلما زادت قيمة س في الفترة [جـ ، د] تقل قيمة ق(س)، ويكون متزايداً في [د ، ب] (لماذا؟)

(ملاحظة : لا يطلب من الطالب التحقق من التزايد والتناقص جبرياً باستخدام التعريف)

نشاط ٢: الشكل أدناه يمثل منحنيات الاقترانات : ق(س)، هـ(س)، ع(س) المعرفة في الفترة [أ، ب] ، معتمداً عليها قم بما يأتي:



١ حدد أي الاقترانات السابقة يكون منحناه متزايداً، وأيها متناقصاً، وأيها ثابتاً في الفترة [أ، ب].

٢ ارسم لكل منحنى مماساً عند النقطة جـ ومماساً عند النقطة د.

٣ نوع زاوية الميل للمماسات المرسومة هي ....

٤ إشارة ظل زاوية ميل المماس لكل من المماسات التي رسمت هي .... (لماذا؟)

٥ ما إشارة كل من قَ(س)، هـَ(س)، عَ(س) في] أ، ب[؟

٦ ما العلاقة بين فترات التزايد والتناقص وإشارة المشتقة الأولى للاقتران؟

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق في] أ، ب[فإن منحنى :

١ الاقتران ق(س) يكون متزايداً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) > صفر، ∀ س ∈] أ، ب[

٢ الاقتران ق(س) يكون متناقصاً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) < صفر، ∀ س ∈] أ، ب[

٣ الاقتران ق(س) يكون ثابتاً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) = صفر، ∀ س ∈] أ، ب[

مثال ٢ : جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) علماً بأن:

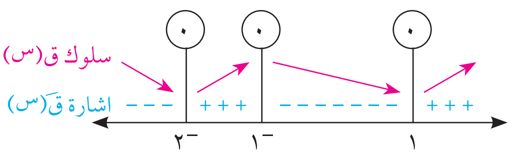
قَ(س) = (س^{٢} − ١)(س + ٢)، س ∈ ح

الحل : نضع قَ(س) = صفر، ومنها (س^{٢} − ١)(س + ٢) = ٠

ومنها (س − ١) (س + ١) (س + ٢) = ٠

فينتج أن س = ١ أو س = −١ أو س = −٢

من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون:



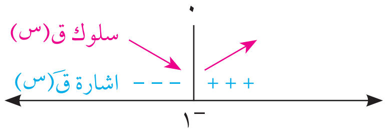
منحنى ق(س) متناقصاً في]−∞ ، −٢]، [−١ ، ١] ، ومتزايداً في [−٢ ، −١]، [١، ∞[.

مثال ٣ : عيّن فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س^{٤} + ٤ س + ٥، س ∈ ح

الحل : ق(س) متصل في ح لأنه كثير حدود.

قَ(س) = ٤س^{٣} + ٤ نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س^{٣} + ١ = ٠ فتكون س = ⁻١ (لماذا؟)

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور:



يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة [⁻١ ، ∞[

ومتناقصاً في الفترة]⁻∞ ، ⁻١].

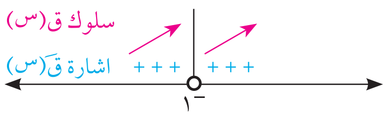
مثال ٤ : عيّن فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$ ، س ≠ ⁻١

الحل : ق(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$ ، س ≠ ⁻١ متصل في ح − {⁻١}

قَ(س) = $\frac{٢}{(\text{س} + ١)^{٢}}$

قَ(س) ≠ ٠ ∀ س ∈ ح − {⁻١}

والشكل المجاور يبيّن إشارة قَ(س)



ومنه يكون منحنى الاقتران ق(س) متزايداً في الفترتين]⁻∞ ، ⁻١[،]⁻١ ، ∞[

فكّر وناقش

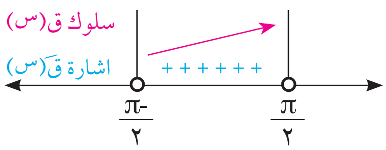
في المثال السابق هل يمكن القول أن ق(س) متزايد في ح − {⁻١}؟

مثال ٥ : أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) = ٢س + ظاس متزايد في الفترة] $\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

الحل : ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في الفترة] $\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ [(لماذا؟)

قَ(س) = (٢ + قا^{٢}س) ≠ ٠

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور



يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة] $\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

مثال ٦ : عيّن فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} \text{جاس} & ، \quad ٠ \le س \le \frac{\pi}{٢} \\ \text{س + جتاس} & ، \quad \frac{\pi}{٢} < س \le \pi \end{cases} \quad ، \text{ في الفترة } [٠ ، \pi]$$

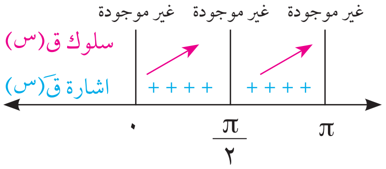
الحل :

$$قَ(س) = \begin{cases} \text{جتاس} & ، \quad ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \\ \text{١ − جاس} & ، \quad \frac{\pi}{٢} < س < \pi \end{cases} \quad ،$$

قَ$(\frac{\pi}{٢})$ غير موجودة. (لماذا؟)

وتكون قَ(س) $\ne ٠$ ، $\forall$ س $\in\ ]٠ ، \pi[$ (لماذا؟)

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور



يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترتين $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ ، $]\frac{\pi}{٢} ، \pi]$

مثال ٧ : عيّن فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) = $|س^٢ - ٤|$ ، س $\in [-٣ ، ٢]$

الحل : نكتب ق(س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

$$ق(س) = |س^٢ - ٤| = \begin{cases} س^٢ - ٤ & ، \quad -٣ \le س < -٢ \\ ٤ - س^٢ & ، \quad -٢ \le س \le ٢ \end{cases}$$

ق(س) متصل في الفترة $[-٣ ، ٢]$ لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران متصل

$$قَ(س) = \begin{cases} ٢س & ، \quad -٣ < س < -٢ \\ -٢س & ، \quad -٢ < س < ٢ \end{cases}$$

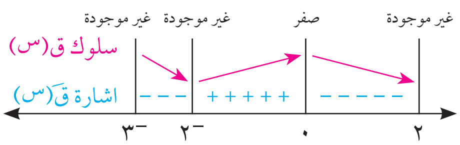
قَ(س) غير موجودة عندما س = −٣ ، −٢ ، ٢ (لماذا؟)

نجعل قَ(س) = ٠ ، ومنها س = ٠

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون

منحنى ق(س) متزايداً في $[-٢، ٠]$

ومتناقصاً في $[-٣ ، -٢]$ ، $[٠ ، ٢]$



تمارين ٢ - ٢

١ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ ق(س) = ٣س^٢ – س^٣ ، س ∈ [–٢ ، ٥]

ب ق(س) = س + جا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، π]

جـ ق(س) = $\sqrt{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١}$ ، س ∈ ح

٢ إذا كان ق(س) = ٢س – لــو$_{هـ}$ (س + ١) ، س > –١، فأثبت أن منحنى ق(س) متزايد في ح$^+$.

٣ جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^٣ &، \quad ٠ \leq \text{س} < ١ \\ \text{س}^٢ - ٢ &، \quad ١ \leq \text{س} \leq ٢ \end{cases}$ ، في الفترة [٠، ٢]

٤ إذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق على ح، وكان ك(س) = ق^٢(س) + هـ^٢(س) + س^٢، فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س)، علماً بأن قَ(س) = هـ(س)، هـَ(س) = –ق(س).

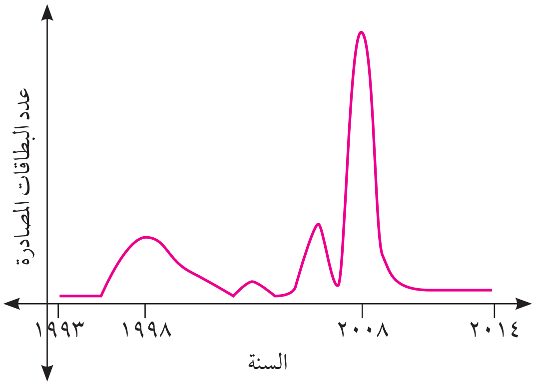
٥ إذا كان ق(س) كثير حدود متزايداً على ح، وكان ك(س) = ق(س^٢ – ٤س)، فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س).

٦ إذا كان ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود معرفين في الفترة [٠، ٤]، بحيث إن منحنى ق(س) متناقص في مجاله، ويقع في الربع الرابع، ومنحنى هـ(س) متزايد في مجاله، ويقع في الربع الأول، أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) × هـ(س) متناقص في الفترة [٠، ٤].

٧ إذا كان ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$، فجد مجالات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران قَ(س).

٢ - ٣ القيم القصوى (Extreme Values)

نشاط ١: تعرض آلاف الفلسطينيين المقدسيين إلى فقدان حق الإقامة في مدينتهم القدس، منذ زمن طويل، والشكل المجاور يمثل مخططاً بيانياً لعدد بطاقات الهوية المقدسية المصادرة خلال الأعوام ١٩٩٣-٢٠١٤.



كان عدد البطاقات المصادرة عام ٢٠٠٨ أكبر ما يمكن. (لماذا؟)

تعريف القيم الصغرى والعظمى المحلية:

ليكن ق(س) اقتراناً معرفاً على المجال ع، ولتكن جـ ∈ ع، عندها يكون للاقتران ق(س):

١. قيمة عظمى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ، بحيث أن ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ ع)

٢. قيمة صغرى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ، بحيث أن ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ ع)

٣. قيمة عظمى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ ع

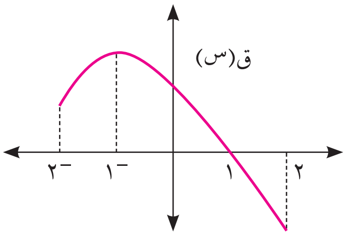
٤. قيمة صغرى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ ع

ملاحظة: تسمى كل من القيم العظمى والقيم الصغرى قيماً قصوى، سواء أكانت محلية أم مطلقة.

فكّر وناقش

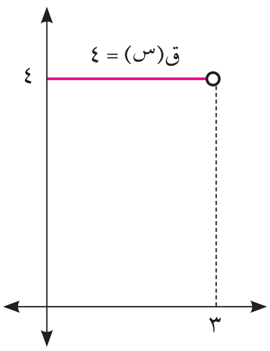
هل كل قيمة قصوى محلية هي قيمة قصوى مطلقة، أم العكس هو الصحيح؟

مثال ١ : يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [-٢ ، ٢]، اعتمد عليه في إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت). ثم جد قيمة المشتقة الأولى عند كل قيمة منها (إن وجدت).



الحل : يوجد للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عندما س = -٢ هي ق(-٢)
لأنه يوجد فترة مفتوحة مثل ف =]-٣ ، -١[تحوي العدد -٢
بحيث أن ق(-٢) ≤ ق(س) ∀ س ∈ ف ∩ [-٢ ، ٢] = [-٢ ، -١[
قَ(-٢) غير موجودة (لماذا؟)
وأيضاً ق(-١) قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لأن ق(-١) ≥ ق(س) ∀ س ∈ [-٢ ، ٢]
قَ(-١) = ٠ (لماذا؟)
ق(٢) قيمة صغرى محلية وهي مطلقة لأن ق(٢) ≤ ق(س) ∀ س ∈ [-٢ ، ٢]
قَ(٢) غير موجودة (لماذا؟)

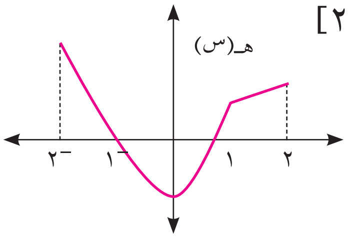
مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٤ ، س ∈ [٠ ، ٣[
جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).



الحل : ق(س) متصل في [٠ ، ٣[
قَ(س) = ٠ ∀ س ∈]٠ ، ٣[
وحسب التعريف ∀ س ∈ [٠ ، ٣[يوجد قيمة صغرى محلية هي ٤
لأن ق(س) ≥ ٤ ∀ س في تلك الفترة
كما أنه حسب التعريف ∀ س ∈ [٠ ، ٣[يوجد قيمة عظمى محلية هي ٤
لأن ق(س) ≤ ٤ ∀ س في تلك الفترة

فكّر وناقش:
ما صحة القول أن القيمة العظمى المحلية للاقتران دائماً أكبر من القيمة الصغرى المحلية له؟

نشاط ٢: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران هـ(س) في الفترة [⁻٢ ، ٢]



١ يوجد قيمة عظمى محلية عند س = ⁻٢ والسبب ....

٢ عند س = ٠ يوجد قيمة .... محلية والسبب ....

٣ هـَ(٢) = ... ، هـَ(٠) = ... ، هـَ(⁻٢) = ...

تعريف:

تسمى النقطة (أ ، ق(أ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) إذا كانت:

١ أ ∈ مجال ق(س)

٢ قَ(أ) = ٠ أو قَ(أ) غير موجودة.

مثال ٣: عيّن جميع النقط الحرجة للاقتران ق(س) =

$$\begin{cases} \text{س}^{٢} - ٣ \quad ، \quad ⁻١ < \text{س} \leq ٢ \\ ٣ - \text{س} \quad ، \quad ٢ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$$

، في]⁻١ ، ٣[

الحل : ق(س) متصل عند س = ٢ ، قَ(س) =

$$\begin{cases} ٢\text{س} \quad ، \quad ⁻١ < \text{س} < ٢ \\ ⁻١ \quad ، \quad ٢ < \text{س} < ٣ \end{cases}$$

قَ(٢) غير موجودة ، قَ(٣) غير موجودة، ..... (لماذا؟)

نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س = ٠ ∈]⁻١ ، ٢[

لا يوجد قيم لـ س ∈]٢ ، ٣[بحيث قَ(س) = ٠ (لماذا؟)

لا يوجد نقطة حرجة عند س = ⁻١ لأنها لا تنتمي إلى مجال ق(س)

ومنها النقط الحرجة هي (٠ ، ⁻٣) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٠)

مثال ٤: عيّن جميع النقط الحرجة للاقتران ق(س) =

$$\begin{cases} \text{س}^{٣} \quad ، \quad ١ \leq \text{س} \leq ٢ \\ [\text{س} + ٣] \quad ، \quad ٢ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$$

، في [١ ، ٣]

الحل : نكتب ق(س) دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح

ق(س) =

$$\begin{cases} \text{س}^{٣} \quad ، \quad ١ \leq \text{س} \leq ٢ \\ ٥ \quad ، \quad ٢ < \text{س} < ٣ \\ ٦ \quad ، \quad \text{س} = ٣ \end{cases}$$

، س ∈ [١ ، ٣]

ق(س) غير متصل عند س = ٢، وعند س = ٣ ومنها قَ(٢) غير موجودة، قَ(٣) غير موجودة،

كذلك قَ(١) غير موجودة ..... (لماذا؟)

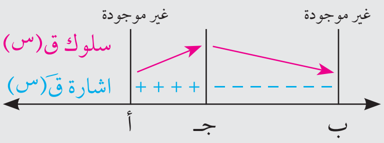
$$ق'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} ، & ١ < س < ٢ \\ ٠ ، & ٢ < س < ٣ \end{cases} \quad ، س \in]١ ، ٣[$$

$\forall$ س $\in$ [٢ ، ٣] $\cup$ {١} فإن (س ، ق(س)) نقطة حرجة للاقتران ق(س). (لماذا؟)

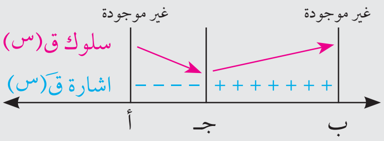
اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب] وكانت (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س)، جـ $\in$]أ ، ب[فإنه:

١ إذا كان قَ(س) > ٠ عندما أ < س < جـ،
وكان قَ(س) < ٠ عندما جـ < س < ب
فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)



٢ إذا كان قَ(س) < ٠ عندما أ < س < جـ،
وكان قَ(س) > ٠ عندما جـ < س < ب
فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)



مثال ٥ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٥س − ٥

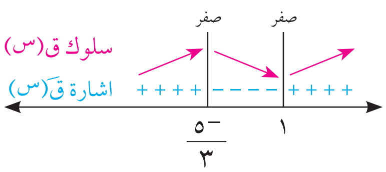
الحل :

ق(س) اقتران متصل على ح لأنه كثير حدود

قَ(س) = ٣س^{٢} + ٢س − ٥ ، $\forall$ س $\in$ ح ، نجعل قَ(س) = ٠

ومنها ٣س^{٢} + ٢س − ٥ = ٠ أي أن (٣س + ٥)(س − ١) = ٠ ، إذن س = $\frac{-٥}{٣}$ أو س = ١

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور تكون



ق($\frac{-٥}{٣}$) = $\frac{٤٠}{٢٧}$ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

ق(١) = −٨ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

فكّر وناقش:

هل يأخذ الاقتران ق(س) في المثال السابق قيماً قصوى مطلقة؟ حددها (إن وجدت).

مثال ٦ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = (٨ − س) $\sqrt[٣]{\text{س}}$

الحل : ق(س) متصل في ح

$\text{قَ(س)} = \sqrt[٣]{\text{س}}\ (\text{١}^{-}) + (\text{٨} - \text{س}) \times \frac{\text{١}}{\text{٣}}\ \text{س}^{\frac{-\text{٢}}{\text{٣}}}$

$\text{قَ(س)} = -\sqrt[٣]{\text{س}} + \frac{(\text{٨} - \text{س})}{\text{٣}\sqrt[٣]{\text{س}^{\text{٢}}}}$ ، س ∈ ح − {٠} (لماذا؟)

إذن $\text{قَ(س)} = \frac{(\text{٨} - \text{٤س})}{\text{٣}\sqrt[٣]{\text{س}^{\text{٢}}}}$

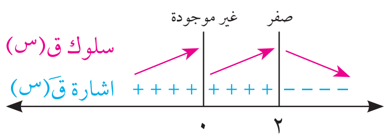
نجعل قَ(س) = ٠ ومنها ٨ − ٤س = ٠ ومنها س = ٢

قَ(س) غير موجودة عند س = ٠ (لماذا؟)

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور،

يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س) عند س = ٢

قيمتها ق(٢) = ٦ $\sqrt[٣]{\text{٢}}$



فكّر وناقش:

هل يوجد قيم قصوى للاقتران عندما س = ٠ في المثال السابق (لماذا؟)

مثال ٧ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣}}{\text{س} - \text{١}}$ ، س ≠ ١

الحل : ق(س) متصل في ح − {١}

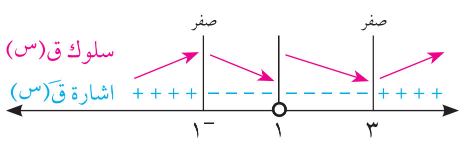
$\text{قَ(س)} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س} - \text{٣}}{(\text{س} - \text{١})^{\text{٢}}}$ ، س ≠ ١

وبوضع قَ(س) = ٠ ينتج أن س = ٣ أو س = ١⁻

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور تكون

ق(١⁻) = ٢⁻ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

ق(٣) = ٦ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)



مثال ٨ : إذا كان ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ، وكان للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = $^{-}$١ قيمتها ٢ وقيمة صغرى محلية عند س = ١ قيمتها $^{-}$١، فجد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ ، د.

الحل :

ق($^{-}$١) = ٢ ومنها ٢ = $^{-}$أ + ب − جـ + د .... (١)

ق(١) = $^{-}$١ ومنها $^{-}$١ = أ + ب + جـ + د .... (٢)

قَ(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + جـ

قَ($^{-}$١) = ٠ ومنها ٣أ − ٢ب + جـ = ٠ .... (٣)

قَ(١) = ٠ ومنها ٣أ + ٢ب + جـ = ٠ .... (٤)

بحل النظام الناتج من المعادلات الأربع فإن:

أ = $\frac{٣}{٤}$ ، ب = ٠ ، جـ = $\frac{-٩}{٤}$ ، د = $\frac{١}{٢}$

اختبار أطراف الفترة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق في]أ، ب[فإن:

١	ق(أ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت قَ(س) $>$ ٠	عندما س $>$ أ	(بداية تزايد)
٢	ق(أ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت قَ(س) $<$ ٠	عندما س $>$ أ	(بداية تناقص)
٣	ق(ب) قيمة عظمى محلية، إذا كانت قَ(س) $>$ ٠	عندما س $<$ ب	(نهاية تزايد)
٤	ق(ب) قيمة صغرى محلية، إذا كانت قَ(س) $<$ ٠	عندما س $<$ ب	(نهاية تناقص)

مثال ٩ : إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} ، & -١ \le س \le ٢ \\ ٤ ، & ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

١ جد مجموعة قيم س للنقط الحرجة للاقتران ق(س).

٢ حدّد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).

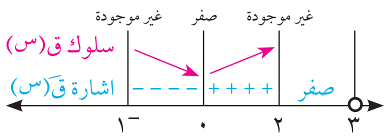
الحل :

١ ق(س) اقتران متصل في [$^{-}$١ ، ٣[

$$قَ(س) = \begin{cases} ٢س ، & -١ < س < ٢ \\ ٠ ، & ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

أولاً: عندما س ∈]⁻١ ، ٢[نجعل قَ(س) = ٠
فيكون ٢س = ٠ ومنها عند س = ٠ يوجد نقطة حرجة

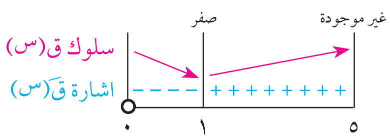
ثانياً: عندما ٢ < س < ٣ تكون قَ(س) = ٠
وهذا يعني أنه عند كل س ∈]٢ ، ٣[يوجد نقطة حرجة
قَ(٢) غير موجودة، قَ(⁻١) غير موجودة
فتكون مجموعة قيم س للنقط الحرجة {٠ ، ⁻١،]٢ ، ٣[}



٢ من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون
عند س = ⁻١ يوجد قيمة عظمى محلية لأنها بداية تناقص
عند س = ٠ يوجد قيمة صغرى محلية
عند س = ٢ يوجد قيمة عظمى محلية
عند كل س ∈]٢ ، ٣[يوجد قيمة عظمى محلية وصغرى محلية في آن واحد.

مثال ١٠: إذا كان ق(س) = س^{٢} − ٢لـو$_{هـ}$ س ، س ∈]٠ ، ٥] ، فحدد القيم المحلية التي يكون عندها للاقتران ق(س) قيم قصوى محلية.

الحل : ق(س) متصل في الفترة]٠ ، ٥] ، قَ(س) = ٢س − $\frac{٢}{س}$
نجعل قَ(س) = ٠ ومنها ٢س − $\frac{٢}{س}$ = ٠
أي أن س^{٢} = ١ وتكون س = ١ (لماذا؟)
قَ(٥) غير موجودة، فتكون مجموعة قيم س التي يكون عندها نقط حرجة هي {١ ، ٥}
من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور



ق(١) = ١ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)
ق(٥) = ٢٥ − ٢لـو$_{هـ}$ ٥ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س) (نهاية تزايد)

مثال ١١: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} & ، \ ^{-}١ \le \text{س} < ١ \\ \frac{١}{٢} & ، \ \text{س} = ١ \end{cases}$ ، س ∈ [$^{-}$١ ، ١]

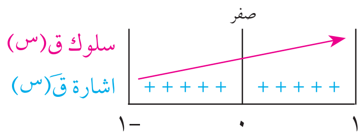
جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

الحل : ق(س) متصل في [$^{-}$١ ، ١[

قَ(س) = ٣س^{٢} ، س ∈]$^{-}$١ ، ١[

نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س = ٠

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور



عند س = $^{-}$١ يوجد قيمة صغرى محلية، قيمتها ق($^{-}$١) = $^{-}$١

أما عند س = ١ فإن ق(س) منفصل، فلا يمكن الحكم عليها من خلال إشارة المشتقة الأولى؛ لذا نلجأ إلى مقارنة ق(١) مع $\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) وبما أن ق(١) < $\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) فإن ق(١) = $\frac{١}{٢}$ قيمة صغرى محلية.

نظرية القيم القصوى المطلقة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب]

فإن ق(س) يتخذ قيمه القصوى المطلقة في الفترة [أ، ب].

مثال ١٢: جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران ق(س) = س $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

الحل : بحل المتباينة $٤ - س^{٢} \geq ٠$ ، نستنتج أن مجال ق(س) هو [−٢ ، ٢]

ق(س) متصل على [−٢ ، ٢] ، $ق'(س) = \frac{٤ - ٢س^{٢}}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ ، س ∈]−٢ ، ٢[

وعندما $ق'(س) = ٠$ يكون س = $\sqrt{٢}$ ∈]−٢ ، ٢[

س = $-\sqrt{٢}$ ∈]−٢ ، ٢[

ويكون ق(−٢) = ٠ ، ق($-\sqrt{٢}$) = −٢

ق($\sqrt{٢}$) = ٢ ، ق(٢) = ٠

أصغر قيمة للاقتران هي ق($-\sqrt{٢}$) = −٢

وأكبر قيمة للاقتران هي ق($\sqrt{٢}$) = ٢

أي أن القيمة العظمى المطلقة هي ق($\sqrt{٢}$) = ٢

والصغرى المطلقة هي ق($-\sqrt{٢}$) = −٢

أتعلم:

إذا كان ق(س) متصلاً على فترة في مجاله، وكان له نقطة قيمة قصوى وحيدة فهي مطلقة في تلك الفترة.

تمارين ٢ - ٣

١ جد النقط الحرجة للاقترانات الآتية:

أ ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – س^{٢} + $\frac{١}{٣}$ ، س ∈ [–٢ ، ٣]

ب ق(س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$ ، س ∈ [–٨ ، ٨]

٢ في التمارين من (أ – و) جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) (إن وجدت)

أ ق(س) = س^{٣} – ٩س^{٢} + ٢٤س ، س ∈ ح

ب ق(س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

جـ ق(س) = (س^{٢} – ٣)هـ^{س} ، س ∈ ح

د ق(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$ س ≠ ١

هـ ق(س) = جتا^{٢}س – جا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، π]

و ق(س) = هـ$^{-(س - ٢)^{٢}}$ ، س ∈ ح

٣ جد أكبر وأصغر قيمة (إن وجدت) لكل من الاقترانات الآتية:

أ ق(س) = $\begin{cases} س^{٣} & ، ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} + ٤ & ، ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، س ∈ [٠ ، ٣]

ب ق(س) = هـ^{س} – هـ س ، س ∈ [٠ ، ٣]

جـ ق(س) = جتاس – $\frac{١}{٣}$ جتا^{٣}س ، س ∈ $\left[\frac{π}{٢} ، \frac{٣π}{٢}\right]$

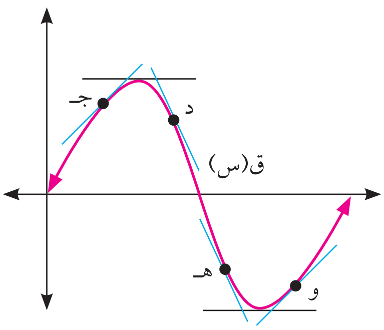
٤ إذا كان ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٩س + ١ ، أ ،ب ∈ ح اقتران له قيمة عظمى محلية عند س = ١، وقيمة صغرى محلية عند س = ٣ ما قيمة كل من الثابتين أ ، ب؟

٥ باستخدام القيم القصوى أثبت أن المقدار ٤س^{٣} – س^{٤} – ٢٩ سالب دائماً.

نشاط ١: تزخر فلسطين بالأماكن الترفيهية وتحتوي بعض هذه الأماكن ألعاباً مرعبة، مثل القطار الموجود في الصورة المجاورة. هل سبق وركبت مثل هذا القطار؟

حدد مستعيناً بالرموز المدرجة على الصورة المناطق التي يشعر فيها راكب القطار بالرعب والخطر، والمناطق التي تكون أكثر أماناً. فسّر إجابتك.

نشاط ٢: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س)



١ ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند كل من جـ، د؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران ق(س) عند جـ، د يقعان فوق منحناه)

٢ ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند هـ ، و؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران عند هـ ، و يقعان تحت منحناه).

تعريف:

يقال لمنحنى الاقتران ق(س) أنه مقعّر للأعلى في الفترة [أ، ب] إذا كان واقعاً فوق جميع مماساته في الفترة] أ، ب[وأنه مقعّر للأسفل في الفترة [أ، ب] إذا كان واقعاً تحت جميع مماساته في الفترة] أ، ب[.

اختبار التقعّر باستخدام المشتقة الثانية*:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب]، وكان قَ̋ (س) معرفاً في الفترة]أ ،ب[فإن منحنى ق(س) يكون:

١ مقعّراً للأعلى في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قَ̋(س) > ٠ لجميع قيم س ∈]أ،ب[.

٢ مقعّراً للأسفل في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قَ̋(س) < ٠ لجميع قيم س ∈]أ،ب[.

٣ غير مقعّر للأعلى أو للأسفل في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قَ̋(س) = ٠ لجميع قيم س ∈]أ، ب[.

* سيتم التعامل مع الفترات المفتوحة.

مثال ١ : جد مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣س^{٢} − س^{٣} ، س ∈]−٢ ، ٥[

الحل :

ق(س) متصل في]−٢ ، ٥[لأنه كثير حدود

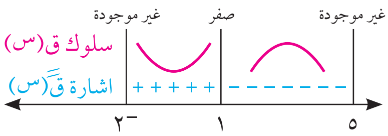
قَ(س) = ٦س − ٣س^{٢} ، قً(س) = ٦ − ٦س

بوضع قً(س) = ٠ تكون ٦ − ٦س = ٠ ، أي س = ١

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور

يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأعلى

في الفترة]−٢، ١[، ومقعّراً للأسفل في الفترة]١ ، ٥[



مثال ٢ : جد مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^{٢} + ١}{س}$ ، س ≠ ٠

الحل :

ق(س) متصل على مجاله

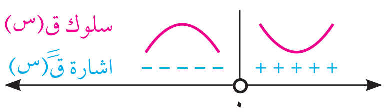
ق(س) = س + $\frac{١}{س}$ ومنها قَ(س) = ١ − $\frac{١}{س^{٢}}$

قً(س) = $\frac{٢}{س^{٣}}$ ≠ ٠ ،

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور يكون:

منحنى ق(س) مقعّراً للأسفل في الفترة]−∞ ، ٠[،

ومقعّراً للأعلى في الفترة]٠ ، ∞[..... (لماذا؟)



مثال ٣ : أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) = لــوهـ جتاس ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٣}$[مقعر للأسفل.

الحل :

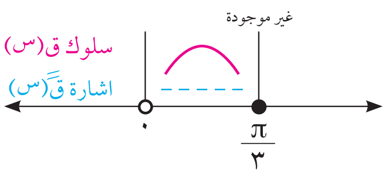
ق(س) متصل في]٠ ، $\frac{\pi}{٣}$[(لماذا؟)

قَ(س) = $\frac{-جاس}{جتاس}$ = −ظاس

قً(س) = −قا^{٢}س

وبما أن قً(س) ≠ ٠ ، قً(س) < ٠ ، ∀ س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٣}$[

فإن ق(س) مقعّر للأسفل في]٠ ، $\frac{\pi}{٣}$[



تعريف:

١ تسمى النقطة (جـ ،ق(جـ)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س) إذا كان:

- ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = جـ
- يغيِّرَ الاقتران اتجاه تقعّر منحناه عند س = جـ من الأعلى إلى الأسفل، أو العكس.

٢ زاوية الانعطاف: هي زاوية ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند نقطة الانعطاف.

٣ إذا كانت (جـ، ق(جـ)) نقطة انعطاف وكان قَ(جـ) = ٠ فتسمى النقطة (جـ، ق(جـ)) نقطة انعطاف أفقي.

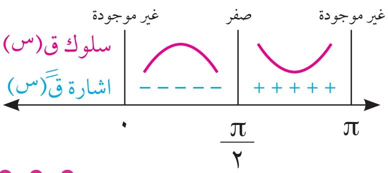
مثال ٤ : جد نقاط الانعطاف (إن وجدت) للاقتران ق(س) = ٣جاس جتاس ، س ∈]٠ ، π[

الحل :
قَ(س) = −٣جا^{٢}س + ٣جتا^{٢}س = ٣جتا٢س ، س ∈]٠ ، π[

قً(س) = −٦جا٢س

نجعل قً(س) = ٠ فيكون −٦جا٢س = ٠ ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$

وبما أن ق(س) متصل عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ، ويغيّر من اتجاه تقعّره عندها (كما تشير إشارة قً(س) في الشكل المجاور)



فإن النقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، ق($\frac{\pi}{٢}$)) = ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠) نقطة انعطاف

هل النقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠) نقطة انعطاف أفقي؟ فسّر إجابتك.

مثال ٥ : بيّن أنه لا يوجد للاقتران ق(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ نقطة انعطاف في الفترة]−٣ ، ٣[

الحل :
ق(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ متصل في الفترة]−٣ ، ٣[

قَ(س) = $\frac{-س}{\sqrt{٩ - س^{٢}}}$ ، س ∈]−٣ ، ٣[

قً(س) = $\frac{-٩}{\sqrt{(٩ - س^{٢})^{٣}}}$ ≠ ٠ ، ∀ س ∈]−٣ ، ٣[ولكن قً(س) < صفر دائماً

ومنها يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأسفل في]−٣ ، ٣[

وبما أن ق(س) لا يغير من اتجاه تقعره، فلا يوجد نقاط انعطاف للاقتران ق(س) في]−٣ ، ٣[

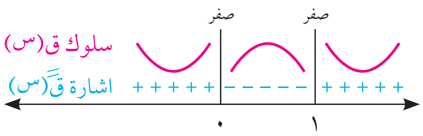
مثال ٦ : إذا كان ق(س) = س^{٤} − ٢س^{٣} ، س ∈ ح ، فجد فترات التقعّر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س)، ثم جد نقط وزوايا الانعطاف (إن وجدت).

الحل : ق(س) متصل لأنه كثير حدود.

قَ(س) = ٤س^{٣} − ٦س^{٢} ،   قً(س) = ١٢س^{٢} − ١٢س

بوضع قً(س) = ٠ ينتج أن س = ١ ، س = ٠

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور يكون:



ق(س) مقعراً للأعلى في الفترة]−∞ ، ٠] ،

وكذلك في الفترة [١ ، ∞[

ويكون مقعراً للأسفل في الفترة [٠ ، ١]

النقطتان (٠ ، ٠) ، (١ ، −١) هما نقطتا انعطاف ..... (لماذا؟)

لإيجاد زوايا الانعطاف

نفرض هـ$_{١}$ زاوية الانعطاف عند النقطة (٠ ، ٠)

ظا هـ$_{١}$ = قَ(٠) = ٠ ومنها هـ$_{١}$ = ٠

نفرض هـ$_{٢}$ زاوية الانعطاف عند النقطة (١ ، −١)

ظا هـ$_{٢}$ = قَ(١) = −٢ ومنها هـ$_{٢}$ = ظا$^{-١}$(−٢)

مثال ٧ : عيّن مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} & ، \ ٠ < \text{س} \le ٢ \\ \text{س}^{٢} & ، \ ٢ < \text{س} < ٤ \end{cases}$

الحل : ق(س) غير متصل عند س = ٢ ومنها قَ(٢) غير موجودة

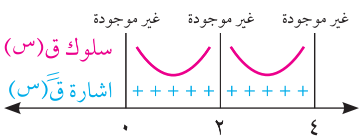
قَ(س) = $\begin{cases} ٣\text{س}^{٢} & ، \ ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س} & ، \ ٢ < \text{س} < ٤ \end{cases}$ ،   قً(س) = $\begin{cases} ٦\text{س} & ، \ ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٢ & ، \ ٢ < \text{س} < ٤ \end{cases}$

١) قً(س) = ٠ ، عندما ٠ < س < ٢

فيكون ٦س = ٠ ومنها س = ٠ ترفض (لماذا؟)

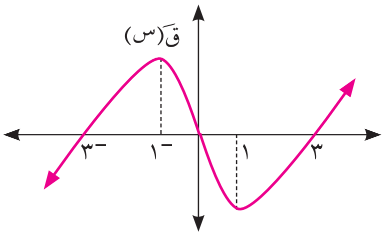
٢) عندما ٢ < س < ٤ فإن قً(س) ≠ ٠ (لماذا؟)

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور يكون



منحنى ق(س) مقعّراً للأعلى في]٠ ، ٢[كذلك في]٢ ، ٤[

مثال ٨ : الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران قَ(س)



معتمداً عليه، جد كلاً مما يأتي:

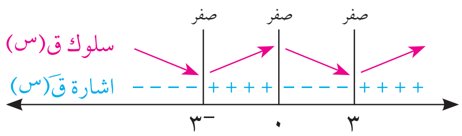
١ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢ القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

٣ مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

٤ قيم س التي يكون عندها نقاط الانعطاف (إن وجدت) .

الحل : نمثل إشارة قَ(س) كما في الشكل المجاور:



١ يكون منحنى ق(س)

متزايداً في]⁻٣ ، ٠[وفي]٣، ∞[

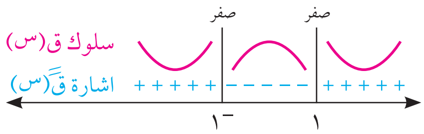
ومتناقصاً في]⁻∞ ، -٣[وفي]٠ ، ٣[

٢ ق(⁻٣) قيمة صغرى محلية

ق(٠) قيمة عظمى محلية

ق(٣) قيمة صغرى محلية.

ونمثل إشارة قًَ(س) كما في الشكل المجاور:



٣ يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأعلى

في]⁻∞ ، ⁻١[وكذلك في]١ ، ∞[

ومقعّراً للأسفل في]⁻١ ، ١[

٤ نقاط الانعطاف تكون عند س = ⁻١ ، س = ١ ..... (لماذا؟)

ملاحظة:

إذا كان ق(س) كثير حدود وكانت (س ، ق(س$_١$)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س)، فإن قًَ(س$_١$) = صفر .

نشاط ٢: إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة، وكان منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٥) وله نقطة انعطاف أفقي عند النقطة (٢ ، ١)، جد قاعدة الاقتران ق(س)

نفرض أن ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ، حيث أ ، ب ، جـ ، د ∈ ح ، أ ≠ ٠

بما أن ق(٠) = ٥ فإن قيمة الثابت د هي ....

وبما أن (٢ ، ١) نقطة انعطاف أفقي فإن ق(٢) = ١ ، قَ(٢) = ٠ ، قً(٢) = ...

ق(٢) = ١ ومنها ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ١ .... (١)

قَ(س) = ...

قَ(٢) = ٠ ومنها ١٢أ + ٤ب + جـ = ٠ .... (٢)

قً(س) = ...

قً(٢) = ... ومنها .... (٣)

وبحل المعادلات الناتجة يكون الاقتران ق(س) = ...

اختبار المشتقة الثانية في تعيين القيم القصوى Second Derivative Test

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق في فترة مفتوحة تحوي جـ وكان قَ(جـ) = ٠ فإن:

١. ق(جـ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت قً(جـ) < ٠
٢. ق(جـ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت قً(جـ) > ٠
٣. يفشل تطبيق الاختبار إذا كانت قً(جـ) = ٠ ، أو قً(جـ) غير موجودة.

مثال ٩ : جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) = ٣س^{٤} – ٨س^{٣} + ٦س^{٢}، باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن).

الحل : ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في ح لأنه كثير حدود

قَ(س) = ١٢س^{٣} – ٢٤س^{٢} + ١٢س

قَ(س) = ٠ ومنها ١٢س^{٣} – ٢٤س^{٢} + ١٢س = ٠

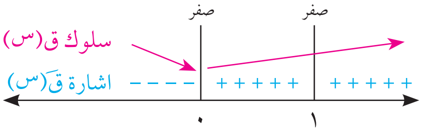
١٢س(س^{٢} – ٢س + ١) = ١٢س(س – ١)^{٢} = ٠ ، ومنها إمّا س = ٠ أو س = ١

ق″(س) = ٣٦س^{٢} − ٤٨س + ١٢

ق″(٠) = ١٢ > ٠ إذن ق(٠) = ٠ قيمة صغرى محلية.

بما أن ق″(١) = ٠ فلا نستطيع تحديد نوع القيمة القصوى ق(١) باستخدام اختبار المشتقة الثانية لذا نلجأ إلى اختبار المشتقة الأولى.

من الشكل المجاور لا يوجد قيمة قصوى محلية عند س = ١ ..... (لماذا؟)



تمارين ٢ - ٤

١ عيّن فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ ق″(س) = (س^{٢} − ٣س − ٤)(س + ٢) ، س ∈ ح

ب قَ(س) = جاس − س ، س ∈ $]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[$

جـ ق(س) = ٤س^{٣} − س^{٤} + س ، س ∈]٠ ، ٤[

د ق(س) = (س − ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ ، س > ٣

هـ ق(س) = جا $\frac{س}{٢}$ ، س ∈]٠ ، π[

و ق(س) = هـ$^{-س}$ جتاس ، س ∈]٠ ، ٢π[

ز ق(س) = { [$\frac{١}{٣}$ س − ١] ، ١ > س ≥ ٣ ؛ س^{٣} ، ٣ > س > ٥ }

٢ حدد نقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية (إن وجدت):

أ ق(س) = س^{٣} + س

ب ق(س) = جتاس ، س ∈]٠ ، ٢π[

جـ ق(س) = $\sqrt[٣]{٥ − س}$

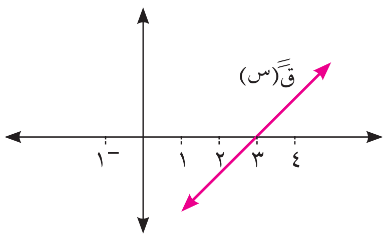
٣ جد القيم القصوى المحلية لكل من الاقترانات الآتية، وحدد نوع كل منها باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن تطبيقها)، وفي حالة عدم إمكانية تطبيقها استخدم اختبار المشتقة الأولى:

أ ق(س) = س^{٣} + ٦س^{٢}

ب ق(س) = |س + ٦|

٤ إذا كان للاقتران ق(س) = أ س^{٢} + س^{٣} نقطة انعطاف عند س = $^{-}$١ ، فجد قيمة/ قيم الثابت أ.

٥ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران قً(س)



إذا علمت أن قَ(٠) = قَ(٦) = ٠ ، جد كلاً مما يأتي:

أ فترات التقعّر، ونقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س)

ب القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

جـ فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س)

٦ إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة، يمر منحناه بالنقطة (١ ، ٥) وله نقطة انعطاف عند س = ٢ بحيث إن معادلة المماس عند نقطة الانعطاف هي: ٣س + ص = ٧ ، جد قاعدة الاقتران ق(س).

٧ إذا كان للاقتران كثير الحدود ق(س) = س^{٤} − ٤س^{٣} + ك(س) نقطة انعطاف أفقي هي (١ ، ٢) ، وكان ع(س) = ك^{٢}(س)، احسب عً(١).

٨ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [$^{-}$٣ ، ٢] ويحقق الشروط الآتية:

ق(٠) = ٠ ، قَ(١) = ٠ ، قَ($^{-}$٢) = ٠ ، قً(س) < ٠ عندما س < ٠ ، قً(س) > ٠ عندما س > ٠

اعتمد على هذه المعلومات للإجابة عن الأسئلة الآتية:

أ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س).

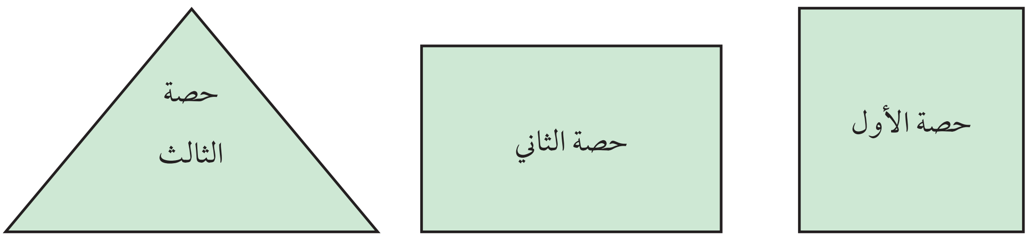
ب ما قيمة/ قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيم قصوى؟ وما نوع كل منها؟

جـ ما قيمة/ قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها نقط انعطاف؟

٢ - ٥ تطبيقات عملية على القيم القصوى (Applications of Extrema) للعلمي فقط

نشاط ١: أحمد مزارع فلسطيني يسكن مدينة يافا، ويملك أراضٍ واسعةٍ من حقول البرتقال، أراد في أحد الأيام أن يختبر ذكاء أبنائه الثلاثة، فاشترى سياجاً طويلاً وقسّمَه إلى ثلاثة أجزاء متساوية في الطول، وأعطى كلاً منهم جزءاً من السياج، وطلب أن يحيط كل واحد منهم جزءاً من الأرض بالسياج الذي أخذه؛ لتصبح الأرض التي أحاطها ملكاً له. سرَّ الأبناء بهدية والدهم، وأراد كل منهم أن يحصل على أكبر مساحة ممكنة فاختار أحدهم جزءاً مربعاً من الأرض، واختار الثاني جزءاً مستطيلاً، أما الثالث فقد اختار جزءاً على شكل مثلث متساوي الساقين.

لو كنت أحد الأبناء، ما الشكل الذي ستختاره ؟ (ولماذا؟)



نشاط ٢: قررت إحدى بلديات الوطن إنشاء مُتَنَزَّهٍ على شكل مستطيل، باسم الشهيد الراحل ياسر عرفات، أمام مبنى المقاطعة الذي دمره الاحتلال. وقد لاحظ مهندسو البلدية وجود شارعين متقاطعين وقرروا أن يكون رأسان من رؤوس المتنزه على الشارعين، والرأسان الآخران على شارع الشهداء (انظر الشكل) فإذا كانت معادلة الشارع الأول (شارع الأمة) على الخريطة هي ص = هـ(س) = ٢٠س ومعادلة الشارع الثاني (شارع الكرامة) هي ص = ق(س) = ٤٢ - س وشارع الشهداء أفقي معادلته ص = ٠، فلمعرفة مساحة أكبر متنزه يمكن إنشاؤه نتبع ما يلي:

نفرض أن طول المتنزه (س)

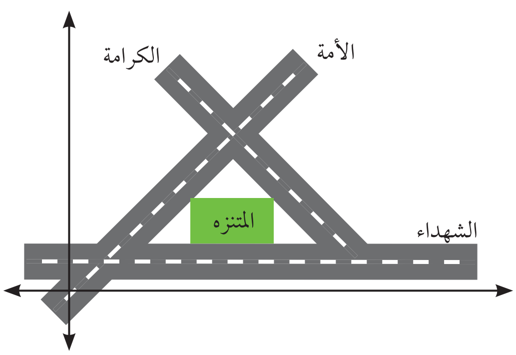
فيكون عرضه هو هـ(ع) = ٢٠ع

وتكون مساحة المتنزه = الطول × العرض

أي أن م = س × ٢٠ع = ٢٠س ع (لماذا؟)

لكن هـ(ع) = ق(س + ع) (لماذا؟)

ومنها فإن ٢٠ع = ٤٢ - س - ع (لماذا؟)



أي أن ع = ... وتصبح المساحة م(س) = $\frac{٢٠}{٢١}$ س (٤٢ - س)

ولتحديد أكبر قيمة للمساحة فإننا نستخدم مفهوم القيم القصوى

مَ = ... ومنها س = ...

وللتأكد من أن قيمة س السابقة تجعل المساحة أكبر ما يمكن نجد مًَ ونكمل الحل.......

إذن مساحة أكبر متنزه = ...

مثال ١ : عددان موجبان مجموعهما ٦٠، جد العددين إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل : نفرض أن العددين هما س ، ص وأن حاصل ضربهما هو م فيكون

م = س × ص

لكن س + ص = ٦٠ ومنه ص = ٦٠ - س

م = س × ص = س × (٦٠ - س) = ٦٠س - س^{٢}

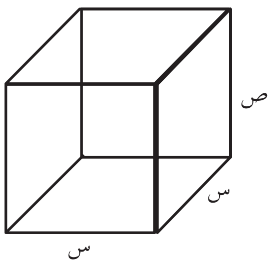
مَ = ٦٠ - ٢س

نجعل مَ = ٠ ومنها ٦٠ - ٢س = ٠ أي س = ٣٠

للتحقق مًَ = -٢ ومنها $\left.مًَ\right|_{س = ٣٠}$ = -٢ < ٠

(عند س = ٣٠ يكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن).

فيكون العددان هما ٣٠ ، ٣٠



مثال ٢ : يراد صنع صندوق هدايا قاعدته مربعة الشكل من الكرتون المقوى حجمه ٨ دسم^{٣}، جد أبعاده بحيث تكون تكلفة تصنيعه أقل ما يمكن. (سعر المتر ثابت)

الحل : نفرض طول ضلع قاعدة الصندوق (س دسم) وارتفاعه(ص دسم)

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

ح = س^{٢}ص ومنها س^{٢}ص = ٨

المساحة الكلية للصندوق = مساحة الجوانب الأربعة + مساحة القاعدتين

$$\text{ت} = ٤\text{س} \times \text{ص} + ٢\text{س}^{٢} \quad ،\quad \text{لكن ص} = \frac{٨}{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ومنها ت} = ٤\text{س} \times \frac{٨}{\text{س}^{٢}} + ٢\text{س}^{٢} = \frac{٣٢}{\text{س}} + ٢\text{س}^{٢}$$

$$\text{وبالاشتقاق ينتج أن: تَ} = \frac{-٣٢}{\text{س}^{٢}} + ٤\text{س} \quad \text{وبوضع تَ} = ٠$$

$$\frac{٣٢}{\text{س}^{٢}} = ٤\text{س} \text{ ، أي أن س}^{٣} = ٨ \text{ ، ومنها س} = ٢\text{دسم}$$

$$\text{تً} = \frac{٦٤}{\text{س}^{٣}} + ٤$$

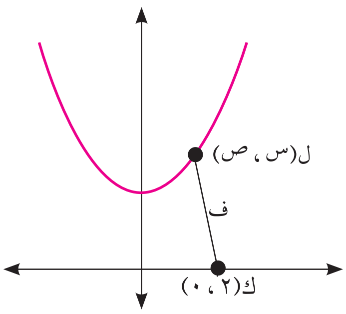
$$\text{ومنها تً}\Big|_{\text{س} = ٢} = \frac{٦٤}{٨} + ٤ = ١٢ > ٠ \text{ (صغرى محلية وحيدة فهي صغرى مطلقة)}$$

التكلفة تكون أقل ما يمكن عندما تكون قاعدة الصندوق مربعةً طول ضلعها ٢دسم، وارتفاع الصندوق ٢ دسم.

مثال ٣: جد أقصر مسافة بين النقطة ك (٢ ، ٠) ومنحنى العلاقة $\text{ص}^{٢} - \text{س}^{٢} = ٨$

الحل : نفرض النقطة ل(س ، ص) على منحنى العلاقة

ونفرض ف = المسافة بين ك ، ل

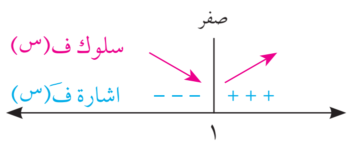


$$\text{حسب قانون المسافة بين نقطتين ف} = \sqrt{(\text{س} - ٢)^{٢} + \text{ص}^{٢}}$$

$$\text{لكن ص}^{٢} = \text{س}^{٢} + ٨ \text{ ، فتكون ف} = \sqrt{٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١٢}$$

$$\text{فَ} = \frac{٤\text{س} - ٤}{٢\sqrt{٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١٢}}$$

بوضع فَ = ٠ ينتج أن س = ١ ..... (لماذا؟)



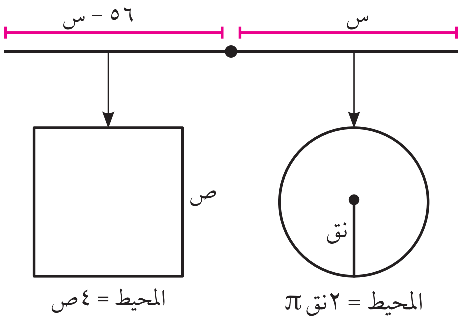
ومن إشارة فَ في الشكل المجاور

تكون المسافة أقصر ما يمكن عندما س = ١ ، ص = ± ٣

ولأن للاقتران قيمة قصوى وحيدة فهي صغرى مطلقة

وتكون أقصر مسافة هي ف = $\sqrt{١٠}$ وحدة.

مثال ٤ : سلك طوله ٥٦سم قسم إلى جزأين، ثني أحدهما على شكل مربع، والجزء الآخر على شكل دائرة، ما أبعاد كل من المربع والدائرة ليكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن؟



الحل : نفرض طول الجزء الذي صنع منه دائرة (س)

فيكون طول الجزء الثاني ٥٦ − س

س = ٢نق π ومنها نق = $\frac{س}{٢\pi}$

كما أن ٥٦ − س = ٤ص ومنها ص = ١٤ − $\frac{١}{٤}$ س

مجموع مساحتيهما م = نق^{٢} π + ص^{٢}

م = $\frac{س^{٢}}{٤\pi} + \left(١٤ - \frac{١}{٤}س\right)^{٢}$

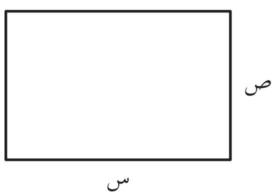
ومنها مَ = $\frac{٢س}{٤\pi} + ٢\left(١٤ - \frac{١}{٤}س\right)\left(-\frac{١}{٤}\right) = \frac{س}{٢\pi} + \frac{١}{٨}س - ٧$

نضع مَ = ٠ ومنها $\frac{س}{٢\pi} + \frac{١}{٨}س - ٧ = ٠$ وبعد التبسيط ينتج أن س = $\frac{٥٦\pi}{٤ + \pi}$

ومنها نق = $\frac{٢٨}{٤ + \pi}$ ، ص = ١٤ − $\frac{١}{٤}\left(\frac{٥٦\pi}{٤ + \pi}\right) = ١٤ - \frac{١٤\pi}{٤ + \pi} = \frac{٥٦}{٤ + \pi}$

مً = $\frac{١}{٢\pi} + \frac{١}{٨} > ٠$ (يوجد قيمة صغرى محلية، وبما أنها وحيدة فهي صغرى مطلقة)

مثال ٥ : أوجد أقل محيط ممكن لمستطيل مساحته ١٦ سم^{٢}



الحل : نفرض طول المستطيل (س سم) وعرضه (ص سم)

مساحة المستطيل م = س ص = ١٦ ومنها ص = $\frac{١٦}{س}$

محيط المستطيل ح = ٢س + ٢ص ومنها يكون ح = ٢س + $\frac{٣٢}{س}$

حَ = ٢ − $\frac{٣٢}{س^{٢}}$ وعندما حَ = ٠ يكون ٢ − $\frac{٣٢}{س^{٢}}$ = ٠ ومنها س = ٤

حً = $\frac{٦٤}{س^{٣}}$ ومنها حً(٤) = ١ (موجب) ⟵ المحيط أقل ما يمكن

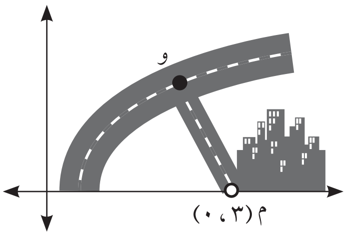
فيكون أقل محيط للمستطيل هو ١٦ سم

تمارين ٢ - ٥

١ يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل في أرضه، وذلك بإحاطتها بسياج، فإذا كان لديه ٨٠ متراً من الأسلاك، فما مساحة أكبر حديقة يمكن للرجل إحاطتها؟

٢ مقلمة على شكل أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ١٩٢ π سم^٣ فإذا علمت أن سعر كل ١ سم^٢ من البلاستيك المستخدم لصنع القاعدة، يعادل ثلاثة أمثال سعر ١ سم^٢ من البلاستيك المستخدم في صنع الجوانب، جد أبعاد المقلمة ذات الأقل تكلفة.

٣ طريق منحنٍ معادلته في المستوى الديكارتي هي ص = ق(س) = $\sqrt{٢ س - ١}$ ، النقطة م(٣ ، ٠) تمثل موقع مستشفى، يراد شق شارع فرعي مستقيم من النقطة (و) إلى موقع المستشفى (م)، عيّن إحداثيات النقطة (و) ليكون طول الشارع (و م) أقل ما يمكن. (انظر الشكل المجاور).



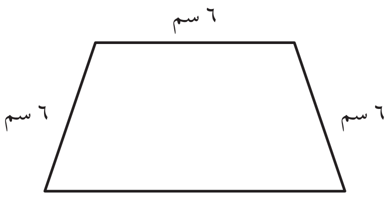
٤ جسم يسير في خط مستقيم بحيث إن بعده ف بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة

ف = أ جتا $\frac{\pi}{٤}$ ن + ب جا $\frac{\pi}{٤}$ ن فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٠ ، ٢] هي ١٠ م/ ث، وكانت سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ ث. احسب الثابتين أ ، ب.

٥ في الساعة الثانية عشرة ظهراً كانت الباخرة ب على بعد ٣٠كم شمال الباخرة أ وتسير غرباً بسرعة ١٠ كم / الساعة، فإذا كانت أ تسير شمالاً بسرعة ٢٠كم في الساعة، فمتى تكون المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن؟

٦ جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم ، ونصف قطر قاعدته ٤ سم.

٧ شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية في الطول وطول كل منها ٦ سم، جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف.



٨ أ ب جـ د مستطيل عرضه أب = ٨ سم وطوله ب جـ = ١٠ سم، م نقطة على الضلع أ ب بحيث أ م = س سم ، ن نقطة على الضلع ب جـ بحيث ن جـ = $\frac{٣}{٢}$ س سم، جد قيمة س بحيث تكون مساحة المثلث م ن جـ أكبر ما يمكن.

تمارين عامة

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات (١-١٤):

١ إذا كان ق(س) = { س٢ − س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ س − ١ ، ١ < س ≤ ٣ } ، فما مجموعة قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) نقطة حرجة في الفترة [٠ ، ٣]؟

أ) {٠ ، ١ ، ٣} ب) {٠ ، ٣} ج) {٠ ، ١/٢ ، ٣} د) {٠ ، ١/٢ ، ١ ، ٣}

٢ ليكن ق(س) = √(٤ − س٢) ، س ∈ [−٢ ، ٢]، فما قيمة س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيمة عظمى مطلقة؟

أ) −٢ ب) ٠ ج) ١ د) ٢

٣ إذا كان قَ(س) = (س٢ − ١)٣ (س − ٢)٤ فما الفترة التي يكون فيها ق(س) متناقصاً؟

أ)]−∞ ، −١] ب) [−١ ، ١] ج) [١ ، ٢] د) [٢ ، ∞[

٤ إذا كان ق(س) = س٣ − ٣س معرفاً في الفترة [−٣ ، ١]، فما القيمة الصغرى المطلقة للاقتران ق(س)؟

أ) −٣٦ ب) −١٨ ج) −٣ د) −٢

٥ إذا كان ق(س) كثير حدود وكان قً(س) > ٠ عندما س < ٤ ، قً(س) < ٠، عندما س > ٤ وكان قَ(٣) = ٠ ، فما العبارة الصحيحة دائماً من العبارات الآتية؟

أ) قً(٣) = ٠ ب) قَ(٤) = ٠

ج) ق(٣) قيمة عظمى محلية د) ق(٣) قيمة صغرى محلية

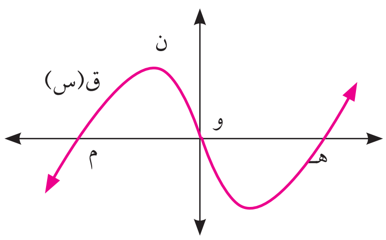
٦ ما مجموعة جميع قيم جـ التي يمكن الحصول عليها من تطبيق نظرية رول على الاقتران ق(س) = ٨ في الفترة [٠ ، ١] ؟

أ) { } ب) {٠} ج)]٠ ، ١[د) [٠ ، ١]

٧ بالاعتماد على الشكل المجاور، الذي يمثل منحنى ق(س) ما النقطة التي يكون عندها قَ(س)، قً(س) موجبتين:

أ) هـ ب) ن

ج) م د) و



٨ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [١ ، ٣] وكان قً(س) < ٠ لجميع قيم س ∈]١ ، ٣[، ق(س) له ثلاث نقاط حرجة فقط في [١ ، ٣] وكان قَ(٢) = ٠، فما العبارة الصحيحة مما يأتي؟

أ) ق($\frac{٥}{٢}$) < ٠
ب) ق($\frac{٥}{٢}$) < ق(٢)
ج) ق($\frac{٥}{٢}$) = ق(٢)
د) ق($\frac{٥}{٢}$) > ق(٢)

٩ ما قيمة الثابت م التي تجعل لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^٣$ + م $س^٢$ − ٩س نقطة انعطاف عند س = ⁻١ ؟

أ) ٣
ب) ٦
ج) ⁻٣
د) ⁻٤

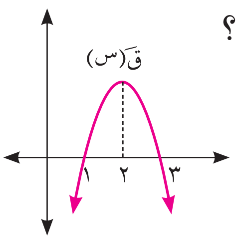
١٠ ما قيمة جـ التي تحددها نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) = $س^٢$ + س − ٦ في [⁻١ ، ٢]؟

أ) $\frac{٥}{٢}$
ب) $\frac{٣}{٢}$
ج) $\frac{١}{٢}$
د) $\frac{⁻١}{٢}$

١١ إذا كان ق(س) = س|س| فما العبارة الصحيحة فيما يأتي؟

أ) قَ(١) غير موجودة
ب) ق(٠) قيمة عظمى محلية
ج) ق(٠) قيمة صغرى محلية
د) (٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف

١٢ الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س)، ما مجموعة حل المتباينة قً(س) < ٠ ؟



أ)]١ ، ٣[
ب)]٢ ، ∞[
ج)]⁻∞ ، ٢[
د)]⁻∞ ، ١[∪]٣ ، ∞[

١٣ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة معرفاً على [أ ،ب] ، ما أكبر عدد ممكن من النقط الحرجة يمكن أن نحصل عليها للاقتران ق(س)؟

أ) ١
ب) ٢
ج) ٣
د) ٤

١٤ إذا كان ق(س) = لوهـ جاس ، س ∈ [$\frac{\pi}{٤}$ ، π[، متى يكون منحنى ق(س) متزايداً؟

أ) [$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]
ب) [$\frac{\pi}{٤}$ ، π[
ج) [$\frac{\pi}{٢}$ ، π[
د) [$\frac{\pi}{٢}$ ، π]

أجب عن الأسئلة الآتية (٢ – ١٣):

٢ إذا كان ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ $\left[\cdot ، \frac{\pi}{٤}\right]$ أثبت أن ق(س) متزايد على مجاله.

٣ جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = $\frac{س + ١}{س^٢ + ٣}$.

٤ إذا كان ق(س) = س^٢ – ٣س – أ يحقق شروط نظرية رول على [$^-$١ ، أ] جد قيمة/ قيم الثابت أ.

٥ إذا كان ق(س) = س^٣ – ٣س^٢ – ٩س + ٥ معرفاً في الفترة]$^-$٢ ، ٦[جد:

أ القيم القصوى المطلقة للاقتران ق(س).

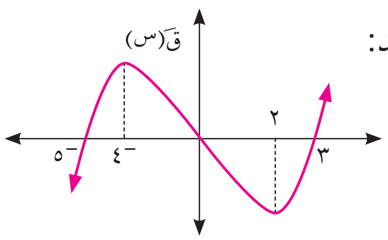
ب فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

جـ نقط الانعطاف، وزوايا الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س).

٦ معتمداً على الشكل المجاور، الذي يمثل منحنى الاقتران قَ(س) جد:

أ فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

ب الإحداثيات السينية لنقط الانعطاف.

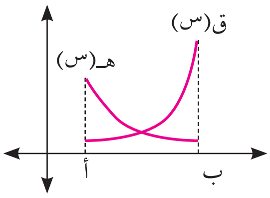


٧ إذا كان الاقتران ق(س) كثير حدود معرفاً على [٢ ، ٦] ويقع منحناه في الربع الأول، ومتناقصاً على مجاله، وكان الاقتران هـ(س) = ٨ – س بيّن أن الاقتران ك(س) = (ق × هـ)(س) متناقص في [٢ ، ٦].

٨ ما أبعاد أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها ١٠ سم؟

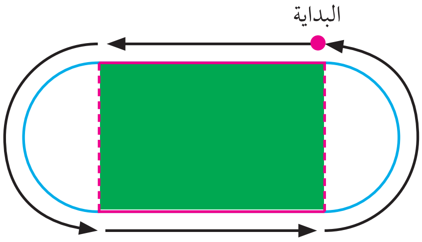
٩ إذا كان ق(س) = جتاس – هـ(س) + ٣س ، س ∈ $\left[\cdot ، \frac{\pi}{٢}\right]$، حيث هـ(س) قابل للاشتقاق، أثبت أن الاقتران (ق + هـ)(س) متزايد في تلك الفترة.

١٠ الشكل المجاور يبيّن منحنى الاقترانين ق ، هـ المعرفين على [أ ، ب] بيّن أن الاقتران $\frac{ق'(س)}{هـ(س)}$ هو اقتران متزايد على]أ ، ب[.



١١ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة، جد قاعدة الاقتران ق(س) إذا علمت أن النقطة (٢ ، ⁻١) هي نقطة قيمة صغرى محلية، وأن النقطة (٠ ، ٣) هي نقطة انعطاف للاقتران ق(س).

١٢ مسار للسباق طوله ٤٠٠ م، يحيط بميدان على شكل مستطيل في كل من طرفيه نصف دائرة. ما أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن؟



١٣ سلك طوله ١٨ سم، صنع منه مثلثان كل منهما متساوي الأضلاع، ما طول ضلع كل من المثلثين ليكون مجموع مساحتيهما أصغر ما يمكن؟

١٤ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
احل مسائل منوعة على نظريتي رول والمتوسطة			
احدد مجالات التزايد والتناقص للاقترانات			
احدد مجالات التقعر للاقترانات			
احل مشكلات وتطبيقات حياتية على المشتقات			

الوحدة

٣

المصفوفات والمحددات

Matrices and Determinants

توزيع أعداد الطلبة في بعض محافظات فلسطين للعام الدراسي ٢٠١٤/٢٠١٥ (حكومية وخاصة ووكالة)

الرقم	المديرية	اللون	عدد الطلبة: ذكور	عدد الطلبة: اناث	عدد الطلبة: المجموع
1	القدس		19430	21312	40742
2	شمال غزة		42721	43850	86571
3	جنوب نابلس		12873	13316	26189
4	جنوب الخليل		24360	25227	49587
5	الوسطى		37081	36837	73918
6	طولكرم		22858	22942	45800
7	رام الله		40889	41610	82499
8	بيت لحم		25931	26405	52336
المجموع			226143	231499	457642

إذا طلب منك إعادة تنظيم بيانات المديريات حسب اللون المجاور لكل منها، فكيف يمكنك ترتيبها بطريقة منظمة تساعد في دراستها؟ ماذا يمثل كل لون؟

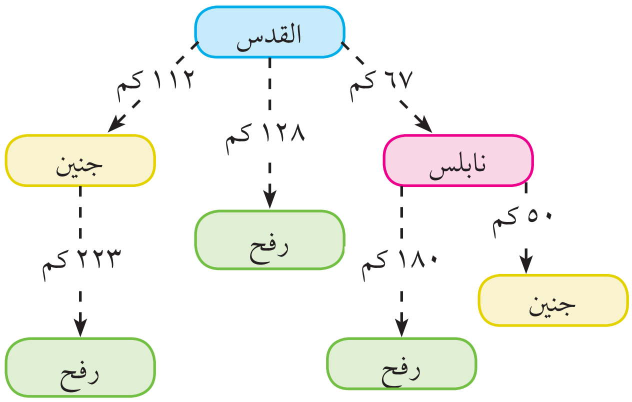
يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المصفوفات والمحددات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ التعرف إلى المصفوفة، وبعض المصفوفات الخاصة.
٢ إيجاد رتبة المصفوفة، وعدد مدخلاتها.
٣ التعرف إلى شروط تساوي مصفوفتين، وحل معادلات ناتجة من تساويهما.
٤ إجراء العمليات على المصفوفات.
٥ التعرف إلى مفهوم المحددات، وخصائصها.
٦ حساب محدد المصفوفات المربعة من الرتبة الأولى والثانية والثالثة، وتمييز المنفردة منها.
٧ إيجاد النظير الضربي للمصفوفات المربعة غير المنفردة من الرتبة الثانية.
٨ توظيف المصفوفات في حل أنظمة معادلات خطّيّة.

٣ - ١ المصفوفة (Matrix)*

نشاط ١: تريد مجموعة من السياح التنقل بين بعض مدن فلسطين، فجمعت المعلومات الخاصة بالمسافات بين هذه المدن وهي: من القدس: إلى جنين ١١٢ كم، وإلى نابلس ٦٧ كم، وإلى رفح ١٢٨كم ومن نابلس: إلى جنين ٥٠ كم، وإلى رفح ١٨٠ كم. ومن جنين إلى رفح ٢٢٣ كم.

ولتسهيل التعامل مع هذه المعلومات، رتبها أحد السياح كما يأتي:



ما رأيك بهذا التمثيل؟ هل يعطي الصورة الحقيقية للمسافات بين المدن؟ حاول تمثيل المعلومات السابقة بطرق أخرى؟

إن تنظيم هذه المعلومات له طرق متعددة، وسيتم التعرف على تنظيم جديد للبيانات، يسمى «المصفوفة».

تعريف:

المصفوفة هي تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد، على هيئة صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين [ ] ويرمز لها بأحد الأحرف أ ، ب ، .... وتسمى الأعداد داخل المصفوفة مدخلات.

تتحدد رتبة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة فيها، على النحو م × ن حيث م يمثل عدد صفوفها، ن يمثل عدد أعمدتها (وتقرأ م في ن).

عدد مدخلات المصفوفة = عدد صفوفها × عدد أعمدتها.

* أول من قدم المصفوفات بصورتها الحالية هو العالم الرياضي A .A. Cayley عام ١٨٥٧م.

الصورة العامة للمصفوفةمن الرتبة م × ن تكون على النحو:

$$أ_{م\times ن} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & ..(أ_{١هـ}).. & أ_{ن١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & .... & أ_{ن٢} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (أ_{ي١}) & (أ_{ي٢}) & ..(أ_{يهـ}).. & أ_{ين} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ أ_{م١} & أ_{م٢} & .... & أ_{من} \end{bmatrix}$$

وتتحدد أي مدخلة فيها بحسب الصف والعمود الواقعة فيهما، فالمدخلة التي تقع في تقاطع الصف ي مع العمود هـ هي المدخلة $أ_{يهـ}$.

مثال ١ : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ١ \\ ٧ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٥- & ٦ \\ ١ & ٤ & ٨ \end{bmatrix}$

١ جد رتبة كل من المصفوفتين أ ، ب

٢ جد $أ_{٢١}$ ، $ب_{١٢}$

الحل :

١ المصفوفة أ تتكون من ٣ صفوف وعمودين فهي من الرتبة ٣ × ٢

والمصفوفة ب من الرتبة ٢ × ٣

٢ قيمة المدخلة $أ_{٢١}$ = ٢- ، $ب_{١٢}$ = ١

أنواع خاصة من المصفوفات:

١ المصفوفة المربعة: هي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها = عدد أعمدتها = ن، وتسمى عندئذ مصفوفة مربعة من الرتبة ن.

٢ مصفوفة الوحدة: ويرمز لها بالرمز (م) وهي مصفوفة مربعة، وتكون مدخلاتها على النحو الآتي:

$$م_{يهـ} = \begin{cases} ١ \;،\; ي = هـ \\ ٠ \;،\; ي \neq هـ \end{cases}$$ فمثلاً $م_{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $م_{٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ وهكذا ...

٣ المصفوفة الصفرية (و): هي المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار، مثل $و_{٢\times٣} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٤ مصفوفة الصف: هي المصفوفة المكونة من صف واحد مثل ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ١^- & ٤ \end{bmatrix}$

٥ مصفوفة العمود: هي المصفوفة المكونة من عمود واحد مثل جـ = $\begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

٦ المصفوفة القطرية: هي المصفوفة المربعة س بحيث $س_{ي هـ} = ٠$ ، $\forall$ ي $\neq$ هـ

مثل س = $\begin{bmatrix} س_{١١} & ٠ & ٠ \\ ٠ & س_{٢٢} & ٠ \\ ٠ & ٠ & س_{٣٣} \end{bmatrix}$ ، ونسمي القطر الذي مدخلاته: $س_{ي هـ}$ ، $\forall$ ي = هـ

بالقطر الرئيسي للمصفوفة س.

٧ المصفوفة المثلثية العلوية: هي المصفوفة المربعة التي تكون مدخلاتها التي تحت القطر الرئيسي أصفاراً،

مثل: أ = $\begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ ٠ & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ ، س = $\begin{bmatrix} س_{١١} & س_{٢١} & س_{٣١} \\ ٠ & س_{٢٢} & س_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & س_{٣٣} \end{bmatrix}$

مثال ٢ : لديك المصفوفات أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣^- & ٨^- \\ ١ & ٥ & ٩ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$

١ ما نوع المصفوفة جـ؟

٢ هل ب مصفوفة وحدة؟

٣ ما مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة أ ؟

الحل :

١ المصفوفة جـ هي مصفوفة عمود.

٢ المصفوفة ب ليست مصفوفة وحدة. (لماذا؟)

٣ مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة أ يساوي ٢

نشاط ٢: كوّنت ياسمين المصفوفة ك من الرتبة ٣ × ٣ حسب الشروط الآتية

$$ك_{ي هـ} = \begin{cases} هـ > ي & ، \quad ي + هـ \\ هـ < ي & ، \quad ي - هـ \\ هـ = ي & ، \quad \dfrac{ي}{ي + هـ} \end{cases}$$

فكانت قيمة المدخلة $ك_{١٢}$ = ١، قيمة المدخلة $ك_{٢١}$ = ... ، $\sum_{ي=١}^{٣} ك_{ي٣}$ = ...

مدخلات القطر الرئيسي هي ....

تساوي مصفوفتين

تعريف:

تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

وبالرموز نقول أن أ = ب إذا وفقط إذا كان $أ_{ي هـ} = ب_{ي هـ}$ لجميع قيم ي ، هـ .

مثال ٣: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & س \\ \sqrt{ع} & ص^{٢} \end{bmatrix}$

١ هل أ = ب؟ ولماذا؟

٢ جد قيم س، ص، ع التي تجعل أ = جـ

الحل :

١ أ ≠ ب لأن $أ_{١١} \neq ب_{١١}$

٢ بما أن أ = جـ ، فتكون مدخلاتهما المتناظرة متساوية، ومنها س = ٢ ، $ص^{٢}$ = ٤

أي أن ص = ±٢ وكذلك $\sqrt{ع}$ = ٥ ومنها ع = ٢٥.

تمارين ٣ - ١

١ ينتج مصنع ألبان نوعين من العبّوات: حجم كبير، وحجم صغير، فإذا كان لهذا المصنع فروع في كل من: الخليل وطولكرم وغزة، وكان عدد العبّوات التي ينتجها كل فرع يومياً كما يأتي:

فرع الخليل: ٨٠٠ عبّوة من الحجم الكبير، ٩٠٠ عبّوة من الحجم الصغير.

فرع طولكرم: ٦٠٠ عبّوة من الحجم الكبير، ٤٥٠ عبّوة من الحجم الصغير.

فرع غزة: ٧٥٠ عبّوة من الحجم الكبير، ٦٥٠ عبّوة من الحجم الصغير.

أ نظم المعلومات السابقة بمصفوفة، بحيث تمثل الصفوف فيها أنواع العبّوات، ثم اكتب رتبتها؟

ب ماذا يمثل مجموع مدخلات العمود الثاني؟

٢ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٤ & ٥ & ٢ \\ س & ٢ & ٦ \\ ٧ & -س & ١ \\ ٧ & ٢٠ & ٣ \end{bmatrix}$ فجد:

أ رتبة المصفوفة أ   ب قيمة $(أ_{٣١} + أ_{١٢})$ جـ قيمة س بحيث إن: $(أ_{٢٣})^{٣} = ٢٧$

٣ إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢} + ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ س - ١ & ٥ \end{bmatrix}$، فجد قيمة / قيم س.

٤ كوّن مصفوفةً مربعةً من الرتبة ٢ بحيث تعطى مدخلاتها حسب العلاقة $أ_{ي هـ} = ٢^{ي - هـ}$

٥ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٥ & -٢ \\ ٥ & -٣ & ٦ \end{bmatrix}$، فجد المصفوفة ب من الرتبة ٣×٢

بحيث إن $أ_{ي هـ} = ب_{هـ ي}$ لجميع قيم ي ، هـ

٣ - ٢ العمليات على المصفوفات (Operations on Matrices)

أولاً: جمع المصفوفات:

نشاط ١: تبيع شركة ألبسة بدلات رياضية في فرعيها في كل من بيت لحم ونابلس، فإذا كانت ألوان البدلات المبيعة أحمر وأزرق وأبيض، وسجلت أعداد البدلات التي تم بيعها في الفرعين خلال شهري أيلول وتشرين أول من العام ٢٠١٦ فكانت كما في الجدول الآتي:

الفرع	الشهر	اللون		
		أحمر	أزرق	أبيض
نابلس	أيلول	٤٠٠	٤٠٠	٥٠٠
	تشرين ١	٣٠٠	٥٠٠	٢٨٠
بيت لحم	أيلول	٥٠٠	٤٠٠	٨٠٠
	تشرين ١	٣٠٠	٣٥٠	٢٥٠

١. إذا مثلنا ما باعه فرع نابلس في الشهرين المذكورين بالمصفوفة س = $\begin{bmatrix} ٥٠٠ & ٤٠٠ & ٤٠٠ \\ ٢٨٠ & ٥٠٠ & ٣٠٠ \end{bmatrix}$
فإن رتبتها.........
٢. مثل ما باعه فرع بيت لحم في الشهرين المذكورين بالمصفوفة ص، وعين رتبتها.
٣. هل المصفوفتان س ، ص من نفس الرتبة؟
٤. هل يمكن إيجاد مصفوفة (ع) تمثل مجموع ما باعته الشركة من البدلات في فرعيها في المدينتين؟
٥. كوّن المصفوفة ع (إن أمكن).

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين من الرتبة م × ن، فإن جـ = أ + ب هي مصفوفة من الرتبة م × ن مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة في كل من أ ، ب أي أن: $جـ_{ي هـ} = أ_{ي هـ} + ب_{ي هـ}$

مثال ١ : إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} ٥ & ٧ & -٣ \\ ٦ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$

جد ناتج ما يأتي (إن أمكن) ❶ س + ص ❷ ص + س ❸ ص + ع

الحل :

١ س + ص = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -٧ + ٣ & ٥ + ٢ \\ -٤ + ٤ & ٣ + ٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -٤ & ٧ \\ ٠ & ٨ \end{bmatrix}$

٢ ص + س = $\begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -٤ & ٧ \\ ٠ & ٨ \end{bmatrix}$ (ماذا تلاحظ؟)

٣ ص + ع غير معرفة؛ لأن رتبة ص ≠ رتبة ع.

ثانيًا: ضرب المصفوفة بعددٍ حقيقيٍ

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفةً من الرتبة م × ن ، وكان ك عدداً حقيقياً، فإن ك أ = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ن، وتكون مدخلاتها على النحو: جـ$_{يهـ}$ = ك أ$_{يهـ}$ لجميع قيم ي ، هـ.

مثال ٢ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ & ١ \\ -٢ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فجد ❶ ٢أ ❷ -أ ❸ أ + (-أ)

الحل :

١ ٢أ = $\begin{bmatrix} ٢ \times -٣ & ٢ \times ٤ & ٢ \times ١ \\ ٢ \times -٢ & ٢ \times ٠ & ٢ \times ٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -٦ & ٨ & ٢ \\ -٤ & ٠ & ١٠ \end{bmatrix}$

٢ -أ = (-١)أ = -١ $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ & ١ \\ -٢ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٣ & -٤ & -١ \\ ٢ & ٠ & -٥ \end{bmatrix}$

٣ أ + (-أ) = $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ & ١ \\ -٢ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٣ & -٤ & -١ \\ ٢ & ٠ & -٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ (فسّر الإجابة).

مثال ٣ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ فجد ٣أ + ٢ب

الحل : ٣أ + ٢ب = ٣ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ + ٢ $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 15 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 21 & 17 \end{bmatrix}$$

ثالثاً: طرح المصفوفات

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين من نفس الرتبة م × ن ، فإن أ − ب = أ + (− ب)

مثال ٤ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة ب − أ

الحل : ب − أ = ب + (−أ) = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

أو : ب − أ = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 3-(-2) \\ 0-1 & 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

لاحظ أن مدخلات ب − أ تنتج من طرح مدخلات المصفوفة أ من المدخلات المناظرة لها في المصفوفة ب

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعددٍ حقيقيٍّ:

إذا كانت (أ ، ب ، جـ ، و) مصفوفات من نفس الرتبة، ك ∈ ح فإن:

١ أ + ب = ب + أ .... (الخاصيّة التبديلية)

٢ (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) .... (الخاصيّة التجميعية)

٣ أ + و = و + أ = أ .... (المصفوفة الصّفرية المحايدة لعملية جمع المصفوفات)

٤ أ + (−أ) = (−أ) + أ = و .... (النظير الجمعي)

٥ ك (أ + ب) = ك أ + ك ب .... (توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات)

مثال ٥ : حل المعادلة المصفوفية س + $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$

الحل : بإضافة النظير الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ إلى طرفي المعادلة تصبح:

$$\left(س + \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$$

ومنها س + $\left(\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

أي أن س + و = $\begin{bmatrix} ٨ & -٦ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ومنها س = $\begin{bmatrix} ٨ & -٦ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$

تدريبات:

١ أ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٤ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix}$ ، فجد ب + ٢أ ، ٣أ − ٢ب

ب إذا كانت جـ = $\begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، د = $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ فبيّن أن: جـ + د = ٩م$_{٢}$

٢ حل المعادلة المصفوفية: ٢ $\begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ − ٣س = س + م$_{٢}$

٣ إذا كانت جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة أ بحيث: ٢أ + جـ = و

٤ جد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة: س $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix}$ + ص $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣ \end{bmatrix}$

٥ إذا كانت س + ٢ص = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix}$ ، ٣س − ص = $\begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٨ & -٥ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفتين س ، ص.

رابعًا: ضرب المصفوفات (Matrix Multiplication)

نشاط ٢: بعد انتهاء المرحلة الأولى من دوري كرة القدم الفلسطيني في المحافظات الشمالية للعام ٢٠١٦/٢٠١٧م، كانت الفرق الثلاثة الأولى، هي: (ثقافي طولكرم(ط)، وهلال القدس(ق)، وشباب السمّوع (س)، فإذا علمت أن مصفوفة نتائج مباريات هذه الفرق هي:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{س} & \text{ق} & \text{ط} \end{array} \\ \text{ش} = & \left[\begin{array}{ccc} ٥ & ٨ & ٧ \\ ٣ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ & ١ \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{فوز} \\ \text{تعادل} \\ \text{خسارة} \end{array}$$

وأن الفريق الفائز يحصل على ٣ نقاط، والمتعادل يحصل على نقطة واحدة، والخاسر لا يحصل على أي نقطة.

١ إذا كانت المصفوفة ص = $\left[\begin{array}{ccc} ٠ & ١ & ٣ \end{array}\right]$ تمثل النقاط التي يحصل عليها الفريق في أي مباراة يلعبها، والمصفوفة ع = $\left[\begin{array}{c} ٨ \\ ٢ \\ ١ \end{array}\right]$ تمثل نتائج مباريات فريق هلال القدس، كم نقطة يكون رصيد هذا الفريق؟

٢ كوّن مصفوفةً تمثل نتائج الفرق الثلاثة من النقاط، ثم رتّب الفرق تنازليًا حسب عدد النقاط.

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن، ب مصفوفة من الرتبة ن × ل، فإن حاصل الضرب أ . ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ل ، وتكون مدخلات المصفوفة جـ على النحو

$$\text{جـ}_{\text{ي هـ}} = \text{أ}_{\text{ي ١}} \times \text{ب}_{\text{١ هـ}} + \text{أ}_{\text{ي ٢}} \times \text{ب}_{\text{٢ هـ}} + \ldots + \text{أ}_{\text{ي ن}} \times \text{ب}_{\text{ن هـ}}$$

مثال ٦ : لتكن أ = $\left[\begin{array}{ccc} ٢ & ١- & ٣ \\ ٠ & ٤ & ٥ \end{array}\right]$ ، ب = $\left[\begin{array}{cc} ٢ & ٥ \\ ٦ & ٣- \\ ١ & ٢ \end{array}\right]$ ، جـ = $\left[\begin{array}{cc} ٢ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{array}\right]$

فأي العمليات الآتية تكون معرفة: ١ أ . جـ ٢ أ . ب ٣ ب . جـ

الحل :

١ أ من الرتبة ٢ × ٣ ، جـ من الرتبة ٢ × ٢، فإن أ . جـ غير معرفة. (لماذا؟)

٢ أ . ب معرفة لأن عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب.

٣ ب . جـ معرفة أيضاً. (لماذا؟)

مثال ٧ :

يعمل ثلاثة خيّاطين في مشغلٍ للخياطة، ينتج ثلاثة أنواع من الألبسة (قميص، بنطال، بلوزة)، فإذا كانت أجرة خياطة القميص ٥ دنانير، وأجرة خياطة البنطال ٦ دنانير، وأجرة خياطة البلوزة ٣ دنانير، وفي أحد الأيام كان إنتاجهم كما في الجدول المجاور.
ما الأجرة التي حصل عليها كل خياط في ذلك اليوم؟

العدد	خيّاط١	خيّاط٢	خيّاط٣
قميص	٢	٣	٢
بنطال	٤	٢	٥
بلوزة	٦	٥	٢

الحل :

لحساب أجرة الخيّاط الأول مثلاً، فإننا نجري العمليات الآتية:

٥ × ٢ + ٦ × ٤ + ٣ × ٦ = ٥٢ ديناراً.

ولكن باستخدام المصفوفات يمكن تحديد أجرة كل خيّاط، بحيث نكون مصفوفتين: الأولى مصفوفة أجرة خياطة القطعة الواحدة من كل نوع، وهي س = $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٣ \end{bmatrix}$

والثانية مصفوفة كميات إنتاج الخيّاطين ذلك اليوم وهي جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ٥ \\ ٦ & ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

وعليه فأجرة كل خيّاط تستخرج من ناتج الضرب س . جـ

أي أن: س . جـ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ٥ \\ ٦ & ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٥\times٢ + ٦\times٤ + ٣\times٦ & ٥\times٣ + ٦\times٢ + ٣\times٥ & ٥\times٢ + ٦\times٥ + ٣\times٢ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٥٢ & ٤٢ & ٤٦ \end{bmatrix}$

وتكون أجرة الخيّاط الأول ٥٢ ديناراً، والثاني ٤٢ ديناراً، والثالث ٤٦ ديناراً.

مثال ٨ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣^{-} \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٢^{-} & ٩ & ٥^{-} \end{bmatrix}$ فجد (إن أمكن):

١ أ . جـ ٢ جـ . أ

الحل :

١ بما أن رتبة أ هي ٢×٢ ، رتبة جـ هي ٢×٣

فإنه يمكن إيجاد ناتج الضرب على النحو أ . جـ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣^{-} \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٢^{-} & ٩ & ٥^{-} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٢^{-}\times٥ + ٢\times٣^{-} & ٩\times٥ + ١\times٣^{-} & ٥^{-}\times٥ + ٤\times٣^{-} \\ ٢^{-}\times٦ + ٢\times١ & ٩\times٦ + ١\times١ & ٥^{-}\times٦ + ٤\times١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٦^{-} & ٤٢ & ٣٧^{-} \\ ١٠^{-} & ٥٥ & ٢٦^{-} \end{bmatrix} = ل$$

لاحظ أن المدخلة $ل_{٢١}$ = ٤٢ ، ناتجة من ضرب مدخلات الصف الأول من أ مع ما يناظرها من مدخلات العمود الثاني من جـ.

٢ لا يمكن إيجاد حاصل الضرب جـ . أ (لماذا؟)

نشاط ٣: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٢^{-} \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، فجد(إن أمكن) كلاً من: أ . ب ، ب . أ

١ أ . ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٢^{-} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٩ & ٤١ \\ ٤^{-} & ٦^{-} \end{bmatrix}$

٢ ب . أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٢^{-} \end{bmatrix}$ = ... ماذا تستنتج؟

مثال ٩ : لتكن أ مصفوفةً من الرتبة ٢ × ن، ب مصفوفةً من الرتبة ٥ × ك

فما قيم كل من ن، ك التي تجعل أ . ب ، ب . أ معرفتين؟

الحل : حتى يكون أ . ب معرفاً فإن قيمة ن = ٥، وليكون ب . أ معرفاً فإن قيمة ك = ٢(لماذا؟)

مثال ١٠: جد ناتج $\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٢ \end{bmatrix} \right)$

الحل : $\begin{bmatrix} ٤٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١٣ & ١١ \end{bmatrix}$ ، ما رتبة المصفوفة الناتجة؟

خصائصُ عملية الضّرب على المصفوفات:

إذا كانت أ ، ب، جـ مصفوفات حيثُ أن عمليتي الضرب والجمع معرفتان، م المصفوفة المحايدة، ك ∈ ح فإنّ:

١ (أ . ب) . جـ = أ . (ب . جـ) .... الخاصيّة التجميعيّة.

٢ أ . (ب + جـ) = (أ . ب) + (أ . جـ) .... توزيع الضّرب على الجمع من اليمين .

٣ (أ + ب) . جـ = (أ . جـ) + (ب . جـ) .... توزيع الضّرب على الجمع من اليسار.

٤ أ . م = م . أ = أ .... (العنصر المحايد لعملية ضرب المصفوفات).

٥ ك (أ . ب) = (ك أ) . ب = أ . (ك ب)

مثال ١١: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ فجد أ . ب ، أ . جـ

الحل : أ . ب = $\begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

أ . جـ = $\begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

لاحظ أن أ . ب = أ . جـ ، لكن ب ≠ جـ (ماذا تستنتج؟)

تمارين ٣ - ٢

١ إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن أ . ب = جـ فما رتبة ب في كل مما يلي:

أ $أ_{٢\times٥}$ ، $جـ_{٢\times٤}$ ب $أ_{٣\times٣}$ ، $جـ_{٣\times٥}$

٢ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ٦ & ٥ \\ ٧ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} -٤ & ١ \\ ٥ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ فجد ما يأتي:

أ أ . ب ب جـ . ب جـ $أ^٢$

٣ جد قيم س ، ص بحيث $\begin{bmatrix} ٥ & س & ٣ \\ -٢ & ٤ & -١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ص & ٤ \\ ٨ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦٤ & ٢٠ \\ -٣٤ & ٥ \end{bmatrix}$

٤ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٨ & ٧ \end{bmatrix}$ فبيّن أن: س = ٥ ص

٥ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، فبيّن أن: $أ^٢ - ب^٢ \neq$ (أ − ب) (أ + ب)

٦ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٠ & س \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فهل يمكن إيجاد قيمة/ قيم س بحيث إن: $أ^٢$ = ب؟

٧ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \sqrt{٣} \end{bmatrix}$

أ جد المصفوفة د بحيث أن: أ + د = ب . د

ب بيّن أن: $جـ^٣$ = جـ

٣ – ٣ المحدّدات (Determinants)

نشاط ١: اتفق سليم وأخته منال على طريقةٍ لتشفير الأعداد، وذلك بربط العدد المشفَّر (أ)

بالشكل $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ع & ل & ص & س \\ \hline\end{array}$ حيث س × ع – ص × ل = أ

فمثلاً تشفير العدد ٥ يمكن أن يكون $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ٢ & ١ & ٣ & ٤ \\ \hline\end{array}$

وتشفير العدد –٥ هو $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ٣ & ٤ & ٢ & ١ \\ \hline\end{array}$، وهكذا … ، تشفير العدد ٦ هو ……،

تشفير العدد ٠ هو ………. ، هل يكون تشفير العدد وحيداً؟

ما رأيك لو مثلنا تشفير العدد ١٠ وهو $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ٨ & -٢ & -٧ & ٣ \\ \hline\end{array}$

بمصفوفةٍ مربعةٍ على النحو $\begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ ……

اكتب ٣ مصفوفات تمثل تشفيراً للعدد (٠).

للمحددات كثير من التطبيقات والاستخدامات في مجالات عدة، في الجبر والهندسة ، فالمحدد يمثل اقتراناً يربط كل مصفوفةٍ مربعةٍ بعددٍ حقيقي، ويفاد منه في حل أنظمة المعادلات، وفي إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة، وسوف تقتصر دراستنا في هذا الدرس على إيجاد محدد المصفوفات المربعة من الرتبة الأولى، والثانية، والثالثة فقط.

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً فإننا نرمز لمحددها بالرمز | أ | :

١ إذا كانت أ = $[أ_{١١}]$ فإن $|أ| = أ_{١١}$

٢ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix}$ فإن $|أ| = \begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{vmatrix} = أ_{١١} \times أ_{٢٢} - أ_{٢١} \times أ_{١٢}$

٣ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$

فإن $|أ| = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$

مثال ١ : إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فجد: ① |أ| ، |ب| ② |أ + ب|

الحل :

١ $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \times ١ - ٥ \times ٣ = -١٣$

$|ب| = \begin{vmatrix} -١ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{vmatrix} = -١ \times ٣ - (-٤) \times (-٢) = -١١$

٢ أ + ب $= \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $|أ + ب| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٤ - ١ = ٣$ (ماذا تلاحظ)؟

نظرية:

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً من الرتبة الثالثة، فإنه يمكن إيجاد | أ | بدلالة مدخلات أي صف، أو أي عمود وذلك بضربها بالمحدد الناتج من تصور شطب الصف ي والعمود هـ، وإعطاء إشارة لحاصل الضرب وَفْق القاعدة $(-١)^{ي+هـ}$

مثال ٢ : جد $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ ٤ & -٥ & ٢ \\ ١ & ٦ & ٧ \end{vmatrix}$ ① باستخدام التعريف ② بدلالة مدخلات العمود الثاني

الحل :

١ بالتعريف يكون $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ ٤ & -٥ & ٢ \\ ١ & ٦ & ٧ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} -٥ & ٢ \\ ٦ & ٧ \end{vmatrix} - (-٣) \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٧ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ ١ & ٦ \end{vmatrix} = ١٣$

٢ بدلالة مدخلات العمود الثاني يكون $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ ٤ & -٥ & ٢ \\ ١ & ٦ & ٧ \end{vmatrix}$

$= (-١)^{١+٢}(-٣) \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٧ \end{vmatrix} + (-١)^{٢+٢}(-٥) \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٧ \end{vmatrix} + (-١)^{٣+٢}(٦) \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$

$= ٣ \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٧ \end{vmatrix} - ٥ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٧ \end{vmatrix} - ٦ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$

$= ٣(٢٦) - ٥(١٣) - ٦(٠) = ٧٨ - ٦٥ = ١٣$ (ماذا تلاحظ)؟

مثال ٣ : جد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & س & ١ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix} = ٢٠$

الحل : نجد قيمة المحدد بدلالة مدخلات الصف الثالث، حيث يحوي أصفاراً.

أي أن $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & س & ١ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix} = ٥(-١)^{٣+٣} \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & س \end{vmatrix} = ٢٠$ ومنها $٥(س - ٤) = ٢٠$ أي $س = ٨$

بعض خصائص المحددات:

يلزمنا في كثير من الحالات حساب قيم المحددات بصورةٍ سريعةٍ، وخاصة عندما تكون المدخلات أعداداً كبيرةً، ولتحقيق ذلك، وتوفيراً للوقت والجهد، سوف نتعرف على بعض خصائص المحددات:

١ عند تبديل صف مكان صف، أو عمود مكان آخر، فإن قيمة المحدد تضرب بـ (-١) .

فمثلاً $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = (-١) \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix}$ (تحقق من ذلك).

٢ يمكن إخراج عامل مشترك من أي صف، أو أي عمود،

فمثلاً $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٣ & ٦ & ١٥ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{vmatrix}$

(بإخراج العدد ٣ كعامل مشترك لمدخلات الصف الثالث وضربه بمحدد المصفوفة الناتجة).

تحقق من تساوي المحددين

٣ إذا أضيف لمدخلات أي صف، أو أي عمود مضاعفات نظائرها في صفٍ آخر، أو عمودٍ آخر،

فلا تتغير قيمة المحدد، فمثلاً $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ + ٤ \times ٥ & ٣ + ٤ \times ٦ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix}$ (تحقق من ذلك)

(ضرب مدخلات الصف الثاني بـ ٤ واضافتها لنظائرها في مدخلات الصف الأول)

٤ إذا تساوت المدخلات المتناظرة في صفين أوفي عمودين في مصفوفة فإن محددها يساوي صفراً.

فمثلاً يكون $\begin{vmatrix} ٨ & ٦ & ٣ \\ ٩ & ٧ & ٢ \\ ٨ & ٦ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٠ (تحقق من ذلك)

٥ إذا كانت المصفوفة مصفوفة مثلثية علوية فإن محددها يساوي حاصل ضرب المدخلات على القطر الرئيسي فمثلاً اذا كانت أ = $\begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & ٠ \\ أ_{٣٣} & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن | أ | = أ$_{١١}$ × أ$_{٢٢}$ × أ$_{٣٣}$

فكّر وناقش:

ما قيمة محدد المصفوفة المربعة التي تحتوي على صفٍ، أو عمودٍ، كل مدخلاته أصفار؟

نشاط ٢: إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ فإن:

١ قيمة | أ | = ...

٢ |٢أ| = $\begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٨ & ٦ \end{vmatrix}$ = ٢ × ٨ − ٦ × ٤ = −٨ = ٤ | أ | = (٢)^{٢} | أ |

٣ |−٣أ| = ...

٤ |ك أ| = ...

قاعدة (١):

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً من الرتبة ن ، فإن |ك أ| = ك^{ن} | أ |، حيث ك ∈ ح

مثال ٤ : إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً، وكان | أ | = ٥، |٢أ| = ٤٠، فما رتبة المصفوفة أ؟

الحل : نفرض أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن، وبما أن |٢أ| = ٤٠ فإن ٢^{ن} | أ | = ٤٠

ومنها ٢^{ن} × ٥ = ٤٠ أي أن ٢^{ن} = ٨ ومنها ينتج أن: ن = ٣

أي أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة ٣

قاعدة (٢):

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة ن فإن | أ . ب| = | أ | × |ب|

مثال ٥ : إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢^- \\ ٥^- & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤^- & ١ \\ ٢ & ٣^- \end{bmatrix}$ ، فجد | أ . ب|

الحل : | أ | = $\begin{vmatrix} ٣ & ٢^- \\ ٥^- & ٤ \end{vmatrix}$ = ١٠ − ١٢ = ٢⁻

وكذلك |ب| = $\begin{vmatrix} ٤^- & ١ \\ ٢ & ٣^- \end{vmatrix}$ = ٢ − ١٢ = ١٠⁻

ومنه | أ . ب| = | أ | × |ب| = ٢⁻ × ١٠⁻ = ٢٠

هل يمكنك إيجادها بطريقة أخرى؟

نشاط ٣: إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ، فلإيجاد |س . ص| فإننا نجد

س . ص = $\begin{bmatrix} ٢٣ \end{bmatrix}$ ومنها |س . ص| = ٢٣

١ ص . س = ...

٢ |ص . س| = ...

ماذا تلاحظ؟

تمارين ٣ – ٣

١ جد قيمة كل من المحددات الآتية :

أ $\begin{vmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ & ١ \\ -٤ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix}$ جـ $|٥م_٣|$

٢ حل المعادلة الآتية: $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & س & ٥ \\ ١ & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & -١ \\ ١ & س \end{vmatrix}$

٣ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية بحيث إن: $|٣أ| = ٥٤$ ، $|أ . ب| = -١٢$

فما قيمة $|٢أ| + |٥ب|$ ؟

٤ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$، وكان $|أ^٣| = ١٢٥$، فما قيمة/ قيم س؟

٥ إذا علمت أن معادلة المستقيم في المستوى والمار بالنقطتين $(س_١، ص_١)$ ، $(س_٢، ص_٢)$

تعطى بالقاعدة $\begin{vmatrix} س & ص & ١ \\ س_١ & ص_١ & ١ \\ س_٢ & ص_٢ & ١ \end{vmatrix} = ٠$

فاستخدم القاعدة في إيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢،٣)، (٥، ٧).

٦ اذكر خاصية/ خصائص المحددات التي استخدمت في كل من المتساويات الآتية:

أ $\begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ١ & ١٠ \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٥ & ١٥ \end{vmatrix} = ٠$ جـ $\begin{vmatrix} ٧ & ٦ \\ ٩ & ١١ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٦ & ٧ \\ ١١ & ٩ \end{vmatrix}$

٧ باستخدام خصائص المحددات أثبت ما يلي:

أ $\begin{vmatrix} ب+جـ & أ & ١ \\ أ+ب & جـ & ١ \\ أ+جـ & ب & ١ \end{vmatrix} = ٠$ ب $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & ١٠ \end{vmatrix} = -٢٠٠$

٣ - ٤ النظير الضربي للمصفوفة المربعة (Inverse of a Square Matrix)

عرضنا في درس سابق المصفوفة المحايدة (م) في عملية ضرب المصفوفات، وتعرّفنا إلى خاصية مهمة من خصائص ضرب المصفوفات، وهي أ . م = م . أ = أ حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن.

نشاط ١: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٤ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} \frac{-٢}{٦} & \frac{٤}{٦} \\ \frac{-٤}{٦} & \frac{٥}{٦} \end{bmatrix}$

١ | أ | = ٦

٢ أ . ب = $\begin{bmatrix} ٥ & -٤ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{-٢}{٦} & \frac{٤}{٦} \\ \frac{-٤}{٦} & \frac{٥}{٦} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ = م٢

٣ ب . أ = ... ماذا تلاحظ؟

تعريف:

تسمى المصفوفة المربعة أ مصفوفةً غير منفردةٍ إذا وجدت مصفوفة مربعة ب من نفس الرتبة بحيث أ . ب = ب . أ = م، وتسمى المصفوفة ب نظيراً ضربياً للمصفوفة أ، ونرمز لها بالرمز أ$^{-١}$ ونكتب (ب = أ$^{-١}$) ويكون أ . أ$^{-١}$ = أ$^{-١}$. أ = م

مثال ١ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ فبيّن فيما إذا كانت ب = أ$^{-١}$

الحل : أ . ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ = م٢

ب . أ = $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ = م٢

ومنها ب = أ$^{-١}$ (لماذا؟)

نشاط ٢: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٢ & ٨ & -١٩ \\ ١ & -٤ & ١٠ \\ ١ & -٣ & ٧ \end{bmatrix}$

$أ . ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -٢ & ٨ & -١٩ \\ ١ & -٤ & ١٠ \\ ١ & -٣ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$ب . أ = \begin{bmatrix} -٢ & ٨ & -١٩ \\ ١ & -٤ & ١٠ \\ ١ & -٣ & ٧ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \text{.........}$ ماذا تستنتج ؟

مثال ٢ : إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، تحقق فيما إذا كان للمصفوفة س نظيراً ضربياً أم لا؟

الحل : نفرض أن للمصفوفة س نظيراً ضربياً هو $ص = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ ، ومن التعريف يكون

$س . ص = ص . س = م_٢$

أي أن: $س . ص = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣أ + ٢جـ & ٣ب + ٢د \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

لكن $\begin{bmatrix} ٣أ + ٢جـ & ٣ب + ٢د \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ (لماذا؟)

∴ لا يوجد للمصفوفة س نظير ضربي.

تعريف:

المصفوفة المنفردة هي المصفوفة المربعة التي لا يوجد لها نظير ضربي.

نظرية:

المصفوفة أ منفردة إذا وفقط إذا كان $|أ| = ٠$

مثال ٣ : أي المصفوفات الآتية منفردة وأيها غير منفردة؟ أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤- \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٣ & ١- \end{bmatrix}$

الحل : | أ | = $\begin{vmatrix} ٢ & ٤- \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix}$ = ٣٢ ≠ صفر ، ومنها تكون المصفوفة أ غير منفردة.

| ب | = $\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٣ & ١- \end{vmatrix}$ = ٠ أي أن المصفوفة ب منفردة.

مثال ٤ : جد قيمة س التي تجعل المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & (\text{س}+١) \end{bmatrix}$ منفردة.

الحل : | أ | = $\begin{vmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & (\text{س}+١) \end{vmatrix}$ = ٢(س + ١) – ٢٤

وبما أن أ مصفوفة منفردة فيكون | أ | = ٠

٢(س + ١) – ٢٤ = ٠

٢س + ٢ – ٢٤ = ٠ ومنها س = ١١

خصائص النظير الضربي:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين، وغير منفردتين، ومن نفس الرتبة ، وكان ك عدداً حقيقياً ≠ ٠، فإن:

١) $(\text{أ}^{-1})^{-1}$ = أ

٢) $(\text{ك أ})^{-1} = \frac{١}{\text{ك}}(\text{أ}^{-1})$

٣) $(\text{أ . ب})^{-1} = \text{ب}^{-1} . \text{أ}^{-1}$

إثبات الخاصية الثالثة:

(البرهان للمعرفة فقط)

(أ . ب) $(\text{أ . ب})^{-1}$ = م بضرب طرفي المعادلة بالمصفوفة أ^{-1} من اليمين ينتج أن:

أ^{-1} . (أ . ب) . $(\text{أ . ب})^{-1}$ = أ^{-1} . م ومنها ينتج $(\text{أ}^{-1}$. أ) . ب . $(\text{أ . ب})^{-1}$ = أ^{-1} . م

أي أن ب . $(\text{أ . ب})^{-1}$ = أ^{-1} . م وبضرب طرفي المعادلة بالمصفوفة ب^{-1} من اليمين ينتج أن:

ب^{-1} . ب . $(\text{أ . ب})^{-1}$ = ب^{-1} . أ^{-1} . م ومنها $(\text{ب}^{-1}$. ب) . $(\text{أ . ب})^{-1}$ = ب^{-1} . أ^{-1} . م

أي أن: $(\text{أ . ب})^{-1}$ = ب^{-1} . أ^{-1}، وبنفس الطريقة نثبت أن (أ . ب) × $(\text{أ . ب})^{-1}$ = م

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة:

سوف نتعرف على طرق إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة، وستقتصر دراستنا على النظير الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية فقط.

مثال ٥ : جد النظير الضربي للمصفوفة $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ (إن وجد).

الحل : نفرض أن: $\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix}$

$\text{أ} . \text{أ}^{-١} = \text{م}_{٢}$ أي $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

ومنها $\begin{bmatrix} ٥\text{س}+٣\text{ع} & ٥\text{ص}+٣\text{ل} \\ ٦\text{س}+٤\text{ع} & ٦\text{ص}+٤\text{ل} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

كما أن $\text{أ}^{-١} . \text{أ} = \text{م}_{٢}$ أي $\begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٥\text{س}+٦\text{ص} & ٣\text{س}+٤\text{ص} \\ ٥\text{ع}+٦\text{ل} & ٣\text{ع}+٤\text{ل} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

وبحل المعادلات الناتجة من تساوي المصفوفتين في الحالتين السابقتين:

ينتج أن: $\text{س} = ٢$ ، $\text{ع} = -٣$ ، $\text{ص} = \frac{-٣}{٢}$ ، $\text{ل} = \frac{٥}{٢}$

أي أن: $\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & \frac{-٣}{٢} \\ -٣ & \frac{٥}{٢} \end{bmatrix}$ (تحقق من ذلك)

تعميم:

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{bmatrix}$ مصفوفةً غير منفردةٍ فإن $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \begin{bmatrix} \text{أ}_{٢٢} & -\text{أ}_{٢١} \\ -\text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١١} \end{bmatrix}$

أي أن: $\text{أ}^{-١}$ تنتج من ضرب المصفوفة أ بمقلوب محددها بعد تبديل أماكن مدخلات القطر الرئيسي وتغيير إشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة أ .

مثال ٦ : إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ١^- \end{bmatrix}$ ، فجد س$^{-١}$ (إن أمكن).

الحل : |س| = ٢⁻ − ٦ = ٨⁻ ≠ ٠

المصفوفة س لها نظير ضربي، وتكون س$^{-١}$ = $\frac{١}{٨^-}\begin{bmatrix} ١^- & ٢^- \\ ٣^- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٨} & \frac{١}{٤} \\ \frac{٣}{٨} & \frac{١^-}{٤} \end{bmatrix}$

نشاط ٣: حاولت مريم إيجاد العلاقة بين قيمة |أ$^{-١}$|، وقيمة | أ |، فجربت عدة مصفوفات من الرتبة الثانية، وحصلت على النتائج الآتية:

١ | أ | = ٢ ، |أ$^{-١}$| = $\frac{١}{٢}$

٢ | أ | = $\frac{١}{٧}$ ، |أ$^{-١}$| = ٧

٣ | أ | = ك ، ك ≠ ٠ ، |أ$^{-١}$| = ... ، واستنتجت العلاقة |أ$^{-١}$| = $\frac{١}{|أ|}$

هل العلاقة التي حصلت عليها مريم صحيحة دائماً؟ فسّر إجابتك.

تمارين ٣ – ٤

١ بيّن أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي.

أ = $\begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} \text{جاس} & ٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ، د = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٦ & -٣ & ٩ \\ ٢ & ٨ & -١ \end{bmatrix}$

٢ ما قيم ك التي تجعل كلاً من المصفوفات الآتية منفردةً ؟ أ = $\begin{bmatrix} \text{ك} & \text{ك} \\ ٤ & ٢\text{ك} \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} \text{ك} & ٤ \\ ١ & \text{ك} \end{bmatrix}$

٣ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$، فجد: أ $\text{أ}^{-١}$ (إن أمكن) ب $(\text{أ}^{-١})^{-١}$

٤ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{س} & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$، وكان $|\text{أ}^{-١}| = \frac{١}{٥}$ ، فما قيمة س؟

٥ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{س} & -٣ \\ ١ & \text{ص} \end{bmatrix}$ ، وكان $|\text{أ}^{-١}| = |\text{أ}|$ فما قيمة/ قيم المقدار (س ص)؟

٦ إذا علمت أن أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$، وكان أ . جـ = ب ، فجد $\text{جـ}^{-١}$

٧ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين وكانت أ مصفوفةً غير منفردةٍ بحيث أ . ب = أ . جـ
فأثبت أن: ب = جـ ، بحيث جـ مصفوفة.

٣ - ٥ حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات
(Solving Systems of Linear Equations)

للعلمي فقط

نشاط ١: يزرع الحاج أبو رفيق أرضه سنوياً بالقمح والشعير، ويبيع المحصول في السوق الفلسطيني، فإذا كان ثمن ٣ أكياس من القمح مع ٥ أكياس من الشعير يساوي ١٤٠ ديناراً، وكان ثمن ٥ أكياس من القمح يزيد عن ثمن ٤ أكياس من الشعير بمقدار ٣٦ ديناراً.

حاول أحمد كتابة النظام المكون للمسألة من معادلتين، بفرض أن س تمثل سعر الكيس الواحد من القمح ، ص سعر الكيس الواحد من الشعير، فحصل على المعادلتين

٣س + ٥ص = ١٤٠ .... (١)

٥س - ٤ص = ٣٦ .... (٢)

وكتب مصفوفة المعاملات أ = $\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$

ومصفوفة المتغيرات ك = $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ ، ومصفوفة الثوابت جـ = $\begin{bmatrix} \triangle \\ \square \end{bmatrix}$

ثم كتب المعادلة المصفوفية أ . ك = جـ

وتعرفنا في صفوف سابقة على حل أنظمة المعادلات الخطّيّة (عدد المعادلات = عدد المتغيرات، ولها حل وحيد) بطريقتي الحذف والتعويض، وفي هذا الدرس سنبرز أهمية المصفوفات والمحددات في حل هذه الأنظمة، وستتناول ثلاث طرق:

١ طريقة النظير الضربي*

٢ طريقة كريمر*

٣ طريقة جاوس

* يكتفى بحل نظام مكون من معادلتين خطيتين فقط عند الحل بطريقتي النظير الضربي وكريمر.

أولاً: طريقة النظير الضربي

يمكننا تمثيل نظام من المعادلات الخطّيّة على شكل معادلة مصفوفية، باستخدام ثلاث مصفوفات، هي: مصفوفة المعاملات أ، ومصفوفة المتغيرات ك، ومصفوفة الثوابت جـ .

إذا كان لدينا نظام المعادلات الخطّيّة الآتي:

٢س + ٣ص = ١٠ ، −٣س +٥ص = ٤ ، فإن مصفوفة المعاملات هي: أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$

ومصفوفة المتغيرات هي: ك = $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ ، ومصفوفة الثوابت هي: جـ = $\begin{bmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$

ويمثل النظام السابق من المعادلات الخطّيّة بمعادلةٍ مصفوفيةٍ كما يأتي:

$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$ وهي على الصورة أ . ك = جـ وبالتالي:

تكون ك = أ$^{-١}$. جـ بشرط أن أ مصفوفة غير منفردة (لماذا؟)

مثال ١ : حل النظام : ٢س + ص = ⁻١ ، ٤س + ص = ١، باستخدام طريقة النظير الضربي.

الحل : نكتب المعادلة المصفوفية على النحو: $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ١ \end{bmatrix}$

|أ| = $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٢ − ٤ = ⁻٢ ومنها أ$^{-١}$ = $\frac{١}{-٢}\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{-١}{٢} \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{-١}{٢} \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -١ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \\ -١ + -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٣ \end{bmatrix}$ أي أن: س = ١ ، ص = ⁻٣

فكّر وناقش:

ماذا يحدث للإجابة إذا تم تغيير ترتيب المعادلتين هكذا:

٤س + ص = ١ ، ٢س + ص = ⁻١

نشاط ٢: عند حل نظام المعادلات الآتي: ٣ س − ب ص = ٣ ، ب س − ٣ ص = ب، باستخدام طريقة النظير الضربي، حيث ب > ٣. حوّل سفيان النظام إلى المعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} ٣ & -ب \\ ب & -٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ب \end{bmatrix}$$ وهي على الصورة أ . ك = جـ

١ ما إشارة | أ |؟

٢ $أ^{-١}$ = ...

٣ قيمة ص = ...

ثانياً: طريقة كريمر

سبق وأن مثلنا أي نظام من المعادلات الخطّيّة بمعادلةٍ مصفوفيةٍ على النحو أ . ك = جـ

حيث إن مصفوفة المعاملات أ غير منفردةٍ، ك مصفوفة المتغيرات، جـ مصفوفة الثوابت، فإذا كان النظام

يتضمن المتغيرين س ، ص ، فإننا نجدهما على النحو: س = $\frac{|أ_{س}|}{|أ|}$ ، ص = $\frac{|أ_{ص}|}{|أ|}$

حيث إن: $أ_{س}$ المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات س بعمود الثوابت.

$أ_{ص}$ المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات ص بعمود الثوابت.

مثال ٢ : باستخدام طريقة كريمر حل النظام الآتي: ٣ س + ٥ ص = ١ ، ٢ س + ٣ ص = ٠

الحل : نكون المصفوفات: أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $أ_{س}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $أ_{ص}$ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ فيكون:

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ - ١٠ = -١ ، |أ_{س}| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ - ٠ = ٣ ، |أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix} = -٢$$

∴ س = $\frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٣}{-١} = -٣$ ، ص = $\frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-٢}{-١} = ٢$

نشاط ٣: قامت حنين بحل نظام مكون من معادلتين خطّيتين بالمتغيرين س ، ص، فوجدت أن المصفوفة

أ$_{\text{س}}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$ ، والمصفوفة أ$_{\text{ص}}$ = $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ فإن:

مصفوفة المعاملات للنظام الذي حلّته حنين هي: ....

س = ...   ، ص = ...

ثالثاً: طريقة جاوس

لقد قدم الرياضي الألماني كارل جاوس (١٧٧٧–١٨٥٥) هذه الطريقة التي تعتمد على تكوين مصفوفة ممتدة (تشمل المعاملات والثوابت في نظام المعادلات)، فإذا كان لدينا النظام:

أ$_{١١}$ س + أ$_{٢١}$ ص + أ$_{٣١}$ ع = جـ$_{١}$

أ$_{١٢}$ س + أ$_{٢٢}$ ص + أ$_{٣٢}$ ع = جـ$_{٢}$

أ$_{١٣}$ س + أ$_{٢٣}$ ص + أ$_{٣٣}$ ع = جـ$_{٣}$

فإن المصفوفة الممتدة للنظام هي $\overline{\text{أ}}$ = $\left[\begin{array}{ccc|c} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} & \text{جـ}_{١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} & \text{جـ}_{٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} & \text{جـ}_{٣} \end{array}\right]$

وللحصول على حل للنظام، نجري بعض العمليات على صفوف $\overline{\text{أ}}$ ، لنحصل على مصفوفةٍ مثلثيةٍ علويةٍ ونجد منها أولاً قيمة المتغير ع ، ثم بالتعويض العكسي نجد قيمة المتغير ص، ثم المتغير س.

والعمليات التي يمكن إجراؤها على صفوف المصفوفة أ :

١ تبديل صف مكان صف آخر.

٢ ضرب مدخلات أي صف بعدد لا يساوي صفراً.

٣ ضرب مدخلات أي صف بعدد لا يساوي صفراً، وإضافتها إلى صف آخر.

ملاحظة:

إذا كانت أ$_{١١}$ = ٠ ، فيمكن تبديل صف مدخلته الأولى ≠ ٠ مكان الصف الأول في المصفوفة المتدة $\overline{\text{أ}}$

مثال ٣ : استخدم طريقة جاوس لحل النظام: ٣ س + ٧ ص = ١٠ ، ٢ س − ٥ ص = −٣

الحل : المصفوفة الممتدة للنظام هي $\overline{أ} = \left[\begin{array}{c|cc} ١٠ & ٧ & ٣ \\ -٣ & -٥ & ٢ \end{array}\right]$ ونجري العمليات على النحو الآتي:

$$\left[\begin{array}{c|cc} ١٠ & ٧ & ٣ \\ -\frac{٢٩}{٣} & -\frac{٢٩}{٣} & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow{ص_٢ + \frac{-٢}{٣} ص_١} \left[\begin{array}{c|cc} ١٠ & ٧ & ٣ \\ -٣ & -٥ & ٢ \end{array}\right]$$

ومنها تكون $\frac{-٢٩}{٣}$ ص = $\frac{-٢٩}{٣}$ ، أي أن ص = ١

وبالتعويض العكسي ٣س + ٧(١) = ١٠ ومنها س = ١

مثال ٤ : استخدم طريقة جاوس لحل النظام: س + ص − ع = ٩ ، ص + ٣ع = ٣ ، −س − ٢ع = ٢

الحل : نكون المصفوفة الممتدة $\overline{أ} = \left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & -١ & ١ & ١ \\ ٣ & ٣ & ١ & ٠ \\ ٢ & -٢ & ٠ & -١ \end{array}\right]$ ونجري العمليات الآتية:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & -١ & ١ & ١ \\ ٣ & ٣ & ١ & ٠ \\ ٨ & -٦ & ٠ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow{ص_٣ - ص_٢} \left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & -١ & ١ & ١ \\ ٣ & ٣ & ١ & ٠ \\ ١١ & -٣ & ١ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow{ص_٣ + ص_١} \left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & -١ & ١ & ١ \\ ٣ & ٣ & ١ & ٠ \\ ٢ & -٢ & ٠ & -١ \end{array}\right]$$

وبهذا حصلنا على مصفوفةٍ مثلثيةٍ علويةٍ، فنجد قيم المجاهيل بالتعويض العكسي

فتكون −٦ع = ٨ ، ومنها ع = $\frac{-٤}{٣}$ كذلك ص + ٣ع = ٣ ، ومنها ص = ٧

كما أن: س + ص − ع = ٩ ومنها س = $\frac{٢}{٣}$

تمارين ٣ - ٥

١ حل كلاً من الأنظمة الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي:

أ س − ص = ٣
٢س + ص = ٦

ب س + ص = ٢
١٠س + ص = ١١

٢ حل أنظمة المعادلات الآتية باستخدام طريقة كريمر:

أ س − ص = ٥
س + ٢ص = ٢

ب س + ص = −٣
٢ص + س = −٢

٣ عند حل نظام مكون من معادلتين خطّيتين بالمتغيرين س ، ص بطريقة كريمر، وجد أن:

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \quad ، \quad أ_{س} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$$

، فجد قيمة س ، ص

٤ استخدم طريقة جاوس في حل الأنظمة الآتية:

أ ٣س − ص = ١ ، س + ٢ص = ٥

ب س − ص + ع = ٦ ، س + ٢ص + ع = ٣ ، ٢س + ص − ع = ٠

تمارين عامة

١ اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ١- & ٤ \\ ٩ & ٣- & ٦ \\ ١- & ٧ & ٢ \end{bmatrix}$ فما قيمة $أ_{١٢} - أ_{٣١}$ ؟

أ) ٤ ب) ١- ج) ١ د) ٣-

٢ إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ٣ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & س^٢ + س \end{bmatrix}$ فما مجموعة قيم س ؟

أ) {٣ ، ٢-} ب) {٣-} ج) {٢} د) {٣- ، ٢}

٣ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥- & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٦- & ١ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة المصفوفة ٢٢أ − ٥(أ + ٢ب) + ٢٧ب؟

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ١٧ & ١٧ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٣٤- & ٥١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٣٤ & ٥١ \end{bmatrix}$

٤ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين، فما العبارة الصحيحة دائما فيما يأتي؟

أ) |٢أ| = ٤|أ| ب) |أ + ب| = |أ| + |ب|

جـ) أ . ب = ب . أ د) $|ب . أ^{-١}| = \frac{|ب|}{|أ|}$

٥ إذا كان س . ص = ص . س = م ، فما العبارة الصحيحة دائماً فيما يأتي: (س ، ص مربعتان من نفس الرتبة)

أ) $س^{-١}$ = ص ب) ص مصفوفة منفردة جـ) س = ص د) س = −ص

٦ إذا كانت س مصفوفة بحيث س . $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ فماذا يمكن أن تكون المصفوفة س؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \end{bmatrix}$

٧ إذا كانت أ $=\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فما المصفوفة التي تساوي $أ^{-١} + أ$ ، حيث $أ^{-١}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ؟

أ) و ‏ ‏ ‏ ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ١٠ & ٦ \end{bmatrix}$ ‏ ‏ ‏ جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ‏ ‏ ‏ د) $٧\,م_٢$

٨ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين
بحيث إن: $|أ\,.\,ب| = ١٨$، $|أ| + |ب| = ١١$، وكان $|أ| \leq |ب|$ فما قيمة $|أ|$ ؟

أ) ٧ ‏ ‏ ‏ ب) ٩ ‏ ‏ ‏ جـ) ٢ ‏ ‏ ‏ د) ٦

٩ إذا علمت أن أ $=\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$، فما قيمة $أ^٢ - أ$ ؟

أ) $١٠\,م_٢$ ‏ ‏ ‏ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ ‏ ‏ ‏ جـ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ٩ \end{bmatrix}$ ‏ ‏ ‏ د) $٨\,م_٢$

١٠ استخدم أحمد طريقة كريمر لحل نظام مكون من معادلتين خطّيتين في المتغيرين س ، ص
فوجد أن: $|أ_{س}| = ٢|أ| = -\frac{١}{٢}|أ_{ص}|$ ، فما قيم س، ص على الترتيب؟

أ) ٢ ، −٤ ‏ ‏ ‏ ب) −٤ ، ٢ ‏ ‏ ‏ جـ) ١، −٢ ‏ ‏ ‏ د) ٢ ، $\frac{-١}{٢}$

٢ إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & س \\ ٢ & ص \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ص & -١ \\ س & -٤ \end{vmatrix} = ٧$ ، فما قيم س ، ص؟

٣ إذا كانت أ $=\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ فجد: أ $|أ|\,أ^{-١}$ ‏ ‏ ‏ ب $|٣أ|$ ‏ ‏ ‏ جـ $(-٢أ)^{-١}$

٤ جد قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} ٢ & س & ١ \\ س & ٣ & س \\ ٥ & س & ٤ \end{vmatrix} = -٩$

٥ حل المعادلات المصفوفية الآتية:

أ $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ (باستخدام النظير الضربي)

ب $\begin{bmatrix} س & ص \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ & ١١ \end{bmatrix}$

٦ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} س & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٤ & ص \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيم س ، ص؟

٧ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين غير صفريتين، بحيث أن أ . ب = و ، فأثبت أن:
إحدى المصفوفتين أ ، ب على الأقل ليس لها نظير ضربي.

٨ عند حل المعادلتين ن س − ص = ٥ ، ك س + ص = ٣ ، ن ، ك عددان حقيقيان لا يساويان صفراً.

باستخدام طريقة كريمر، إذا كانت $\begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ تمثل محدد $أ_{ص}$

جد قيمة: أ ن ، ك ب س ، ص

٩ إذا كانت $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ فجد $(أ^{٢})^{-١}$ ، $(أ^{-١})^{٢}$ (ماذا تلاحظ؟)

١٠ استخدم طريقة كريمر لحل نظام المعادلات: ٣س + ٢ ص = −٤ ، ٥ ص + س = ٣

١١ استخدم طريقة جاوس في حل النظام الآتي:

س − ص + ٤ع = ٩ ، ٢س + ٣ص + ٢ع = ٢ ، ٣ص + س − ع = −٤

١٢ إذا كانت $\begin{vmatrix} س & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{٢}س \end{vmatrix} = -٥٠$ ، فجد قيم س مستخدماً خصائص المحددات.

١٣ أقيّم ذاتي: أعبر بلغتي عن المفاهيم الأكثر إثارة في هذه الوحدة.

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة

٤

التكامل غير المحدود وتطبيقاته

Indefinite Integral and its Applications

كيف يستطيع المهندسون تصميم المباني ذات المنحنيات والمنحدرات المعقدة؛ لتبدو في النهاية في غاية الإبداع والإتقان؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التكامل غير المحدود وتطبيقاته في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ إيجاد الاقتران الأصلي لاقتران معطى (إن أمكن) وتحديد العلاقة بين التفاضل والتكامل.

٢ التعرف إلى قواعد التكامل غير المحدود، واستخدامها في إيجاد تكاملات معطاة.

٣ إيجاد التكامل غير المحدود لاقترانات كثيرة حدود، ومثلثية، وأسّية، ولوغاريتمية، ونسبية.

٤ استخدام طرق التكامل، مثل: التكامل بالتعويض، وبالأجزاء، وبالكسور الجزئية في إيجاد تكاملات معطاة.

٥ توظيف التكامل غير المحدود في تطبيقات هندسية وفيزيائية.

٤ - ١ التكامل غير المحدود (Indefinite Integral)

تعاني محافظات الوطن من شحّ في المياه، وتعتبر مشكلة المياه من أبرز معوّقات التنمية في فلسطين بشكل عام، لذلك يعكف المهتمون بالتنقيب عن المياه الجوفية وحفر الآبار الارتوازية، للتغلب على أسباب شحّ المياه، والتفكير في البحث عن مصادر متجددة.

نشاط ١: كان معدل تسرب الماء من خزان رئيسي يعطى بالعلاقة $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٣\text{ن م}^{٣}$ / ساعة حيث ن تمثل الزمن بالساعة، برأيك كيف يمكن تحديد قاعدة الاقتران (ص) الذي يمثل كمية الماء المتسرب من هذا الخزان بعد فترة محددة من الزمن؟

نشاط ٢: من خلال ما تعلمته في التفاضل، أكمل الجدولين الآتيين، ثم أجب عن الأسئلة التي تليهما:

الجدول (أ)

ق(س)	قَ(س)
س	
س + ٥	
جاس	
$\text{س}^{٢} + ٤$	٢س
$\text{هـ}^{\text{س}}$	

الجدول (ب)

قَ(س)	ق(س)
٧	
٢س	
$٣\text{س}^{٢}$	$\text{س}^{٣} + ٣$
$\text{قا}^{٢}\text{س}$	
$\frac{١}{\text{س}}$	

١ تسمى العملية في الجدول (أ) عملية اشتقاق.
٢ اقترح اسمًا للعملية في الجدول (ب)........
٣ ما العلاقة بين العمليتين؟.....................................
٤ هل الاقتران ق(س) يكون وحيدًا لكل حالة في الجدول (ب)؟ أعط أمثلة.

تعريف: معكوس المشتقة Antiderivative

إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً في الفترة [أ ، ب] فإن م(س) يسمى معكوس المشتقة (اقتران أصلي) للاقتران ق(س) إذا كان: مَ(س) = ق(س) ، $\forall$ س $\in$] أ ، ب[

مثال ١ : تحقق من أن الاقتران م(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} اقتران أصلي للاقتران ق(س) = س^{٣}

الحل : الاقتران م(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} هو اقتران أصلي للاقتران ق(س) لأن $\frac{د}{د س}$ ($\frac{١}{٤}$ س^{٤}) = س^{٣}

(لاحظ أن ق(س) متصل لأنه كثير حدود).

نشاط ٣: جد اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) = ٢س

حسب التعريف يكون أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) هو م(س) = س^{٢}

لأن $\frac{د}{د س}$ (س^{٢}) = ٢س

١ هل م$_{١}$(س) = س^{٢} − ٢ ، م$_{٢}$(س) = س^{٢} + ٥ اقترانان أصليان آخران للاقتران ق(س)؟

٢ هل يوجد عدد محدد من الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س). ما العلاقة بينها؟

قاعدة:

إذا كان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) فإن م(س) + جـ هي الصورة العامة لأي اقتران أصلي للاقتران ق(س) حيث جـ ثابت.

أتعلم:

الفرق بين أي اقترانين أصليين لاقتران معين يساوي اقتراناً ثابتاً دائماً.

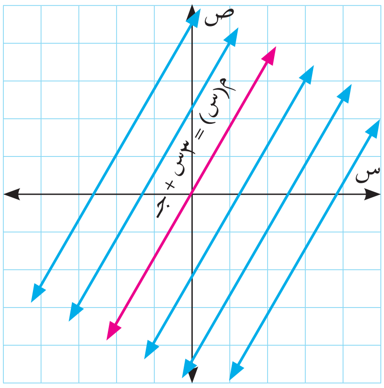
مثال ٢ : إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س)، وكان ل(س) = م(س) − هـ(س)، فجد لَ(٣).

الحل : الاقترانان م(س) ، هـ(س) اقترانان أصليان للاقتران المتصل ق(س)

إذن م(س) − هـ(س) = جـ (ثابت)، ومنه ل(س) = جـ

لَ(س) = ٠ ومنها لَ(٣) = ٠

مثال ٣ : بيّن أن مجموعة الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) = ٣ هي مجموعة من الاقترانات التي منحنياتها مستقيمات متوازية.



الحل : جميع الاقترانات الأصلية تكون على الصورة:

م(س) = ٣س + جـ ، حيث جـ ∈ح، وهي عبارة عن مجموعة من الاقترانات التي منحنياتها مستقيمات متوازية،

فمثلاً إذا كان جـ = ٥ فإن $م_١$(س) = ٣س + ٥

وإذا كانت جـ = ⁻٣ فإن $م_٢$(س) = ٣س – ٣ وهكذا ...

مثال ٤ : بيّن فيما إذا كان الاقتران م(س) = $\frac{س^٣ - ١}{س^٢}$ اقترانًا أصليًا للاقتران

ق(س) = ١ + $\frac{٢}{س^٣}$ ، س ≠ ٠

الحل : م(س) = $\frac{س^٣ - ١}{س^٢}$ = س – $\frac{١}{س^٢}$ = س – $س^{-٢}$

ومنها مَ(س) = ١ – (⁻٢)$س^{-٢-١}$ = ١ + $\frac{٢}{س^٣}$ = ق(س)

∴ م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س).

تعريف:

١ تسمى مجموعة كل الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) بالتكامل غير المحدود للاقتران ق(س) بالنسبة لـ س ويرمز له بالرمز $\int$ ق(س) دس ويقرأ تكامل ق(س) دال س.

٢ إذا كان مَ(س) = ق(س) فإن $\int$ ق(س) دس = م(س) + جـ حيث جـ ثابت. (ثابت التكامل).

٣ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً فإن $\frac{د}{د س}\left(\int ق(س)\, دس\right)$ = ق(س).

نشاط ٤: لاحظ أن $\int$ س^{٣}دس = $\frac{س^{٤}}{٤}$ + جـ وذلك لأن $\frac{د}{د س}$ ($\frac{س^{٤}}{٤}$ + جـ) = س^{٣}

وكذلك $\int$ ص$^{-٢}$دص = $\frac{-١}{ص}$ + جـ وذلك لأن ....

وبالمثل $\int$ جتاس دس = جاس + جـ وذلك لأن ....

مثال ٥ : إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً وكان $\int$ ق(س) دس = س^{٣} – ٣س + ٥

جد ق(٢) ، قَ(٢).

الحل : بما أن ق(س) اقتران متصل

إذن $\frac{د}{د س}$ $\left(\int \text{ق(س) دس}\right)$ = ق(س) = ٣س^{٢} – ٣

ومنها ق(٢) = ٣(٢)^{٢} – ٣ = ٩

قَ(س) = ٦س ومنها قَ(٢) = ١٢

مثال ٦ : إذا كان ق(س) = $\int$ هـ^{س} دس ، وكان ق(٠) = ٣ ، فجد ق(١).

الحل : ق(س) = $\int$ هـ^{س} دس = هـ^{س} + جـ

لكن ق(٠) = ٣ ، ومنها يكون هـ^{٠} + جـ = ٣

أي أن ١ + جـ = ٣ ومنها جـ = ٢

ق(س) = هـ^{س} + ٢ ومنها ق(١) = هـ^{١} + ٢ = هـ + ٢

تمارين ٤ - ١

١ بيّن فيما إذا كان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) في كل مما يأتي:

أ) م(س) = $\frac{١}{٣}$ (٢ + س^٢)$^{\frac{٣}{٢}}$ ، ق(س) = س $\sqrt{٢ + س^٢}$

ب) م(س) = قا^{٣}س ، ق(س) = ٣ قا^{٢}س ظاس

جـ) م(س) = لـو$_هـ$(س^٣ + هـ^{٢س}) ، ق(س) = $\frac{٣س^٢ + ٢هـ^{٢س}}{س^٣ + هـ^{٢س}}$

٢ إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س)،
وكان م(س) = س^٢ − ٤س + ٦ ، هـ(٣) = ٤، فجد هـ(١).

٣ إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س)، وكان ق(٤) = ٧ ، قَ(٤) = ١٠،
فما قيمة (٣م − هـ)َ(٤)؟

٤ إذا كان م(س) = ٢ظاس − ٢قاس أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) = $\frac{أ}{١ + جاس}$ ،
س ∈ $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤}\right]$. احسب قيمة الثابت أ.

٥ إذا كان $\int$ق(س) دس = أ س^٣ + جـ س ، حيث ق(س) اقتران متصل،
وكان ق($^-$١) = ٤ ، قَ(٢) = ٢٤، فجد قيمة كلٍ من أ ، جـ .

٤ - ٢ قواعد التكامل غير المحدود (Rules of Indefinite Integrals)

نشاط ١: تكثر الآبار الجوفية في مَسافِرْ بني نعيم شرق الخليل، فإذا ضُخّت المياه من بئرين في التوقيت نفسه، الأول بمعدل (٢٠ن)م^٣/ ساعة، والثاني بمعدل (٣٠ن)م^٣/ ساعة، حيث ن تمثل الزمن بالساعة فإن:

١ كمية المياه التي تضخ من البئر الأول في أي زمن ن تساوي ١٠ن^٢ (لماذا؟)

٢ العلاقة التي تحدد كمية المياه التي يتم ضخها من البئر الثاني هي ....

٣ معدل ضخ الماء من البئرين معاً = ٥٠ن (لماذا؟)

٤ العلاقة التي تحدد كمية الماء التي يتم ضخها من البئرين معاً هي:...........

ماذا تلاحظ؟

يتطلب إيجاد الاقتران الأصلي من خلال عمليات الاشتقاق كثيراً من الوقت والجهد، لذلك سنستخدم قواعد سيتم التعرف على بعض منها من خلال النشاط الآتي.

نشاط ٢: أكمل الجدول الآتي حيث أ ∋ ح ، ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:

ق(س)	قَ(س)	$\int$ قَ(س) دس
٥		جـ
أ س		أ س + جـ
س^٣		
س^ن	ن س$^{ن-١}$	
لـو$_هـ$ س ، س > ٠		

لاحظ أن المقدارين ق(س) ، $\int$ قَ(س) دس ، في كل حالة يختلفان بمقدار ثابت.

١ ما العلاقة بين نواتج العمود الثاني، ونواتج العمود الثالث؟

٢ بالاعتماد على النتائج التي توصلت إليها، وأن التكامل عملية عكسية للتفاضل، يمكنك التحقق من صحة القواعد الآتية:

قواعد التكامل غير المحدود:

١ $\int \text{أ دس} = \text{أ س} + \text{جـ}$ ، $\text{أ} \in \text{ح}$

٢ $\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس} = \dfrac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$ ، $\text{ن} \neq -١$

٣ $\int \dfrac{١}{\text{س}}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

٤ $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٥ $\int \text{جاس دس} = -\text{جتاس} + \text{جـ}$

٦ $\int \text{جتاس دس} = \text{جاس} + \text{جـ}$

٧ $\int \text{قا}^{٢}\text{س دس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$

٨ $\int \text{قتا}^{٢}\text{س دس} = -\text{ظتاس} + \text{جـ}$

٩ $\int \text{قاس ظاس دس} = \text{قاس} + \text{جـ}$

١٠ $\int \text{قتاس ظتاس دس} = -\text{قتاس} + \text{جـ}$

خواص التكامل غير المحدود:

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل فإن:

١ $\int \text{أ ق(س) دس} = \text{أ} \int \text{ق(س) دس}$ ، $\text{أ} \neq ٠$

٢ $\int (\text{ق(س)} \pm \text{هـ(س)})\,\text{دس} = \int \text{ق(س) دس} \pm \int \text{هـ(س) دس}$

ويمكن تعميمها على أكثر من اقترانين.

مثال ١ : جد كلاً من التكاملات الآتية:

١ $\int (\dfrac{١}{\text{س}} + ٣)\,\text{دس}$

٢ $\int \text{قاس (قاس + ظاس) دس}$

٣ $\int (\text{س}^{٢} + \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس}$

٤ $\int (٢ - \text{ظا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$

الحل :

١ $\int (\dfrac{١}{\text{س}} + ٣)\,\text{دس} = \int \dfrac{١}{\text{س}}\,\text{دس} + \int ٣\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + ٣\text{س} + \text{جـ}$

٢ $\int \text{قاس (قاس + ظاس) دس} = \int (\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{قاس ظاس})\,\text{دس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{س دس} + \int \text{قاس ظاس دس}$

$= \text{ظاس} + \text{قاس} + \text{جـ}$

٣) $\int (\text{س}^{2} + \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس} = \int \text{س}^{2}\,\text{دس} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^{3}}{3} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٤) $\int (2 - \text{ظا}^{2}\text{س})\,\text{دس} = \int (2 - (\text{قا}^{2}\text{س} - 1))\,\text{دس} = \int (3 - \text{قا}^{2}\text{س})\,\text{دس}$

$= 3\text{س} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

مثال ٢ : جد $\int \frac{(\text{س}^{2} + 1)^{2}}{\text{س}^{2}}\,\text{دس}$

الحل : $\int \frac{(\text{س}^{2} + 1)^{2}}{\text{س}^{2}}\,\text{دس} = \int \left(\frac{\text{س}^{2} + 1}{\text{س}}\right)^{2}\,\text{دس} = \int (\text{س} + \text{س}^{-1})^{2}\,\text{دس}$

$= \int (\text{س}^{2} + 2 + \text{س}^{-2})\,\text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{3}}{3} + 2\text{س} - \frac{1}{\text{س}} + \text{جـ}$

فكّر وناقش:

هل يمكنك إيجاد ناتج التكامل بطريقة أخرى؟

نشاط ٣: إذا كان $\text{قَ(س)} = (5\text{س}^{4} - 1)$، وكان ق(١) = ٥، فلإيجاد ق(٢) لاحظ أن:

$\text{ق(س)} = \int \text{قَ(س)}\,\text{دس} = \int (5\text{س}^{4} - 1)\,\text{دس} = \text{س}^{5} - \text{س} + \text{جـ}$

لكن ق(١) = ... = ٥ ومنها جـ = ...

فيكون ق(س) = ...

ق(٢) = ...

فكّر وناقش:

ما الفرق بين: $\frac{\text{د}}{\text{دس}} \int \text{ق(س)}\,\text{دس}$ ، $\int \text{قَ(س)}\,\text{دس}$، علماً بأن ق(س) اقتران متصل؟

تمارين ٤ - ٢

١ جد التكاملات الآتية:

أ $\int ٨\ د س$

ب $\int \left(٧س^{٢} - ٤س + \frac{٣}{س^{٤}}\right) د س$

جـ $\int (س + ٣)\sqrt{س}\ د س$

د $\int (٥س + قاس ظاس)\ د س$

هـ $\int \frac{س - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١}\ د س$

و $\int \frac{٢س^{٣} + ٥س^{٢} - ١}{س^{٢}}\ د س$

ز $\int \frac{١}{جتا^{٢}س}\ د س$

حـ $\int \left(٥هـ^{س} + \frac{٢}{س}\right) د س$

٢ إذا كان $\bar{ق}(س) + هـ^{س} =$ جتاس ، جد ق(س) حيث ق(٠) = $^{-}١$

٣ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على مجاله وكان $\int ق(س)\ د س =$ جاس − جتاس + ٢

أثبت أن: $ق\left(\frac{\pi}{٢}\right) - \bar{ق}\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٢$

٤ إذا كان $\int \left(\bar{ق}(س) + س^{٢}\right) د س = ٢س^{٣} + جـ س^{٢} + ٢$، وكان $\bar{ق}(١) = ٤$، ق(٢) = ٦، فجد ق($^{-}١$)

٤ - ٣ تطبيقات التكامل غير المحدود (Applications of Indefinite Integrals)

أولاً: تطبيقات هندسية: Geometric Applications

نشاط ١: يسير رجل على طريق منحنٍ بحيث يكون ميل المماس عند أي نقطة أ (س ، ص) على الطريق يساوي (٢س + ١). (لاحظ أن ميل المماس هو صَ = ٢س + ١)

١ الاقتران الذي يمثل معادلة الطريق هو اقتران تربيعي قاعدته ص = ...

٢ إذا كانت النقطة (٠ ، ٢) تقع على الطريق، فإن قاعدة الاقتران ص = ...

مثال ١ : إذا كان المستقيم ص = س + ٢ يمس منحنى الاقتران ق(س) عند س = ٠ وكان قً(س) = ٦س ، جد قاعدة الاقتران ق(س).

الحل : قَ(س) = $\int$ قً(س) دس

= $\int$ ٦س دس = ٣س^{٢} + جـ$_{١}$

لكن قَ(٠) = ١ (لماذا؟)

ومنها جـ$_{١}$ = ١ ، قَ(س) = ٣س^{٢} + ١

وأيضاً ق(س) = $\int$ قَ(س) دس

= $\int$ (٣س^{٢} + ١)دس = س^{٣} + س + جـ$_{٢}$

وبما أن النقطة (٠ ، ٢) هي نقطة تماس

فإن ق(٠) = ٢ ومنها جـ$_{٢}$ = ٢

ق(س) = س^{٣} + س + ٢

مثال ٢ : إذا كان قً(س) = ١٢س فجد معادلة منحنى الاقتران ق(س) علماً بأنه يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (-١ ، ١).

الحل : بما أن قَ(س) = $\int$ قً(س) دس

فإن قَ(س) = $\int$ ١٢س دس = ٦س^{٢} + جـ$_{١}$

كما أن ق(س) = $\int$ (٦س^{٢} + جـ$_{١}$) دس = ٢س^{٣} + جـ$_{١}$س + جـ$_{٢}$ (لماذا؟) .... (١)

لكن ق(١) = ٣ ، ق(-١) = ١

وبالتعويض في المعادلة (١) نحصل على:

جـ$_{١}$ + جـ$_{٢}$ = ١ ، $^{-}$جـ$_{١}$ + جـ$_{٢}$ = ٣

وبحل المعادلتين معاً نحصل على قيمة: جـ$_{١}$ = $^{-}$١ ، جـ$_{٢}$ = ٢

معادلة المنحنى المطلوبة هي: ق(س) = ٢س^{٣} - س + ٢

ثانياً: تطبيقات فيزيائية Physical Applications

نشاط ٢: نظّمت وزارة التربية والتعليم العالي المرحلة النهائية من مسابقة العدو لمسافة ١٠٠ متر، وشارك فيها ١٧ متسابقاً على مستوى المحافظات الشمالية، وكان من المتسابقين حامد وحاتم، فإذا انطلقا معاً، بحيث كانت سرعة حامد (ن) م/ث وسرعة حاتم $\left(\frac{ن^{٢}}{٢}\right)$ م/ث.

لاحظ أن سرعة حامد ع$_{١}$(ن) = ن

فتكون القاعدة التي تحدد المسافة التي قطعها حامد هي:

ف$_{١}$(ن) = $\frac{ن^{٢}}{٢}$ + جـ

وبما أن ف$_{١}$(٠) = ٠ فتكون ف$_{١}$(ن) = $\frac{ن^{٢}}{٢}$

ولإيجاد زمن وصول حامد نهاية السباق

نجعل ف$_{١}$(ن) = ١٠٠ متر ومنها ن = $\sqrt{٢٠٠}$ ثانية

١ القاعدة التي تحدد المسافة التي قطعها حاتم هي : ....

٢ الزمن الذي استغرقه حاتم في قطع السباق يساوي ....

٣ أيهما قطع مسافة السباق أولاً؟

تأمل المخطط الآتي، ولاحظ العلاقة بين البعد ف(ن) والسرعة ع(ن) والتسارع ت(ن) في التفاضل والتكامل.

بالتكامل بالتكامل

ف(ن) ⇄ ع(ن) ⇄ ت(ن)

بالاشتقاق بالاشتقاق

مثال ٣: بدأ جسم التحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل ومبتعداً عنها، فإذا كانت سرعته في أي لحظة تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٢ن ، فما بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد ثانيتين من بدء الحركة؟

الحل : ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٢ن

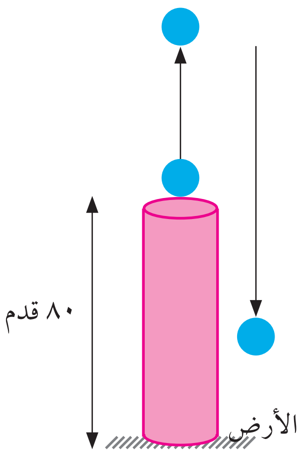
ف(ن) = $\int$ ع(ن) دن = $\int$ (٣ن^{٢} + ٢ن) دن = ن^{٣} + ن^{٢} + جـ

وبما أن ف(٠) = ٠ فإن جـ = ٠

أي أن ف(ن) = ن^{٣} + ن^{٢}

بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد ثانيتين = ف(٢) = ١٢ متراً

مثال ٤ : قذفت كرة للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦٤ قدم/ ث من قمة برج ارتفاعه ٨٠ قدماً. جد أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تصله الكرة، علماً بأن تسارعها يساوي $^-$٣٢ قدم/ ث^٢.



الحل :

ع(ن) = $\int$ ت(ن) دن

= $\int$ $^-$٣٢ دن = $^-$٣٢ن + جـ$_١$

لكن ع(٠) = ٦٤ ومنها جـ$_١$ = ٦٤

ع(ن) = $^-$٣٢ن + ٦٤

تصل الكرة لأقصى ارتفاع بعد ثانيتين ..... (لماذا؟)

ف(ن) = $\int$($^-$٣٢ن + ٦٤) دن = $^-$١٦ن^٢ + ٦٤ن + جـ$_٢$

لكن ف(٠) = ٨٠ ومنها جـ$_٢$ = ٨٠

ف(ن) = $^-$١٦ن^٢ + ٦٤ن + ٨٠

أقصى ارتفاع عن سطح الأرض= ف(٢) = ١٤٤ قدماً.

تمارين ٤ - ٣

١ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي س(٣س − ٢) فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن ق(٢) = ٥

٢ إذا كان قَ(س) = أس − ٣س^{٢} ، فجد قاعدة منحنى الاقتران ق(س) علماً بأن المستقيم س + ص = ٤ مماس للمنحنى عند النقطة (١ ، ق(١)).

٣ جد قاعدة منحنى الاقتران ص = ق(س) الذي يمر بنقطة الأصل والنقطة (١ ، ٢) علماً بأن ميل المماس له عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي ٢$\sqrt{أ}$ س حيث أ ثابت، أ > ٠.

٤ إذا كان قً(س) = جتاس وكان قَ(π) = ٢ ، ق(π) = ١ ، فجد قاعدة الاقتران ق(س).

٥ تحرك جسم في خط مستقيم من النقطة (و) مبتعداً عنها، بسرعة ابتدائية مقدارها ٣ م/ ث، فإذا كان تسارعه في أي لحظة يساوي (ن) م/ ث^{٢}، فما سرعته بعد ٥ ثوان من بدء الحركة، وما المسافة التي قطعها خلال هذه الثواني؟

٦ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي $\left(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right)$ فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأنه يمر بالنقطة (١ ، $\frac{٢}{٣}$).

٧ قذفت كرة رأسياً إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه ٤٥ متراً عن سطح الأرض، وكانت السرعة في اللحظة ن تساوي (−١٠ن + ٤٠)م/ ث، جد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى سطح الأرض.

٤ - ٤ طرق التكامل (Methods of Integration)

يصادفنا في كثير من الأحيان تكاملات لا يمكن إيجادها باستخدام قواعد التكامل غير المحدود، وستتعرف في هذا الدرس على ثلاث طرق لإيجاد التكامل غير المحدود، وهي:

١ التكامل بالتعويض.

٢ التكامل بالأجزاء.

٣ التكامل بالكسور الجزئية.

أولاً: التكامل بالتعويض Integration by Substitution

نشاط ١: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}\,(٢ + \text{س}^٢)^٢$

١ تحقق أن: $\text{م}(\text{س}) = \frac{١}{٣}(٢ + \text{س}^٢)^٣$ اقتران أصلي للاقتران ق(س).

٢ $\int ٢\text{س}\,(٢ + \text{س}^٢)^٢\,\text{دس} = ...$

٣ ليكن $\text{هـ}(\text{س}) = ٢ + \text{س}^٢$ فإن $\text{هـ}'(\text{س}) = ...$

٤ العلاقة بين ٢س ، $٢ + \text{س}^٢$ هي ....

فكّر وناقش:

هل $\int \text{س}\sqrt{\text{س}}\,\text{دس} = \int \text{س}\,\text{دس} \cdot \int \sqrt{\text{س}}\,\text{دس}$ ؟ ماذا تلاحظ؟

تعلمت في الفصل الأول بأن $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{ق}(\text{س}))^{\text{ن}} = \text{ن}(\text{ق}(\text{س}))^{\text{ن}-١}\,\text{ق}'(\text{س})$

أي أن $(\text{ق}(\text{س}))^{\text{ن}}$ هو اقتران أصلي للاقتران $\text{ن}(\text{ق}(\text{س}))^{\text{ن}-١}\,\text{ق}'(\text{س})$

وبذلك يكون: $\int (\text{ق}(\text{س}))^{\text{ن}-١}\,\text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \frac{١}{\text{ن}}(\text{ق}(\text{س}))^{\text{ن}} + \text{جـ}$

وبشكل عام:

إذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = \text{ع}$ فإن: $\int \text{ق}(\text{هـ}(\text{س}))\,\text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس} = \int \text{ق}(\text{ع})\,\text{دع}$

علماً بأن ق(س) ، هـ(س) اقترانان متصلان.

مثال ١ : جد $\int ٢س\sqrt{س^{٢}+٤}\ دس$

الحل : نفرض أن: $ع = س^{٢} + ٤ \Leftarrow دع = ٢س\ دس$ ومنها $دس = \frac{دع}{٢س}$

وبالتعويض، ينتج أن:

$$\int ٢س\sqrt{س^{٢}+٤}\ دس = \int ٢س\sqrt{ع}\ \frac{دع}{٢س} = \int \sqrt{ع}\ دع = \frac{٢ع^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$$

$$= \frac{٢(س^{٢}+٤)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$$

مثال ٢ : جد $\int (٢س + ١)^{٥}\ دس$

الحل : نفرض أن: $ع = ٢س + ١$ ومنها يكون $دع = ٢دس$ ، أي أن $دس = \frac{دع}{٢}$

$$\int (٢س+١)^{٥}\ دس = \int ع^{٥}\ \frac{دع}{٢} = \frac{ع^{٦}}{١٢} + جـ$$

$$= \frac{١}{١٢}(٢س+١)^{٦} + جـ$$

نشاط ٢: لإيجاد $\int قا^{٢}(٣س + ٢)\ دس$

نفرض $ع = ٣س + ٢$ ، فيكون $دع = ٣\ دس$ ومنها $دس = \ldots\ldots\ldots\ldots$

فيصبح $\int قا^{٢}(٣س+٢)\ دس = \frac{١}{٣}\int قا^{٢}ع\ دع = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$= \frac{١}{٣}ظا(٣س + ٢) + جـ$$

أتعلم:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل فإن $\int قَ(أس + ب)\ دس = \frac{١}{أ}ق(أس + ب) + جـ$

حيث أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية ، $أ \neq ٠$

مثال ٣ : جد $\int$ س هـ$^{س^٢+١}$ دس

الحل : نفرض أن: ع = س^٢ + ١ ⇐ دس = $\frac{دع}{٢س}$ وبالتعويض والاختصار، ينتج أن:

$$\int س هـ^{س^٢+١} دس = \frac{١}{٢} \int هـ^ع دع$$

$$= \frac{هـ^ع}{٢} + جـ$$

$$= \frac{هـ^{س^٢+١}}{٢} + جـ$$

مثال ٤ : جد $\int \frac{١ + \sqrt{س + ١}}{\sqrt{س + ١}}$ دس

الحل : نفرض أن: ع = $\sqrt{س + ١}$

دع = $\frac{١}{٢\sqrt{س + ١}}$ دس   ومنها   دس = ٢ع دع

إذن $\int \frac{١ + \sqrt{س + ١}}{\sqrt{س + ١}}$ دس = $\int (٢ + ٢ع)$ دع = ٢ع + ع^٢ + جـ

= ٢$\sqrt{س + ١}$ + س + جـ   (لماذا؟)

مثال ٥ : جد $\int$ جا^{٣}س دس

الحل : $\int$ جا^{٣}س دس = $\int$ جا^{٢}س جاس دس = $\int (١ - جتا^٢س)$ جاس دس

إذن $\int$ جا^{٣}س دس = $\int$ جاس دس − $\int$ جتا^{٢}س جاس دس

= −جتاس + $\frac{جتا^٣س}{٣}$ + جـ   (لماذا؟)

مثال ٦ : جد $\int \text{س}^{٥}(\text{س}^{٣}+١)^{٣}\,\text{دس}$

الحل : نفرض أن: $\text{ع} = \text{س}^{٣} + ١ \Leftarrow \text{دس} = \dfrac{\text{دع}}{٣\text{س}^{٢}}$

$$\int \text{س}^{٥}(\text{س}^{٣}+١)^{٣}\,\text{دس} = \int \text{س}^{٥}\text{ع}^{٣}\,\frac{\text{دع}}{٣\text{س}^{٢}} = \frac{١}{٣}\int \text{س}^{٣}\text{ع}^{٣}\,\text{دع} \quad \text{(ماذا تلاحظ؟)}$$

$$= \frac{١}{٣}\int (\text{ع}-١)\,\text{ع}^{٣}\,\text{دع} = \frac{١}{٣}\int (\text{ع}^{٤}-\text{ع}^{٣})\,\text{دع}$$

$$= \frac{١}{٣}\left(\frac{\text{ع}^{٥}}{٥} - \frac{\text{ع}^{٤}}{٤}\right) + \text{جـ}$$

عوّض قيمة ع واكتب الناتج بدلالة س

نشاط ٣: جد $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

تعلم أن: $٢\text{جتا}^{٢}\text{س} = ١ + \text{جتا}٢\text{س}$ ، $٢\text{جا}^{٢}\text{س} = ١ - \text{جتا}٢\text{س}$

بالتعويض في التكامل عن $\text{جا}^{٢}\text{س}$ ، $\text{جتا}^{٢}\text{س}$ يصبح:

$$\int \text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{دس} = \int \frac{١ - \text{جتا}^{٢}\,٢\text{س}}{٤}\,\text{دس}$$

$$= \frac{١}{٤}\int (١ - \text{جتا}^{٢}\,٢\text{س})\,\text{دس} = \frac{١}{٤}\,\text{س} - \frac{١}{٤}\int \text{جتا}^{٢}\,٢\text{س}\,\text{دس}$$

= .... (أكمل الحل)

قاعدة:

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\,\text{دس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ق}(\text{س})| + \text{جـ} \text{ ، } \text{ق}(\text{س}) \neq ٠$$

مثال ٧ : جد $\int \dfrac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{(١ + \text{ظاس})}\,\text{دس}$

الحل : لاحظ أن البسط يساوي مشتقة المقام

وباستخدام القاعدة السابقة يكون $\int \dfrac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{(١ + \text{ظاس})}\,\text{دس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|(١ + \text{ظاس})| + \text{جـ}$

تمارين (٤-٤ أ)

١ جد التكاملات الآتية:

أ $\int \frac{٤}{(س + ٢)^{٥}}$ دس

ب $\int (١ - س)$ جا$(س^{٢} - ٢س)$ دس

جـ $\int \frac{لـو_{هـ} س}{س}$ دس

د $\int (س^{٢} + ٢)\sqrt{س + ١}$ دس

هـ $\int (س + ٢)^{٢} (س - ١)^{٦}$ دس

و $\int$ جتا^{٤}س دس

ز $\int \frac{١}{١ + جاس}$ دس

ح $\int \frac{هـ^{٢س}}{هـ^{س} + هـ^{٢س}}$ دس

٢ جد التكاملات الآتية:

أ $\int \sqrt{\frac{س + ١}{س^{٥}}}$ دس

ب $\int \frac{١}{س^{٢}}$ جا $\frac{١}{س}$ دس

جـ $\int ($جاس + قتاس$)^{٢}$ دس

د $\int \frac{(س + ٢)^{٥}}{س^{٧}}$ دس

هـ $\int س^{٢}(س^{٧} + س^{٣})^{\frac{١}{٣}}$ دس

و $\int$ ظا^{٣}س دس

ثانياً: التكامل بالأجزاء: Integration by Parts

فكّر وناقش:

هل يمكن إيجاد $\int \text{س جتاس دس}$ بطرق التكامل التي تعلمتها؟

أتعلم:

$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ق} \times \text{ع}) = \text{ق} \times \frac{\text{دع}}{\text{د س}} + \text{ع} \times \frac{\text{د ق}}{\text{د س}}$ حيث ق ، ع اقترانات قابلة للاشتقاق.

وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى س ينتج أن:

$\text{ق} \times \text{ع} = \int \text{ق دع} + \int \text{ع دق}$ ..... (لماذا؟)

ومنها $\int \text{ق دع} = \text{ق} \times \text{ع} - \int \text{ع دق}$

تسمى هذه النتيجة قاعدة التكامل بالأجزاء، وتستخدم لإيجاد تكامل بعض الاقترانات التي تكون على صورة حاصل ضرب اقترانين ليس أحدهما مشتقةً للآخر.

قاعدة:

قاعدة التكامل بالأجزاء: $\int \text{ق دع} = \text{ق} \times \text{ع} - \int \text{ع دق}$

مثال ١ : جد $\int \text{س جتاس دس}$

الحل : نفرض أن: ق = س دع = جتاس

دق = دس ع = جاس

وحسب القاعدة $\int \text{ق دع} = \text{ق} \times \text{ع} - \int \text{ع دق}$

يكون $\int \text{س جتاس دس} = \text{س جاس} - \int \text{جاس دس} = \text{س جاس} + \text{جتاس} + \text{جـ}$

فكّر وناقش:

إضافة ثابت التكامل عند إيجاد ع لا يغير من النتيجة.

نشاط ١: جد $\int$ س^{٢} جاس دس

نفرض أن: ق = س^{٢} دع = جاس دس

∴ دق = ٢س دس   ع = ⁻جتاس

إذن $\int$ س^{٢} جاس دس = ⁻س^{٢} جتاس + ٢ $\int$ س جتاس دس

= .... (أكمل الحل)

مثال ٢ : جد $\int$ (س − ١)هـ^{س} دس

الحل :

نفرض أن: ق = س −١   دع = هـ^{س} دس

∴ دق = دس   ع = هـ^{س}

إذن $\int$ (س − ١)هـ^{س} دس = (س − ١)هـ^{س} − $\int$ هـ^{س} دس

= (س − ١)هـ^{س} − هـ^{س} + جـ

نشاط ٢: جد $\int$ هـ$^{\sqrt{س}}$ دس

نبدأ بالتكامل بالتعويض

بفرض $\sqrt{س}$ = ص فيكون دص = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ دس

ومنها ٢ص دص = دس

إذن $\int$ هـ$^{\sqrt{س}}$ دس = ٢ $\int$ ص هـ^{ص} دص

= .... (أكمل مستخدماً التكامل بالأجزاء)

مثال ٣: جد $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}+٢}}\,\text{دس}$

الحل: نفرض أن: ق = س ، $\text{دع} = \frac{١}{\sqrt{\text{س}+٢}}\,\text{دس}$

∴ دق = دس ، $\text{ع} = ٢\sqrt{\text{س}+٢}$

$$\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}+٢}}\,\text{دس} = ٢\text{س}\sqrt{\text{س}+٢} - \int ٢\sqrt{(\text{س}+٢)}\,\text{دس}$$

$$= ٢\text{س}\sqrt{\text{س}+٢} - \frac{٤}{٣}\sqrt{(\text{س}+٢)^{٣}} + \text{جـ}$$ (لماذا؟)

فكّر وناقش:

أوجد $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}+٢}}\,\text{دس}$ من المثال السابق باستخدام التكامل بالتعويض.

مثال ٤: جد $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس}$

الحل: نفرض أن: ق = جاس ، $\text{دع} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

∴ دق = جتاس دس ، $\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}\,\text{دس}$$

لاحظ أن: $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}\,\text{دس}$ على نمط التكامل المطلوب نفسه.

نفرض أن: ق = جتاس ، $\text{دع} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

∴ دق = ⁻جاس دس ، $\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس}$$ (ماذا تلاحظ)؟

بالتعويض عن $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}\,\text{دس}$ في التكامل الأصلي، فيصبح:

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} - \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس} + \text{جـ}$$

ومنها $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس} = \frac{١}{٢}\left(\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} - \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}\right) + \text{جـ}$ ..... (لماذا؟)

نشاط ٣: جد $\int$ جتا(لـــوهـ س) دس

(افرض ص = لـــوهـ س واستفد من المثال السابق في إكمال الحل).

تمارين ٤ – ٤ ب

١ جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ $\int$ س لـــوهـ س دس

ب $\int$ س قا^{٢}س دس

جـ $\int$ لـــوهـ (س + ٢)^{٣} دس

د $\int$ س جا٢س دس

هـ $\int$ س^{٣} هـ$^{س^{٢}+١}$ دس

و $\int$ جا $\sqrt{س + ١}$ دس

ز $\int \frac{٢س هـ^{س}}{(س + ١)^{٢}}$ دس

ح $\int$ هـ^{س} جاس جتاس دس

ط $\int$ هـ^{س} (قتاس – قتاس ظتاس) دس

ي $\int \frac{١}{س^{٣}}$ جتا$(\frac{١}{س})$ دس

٢ أثبت أن: $\int$ س^{ن} لـــوهـ س دس = $\frac{س^{ن+١}}{ن + ١}$ (لـــوهـ س – $\frac{١}{ن + ١}$) + جـ ، ن $\neq$ $^{-}$١ ، س > ٠

ثالثاً: التكامل بالكسور الجزئية: Integration by Partial Fractions

للعلمي فقط

فكّر وناقش:

هل يمكن إيجاد $\int \frac{س + ١}{س^٢ - ٤}$ دس بطرق التكامل التي تعلمتها؟

لقد تعلمنا في الدروس السابقة إيجاد $\int \frac{٢س}{س^٢ - ١}$ دس بالتكامل بالتعويض، لأن البسط مشتقة للمقام

ولكن ماذا بالنسبة للتكامل $\int \frac{س + ١}{س^٢ - ٤}$ دس ؟

في مثل هذه الحالة نلجأ لطريقة جديدة تسمى التكامل بالكسور الجزئية، وسوف نقتصر على الاقترانات النسبية، التي يمكن كتابة المقام فيها على شكل حاصل ضرب ثلاثة عوامل خطّيّة مختلفة على الأكثر.

نشاط ١: لكتابة ق(س) = $\frac{س - ٢}{س^٣ - س}$ على صورة كسور جزئية، نقوم بتحليل المقام إلى عوامله الأولية،

وكتابة ق(س) على الصورة ق(س) = $\frac{س - ٢}{س^٣ - س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س - ١} + \frac{جـ}{س + ١}$

وبتوحيد المقامات، والإفادة من تساوي الاقترانات، نحصل على المعادلة:

س − ٢ = أ(س − ١) (س + ١) + ب س(س + ١) + جـ س(س − ١) ..... (١)

ولتحديد قيم أ ، ب ، جـ نقوم بما يلي:

نعوض س = ١ في المعادلة (١) ومنها ب = $\frac{-١}{٢}$

نعوض س = ⁻١ في المعادلة (١) ومنها جـ = $\frac{-٣}{٢}$

ولإيجاد قيمة أ نعوض س = ... في المعادلة (١) ومنها أ = ...

فيصبح : $\frac{س - ٢}{س^٣ - س} = \frac{٢}{س} + \frac{\frac{-١}{٢}}{س - ١} + \frac{\frac{-٣}{٢}}{س + ١}$

هل يمكنك إيجاد قيم أ ، ب ، جـ بطرق أخرى؟

نسمي كتابة المقدار $\frac{س - ٢}{س^٣ - س}$ على الصورة $\frac{٢}{س} + \frac{\frac{-١}{٢}}{س - ١} + \frac{\frac{-٣}{٢}}{س + ١}$ بالكسور الجزئية

ملاحظة:

إذا أمكن كتابة الاقتران النسبي على الصورة $\frac{\text{أ}}{\text{س} - \text{م}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - \text{ن}} + \frac{\text{جـ}}{\text{س} - \text{ل}}$

حيث أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية ، فإن تكامله يساوي

$\text{أ لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} - \text{م}| + \text{ب لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} - \text{ن}| + \text{جـ لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} - \text{ل}|$ + ثابت التكامل

ويراعى في ذلك أن تكون درجة البسط أقل من درجة المقام،

فإذا كانت درجة البسط $\leq$ درجة المقام نستخدم القسمة المطولة.

مثال ١ : جد $\int \frac{٢}{\text{س}^٢ - ١}\, \text{دس}$

الحل : لاحظ أن درجة البسط أقل من درجة المقام، وأن البسط ليس مشتقة للمقام لذلك نكتب:

$\frac{٢}{\text{س}^٢ - ١} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - ١} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + ١}$ ومنها أ = ١ ، ب = -١ (لماذا؟)

إذن $\int \frac{٢}{\text{س}^٢ - ١}\, \text{دس} = \int \left(\frac{١}{\text{س} - ١} + \frac{-١}{\text{س} + ١}\right) \text{دس} = \int \frac{١}{\text{س} - ١}\, \text{دس} + \int \frac{-١}{\text{س} + ١}\, \text{دس}$

$= \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ١| - \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} + ١| + \text{جـ}$

(اكتب الناتج بصورة أخرى)

مثال ٢ : جد $\int \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^٣ - \text{س}}\, \text{دس}$

الحل : توصلنا من النشاط (١) أن: $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^٣ - \text{س}} = \frac{٢}{\text{س}} + \frac{\frac{-١}{٢}}{\text{س} - ١} + \frac{\frac{-٣}{٢}}{\text{س} + ١}$

وبالتالي $\int \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^٣ - \text{س}}\, \text{دس} = \int \left(\frac{٢}{\text{س}} + \frac{\frac{-١}{٢}}{\text{س} - ١} + \frac{\frac{-٣}{٢}}{\text{س} + ١}\right) \text{دس}$

$= ٢\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \frac{-١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ١| + \frac{-٣}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} + ١| + \text{جـ}$

مثال ٣: جد $\int \frac{س^٣}{٤ - س^٢} \, دس$

الحل: نلاحظ أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، لذا نقسم البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة.

وينتج أن: $\frac{س^٣}{٤ - س^٢} = -س + \frac{٤س}{٤ - س^٢}$ ومنها يكون $\frac{٤س}{٤ - س^٢} = \frac{أ}{٢ - س} + \frac{ب}{٢ + س}$

وبتوحيد المقامات، ومساواة الاقترانين، ينتج أن: أ = ٢ ، ب = −٢ (لماذا؟)

ويصبح $\frac{س^٣}{٤ - س^٢} = -س + \frac{٤س}{٤ - س^٢} = -س + \frac{٢}{٢ - س} + \frac{-٢}{٢ + س}$

ومنها $\int \frac{س^٣}{٤ - س^٢} \, دس = \frac{-س^٢}{٢} - ٢ لـو_هـ |٢ - س| - ٢ لـو_هـ |٢ + س| + جـ$

$= \frac{-س^٢}{٢} - ٢ لـو_هـ |س^٢ - ٤| + جـ$ ..... (لماذا؟)

حل آخر: $\int \frac{س^٣}{٤ - س^٢} \, دس = \int (-س + \frac{٤س}{٤ - س^٢}) \, دس$ (بعد إجراء القسمة)

ومنها $\int \left(-س + \frac{٤س}{٤ - س^٢}\right) دس = \int (-س - ٢(\frac{-٢س}{٤ - س^٢})) \, دس$

$= \frac{-س^٢}{٢} - ٢ لـو_هـ |س^٢ - ٤| + جـ$ ..... (لماذا؟)

مثال ٤: جد $\int \frac{\sqrt{س}}{س - ٩} \, دس$

الحل: نلاحظ أن $\frac{\sqrt{س}}{س - ٩}$ ليس اقتراناً نسبياً، ولكن يمكن كتابته على الصورة $\frac{\sqrt{س}}{(\sqrt{س})^٢ - ٩}$

وبفرض ص = $\sqrt{س}$ فإن دص = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ دس ومنها دس = ٢ص دص

إذن $\int \frac{\sqrt{س}}{س - ٩} \, دس = \int \frac{ص}{ص^٢ - ٩} \times ٢ص \, دص = \int \frac{٢ص^٢}{ص^٢ - ٩} \, دص$

(لاحظ أن درجة البسط = درجة المقام؛ لذا نقسم البسط على المقام).

وينتج أن: $\int \frac{٢ص^٢}{ص^٢ - ٩} \, دص = \int (٢ + \frac{١٨}{ص^٢ - ٩}) \, دص$ وبالكسور الجزئية، تكون

$\int \frac{\sqrt{س}}{س - ٩} \, دس = ٢\sqrt{س} - ٣ لـو_هـ |\sqrt{س} + ٣| + ٣ لـو_هـ |\sqrt{س} - ٣| + جـ$ (تحقق من ذلك)

مثال ٥ : جد $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} + هـ^{س} - ٢}$ دس

الحل : نفرض هـ^{س} = ص ومنها دص = هـ^{س} دس

$\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} + هـ^{س} - ٢}$ دس = $\int \frac{دص}{ص^{٢} + ص - ٢}$ ، وباستخدام الكسور الجزئية، يكون:

$\frac{١}{ص^{٢} + ص - ٢} = \frac{أ}{ص - ١} + \frac{ب}{ص + ٢}$ ومنها (أ = $\frac{١}{٣}$ ، ب = $\frac{-١}{٣}$) (لماذا؟)

$\int \frac{دص}{ص^{٢} + ص - ٢} = \frac{١}{٣}$ لــوهـ |ص - ١| - $\frac{١}{٣}$ لــوهـ |ص + ٢| + جـ

ومنها $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} + هـ^{س} - ٢}$ دس = $\frac{١}{٣}$ لــوهـ |هـ^{س} - ١| - $\frac{١}{٣}$ لــوهـ (هـ^{س} + ٢) + جـ

نشاط ٢: جد $\int$ قاس دس

إرشاد: لاحظ أن قاس = $\frac{١}{جتاس} = \frac{جتاس}{جتا^{٢}س} = \frac{جتاس}{١ - جا^{٢}س}$

إذن $\int$ قاس دس = $\int \frac{جتاس}{١ - جا^{٢}س}$ دس وباستخدام التكامل بالتعويض بفرض ص = جاس

يصبح التكامل على الصورة $\int \frac{١}{١ - ص^{٢}}$ دص

= .... (أكمل الحل)

وبطريقة أخرى: $\int$ قاس دس = $\int \frac{قاس(قاس + ظاس)}{قاس + ظاس}$ دس

(بضرب البسط والمقام بالمقدار قاس + ظاس)

فيكون $\int \frac{قاس(قاس + ظاس)}{قاس + ظاس}$ دس = $\int \frac{قا^{٢}س + قاس ظاس}{قاس + ظاس}$ دس

= لــوهـ |قاس + ظاس| + جـ (لماذا؟)

مثال ٦ : جد $\int \frac{\text{جا}^3\text{س}}{2 + \text{جتاس}}$ دس

الحل : $\int \frac{\text{جا}^3\text{س}}{2 + \text{جتاس}}$ دس $= \int \frac{\text{جاس}(1 - \text{جتا}^2\text{س})}{2 + \text{جتاس}}$ دس ..... (لماذا؟)

نفرض أن: ص = جتاس ومنها دص = ⁻جاس دس

$\int \frac{\text{جا}^3\text{س}}{2 + \text{جتاس}}$ دس $= \int \frac{\text{جاس}(1 - \text{ص}^2)}{2 + \text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}} = \int \frac{\text{ص}^2 - 1}{2 + \text{ص}}$ دص (لماذا؟)

$= \int (\text{ص} - 2 + \frac{3}{2 + \text{ص}})$ دص (بعد إجراء القسمة المطولة)

$= \frac{\text{ص}^2}{2} - 2\text{ص} + 3\text{لـو}_{\text{هـ}}|2 + \text{ص}| + \text{جـ}$

= .... (أكمل بكتابة الناتج بدلالة س)

تمارين ٤ - ٤ ج

١ جد التكاملات الآتية:

أ $\int \frac{\text{س} + 2}{\text{س}^2 - 2\text{س} - 3}$ دس

ب $\int \frac{\text{س}^2 + 2}{\text{س}^2 + \text{س} - 6}$ دس

جـ $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - \sqrt{\text{س}} - 2}$ دس

د $\int \frac{\text{س} + 2}{(\text{س}^2 - \text{س})(\text{س} + 1)}$ دس

هـ $\int$ قتاس دس

و $\int \frac{1}{\text{س} - \text{س}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^2}$ دس

٢ جد التكاملات الآتية:

أ $\int \frac{-\text{س} + 7}{\text{س}^2 + \text{س} - 2}$ دس

ب $\int \frac{\text{جاس}}{16 - \text{جتا}^2\text{س}}$ دس

جـ $\int \frac{\text{قتا}^2\text{س}}{2 - \text{قتا}^2\text{س}}$ دس

د $\int \frac{\text{س}^2}{\text{س}^6 + \text{س}^3}$ دس

تمارين عامة:

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين مختلفين للاقتران ق(س)،

فماذا يمثل $\int$ (م(س) − هـ(س)) دس ؟

أ) اقتراناً ثابتاً ب) اقتراناً تربيعياً ج) اقترانا خطّياً د) صفراً

٢ إذا كان ق(س) = $\int$ (٣س^{٢} − ٢) دس ، وكان ق(٢) = ٩، فما قيمة ق(−٢)؟

أ) −١ ب) −٩ ج) ٤ د) ١

٣ إذا كان $\int$ ٢س لـوهـ س دس = س^{٢} لـوهـ س − $\int$ ع دق ، فما قيمة ع دق ؟

أ) لـوهـ س دس ب) س^{٢} دس ج) س دس د) س لـوهـ س دس

٤ ما قيمة $\int$ قتا^{٤}س ظتاس دس؟

أ) $\frac{-١}{٥}$ قتا^{٥}س + جـ ب) $\frac{-١}{٤}$ قتا^{٤}س + جـ

ج) $\frac{-١}{٣}$ قتا^{٣}س + جـ د) $\frac{١}{٣}$ قتا^{٣}س + جـ

٢ أثبت أن: الاقتران م(س) = $\sqrt{١ - س^{٢}}$ هو اقتران أصلي للاقتران ق(س) = $\frac{-س}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

٣ إذا كانت قً(س) = س^{٢} + ٣جاس ، قَ(٠) = ٣ ، ق(٠) = ٢ ، فجد ق(س).

٤ إذا كانت سرعة جسيم ع بعد ن دقيقة تعطى بالقاعدة: ع = ٤ن + لـوهـ (ن + ١)
جد إزاحة الجسيم بعد ٣ دقائق، علماً بأنه قطع مسافة ٨ أمتار بعد دقيقة واحدة.

٥ جد كلاً من التكاملات الآتية:

١ $\int س\sqrt{س^{٢} - ٣}\ دس$

٢ $\int \frac{١}{س^{١٠} + س}\ دس$

٣ $\int قا^{٢}\sqrt{س}\ دس$

٤ $\int قا(٣س + ١)\ ظا(٣س + ١)\ دس$

٥ $\int (س^{٢} + ١)\ جتاس\ دس$

٦ $\int لو_{هـ}(س^{٢} - ١)\ دس$

٧ $\int \frac{س^{٢} + ١}{س^{٣} + س}\ دس$

٨ $\int \frac{قا^{٤}س}{١ - ظا^{٢}س}\ دس$

٩ $\int (جتا^{٤}س - جا^{٤}س)\ دس$

١٠ $\int (قتاس + ظتاس)^{٨}\ قتاس\ دس$

١١ $\int (س^{٨} - ٦س)^{٦}\ دس$

٦ يتحرك جسيم حسب العلاقة $ع = أ\sqrt{ف}$ عدديا، حيث ع السرعة (م/ث)، ف المسافة (م) فإذا كان ف(٢) = ٩ أمتار ، ف(٤) = ١٦ متراً ، فما قيمة الثابت أ ؟

٧ إذا كانت $س\ قَ(س) + ق(س) = جتاس$ ، فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن $ق(\pi) = ٠$

٨ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
اجد تكامل اقترانات غير محدودة			
اوظف قواعد التكامل في حل مسائل منتمية			
اكامل اقترانات باحد طرق التكامل			

الوحدة

٥

التكامل المحدود وتطبيقاته

Definite Integration and its Applications

قلعة برقوق تاريخ وتراث، تقاوم من أجل البقاء، فهي شاهد حقيقي على التطور الحضاري والثقافي لمدينة خان يونس عبر العصور. يراد تغطية قوس القلعة بزجاج، اقترح طريقة لحساب مساحة الزجاج المستخدم.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التكامل المحدود وتطبيقاته في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ التعرف إلى التجزئة، وحساب مجموع ريمان.
٢ إيجاد التكامل لاقتران خطّي باستخدام التعريف.
٣ التعرف إلى النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل.
٤ التعرف إلى خصائص التكامل المحدود.
٥ حساب التكامل المحدود.
٦ إيجاد مساحة منطقة مستوية باستخدام التكامل المحدود.
٧ توظيف التكامل المحدود في حساب حجم الجسم الدوراني، الناتج من الدوران لمنطقة محدّدة حول محور السينات.

٥ - ١ التجزئة ومجموع ريمان (Partition and Riemann Sum)

نشاط ١: للحفاظ على جودة البيئة، وتجميل شوارع مدينة غزة، قررت البلدية تزيين شارع صلاح الدين بزراعة أشجار النخيل على امتداد الشارع بطول ١كم، فكم شجرة نخيل يلزم لزراعة شجرة كل ٥٠م؟

تعريف:

إذا كانت [أ ، ب] فترة مغلقة، وكانت:

$\sigma_{\text{ن}} = \{\text{أ} = \text{س}_{٠} ، \text{س}_{١} ، \text{س}_{٢} ، \text{س}_{٣} ، \ldots ، \text{س}_{\text{ن}} = \text{ب}\}$ حيث:

$\text{س}_{٠} < \text{س}_{١} < \text{س}_{٢} < \text{س}_{٣} < \ldots < \text{س}_{\text{ن}}$ فإننا نسمي $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة نونية للفترة [أ ، ب]

وتسمى الفترة $[\text{س}_{\text{ر}-١} ، \text{س}_{\text{ر}}]$ الفترة الجزئية الرائية، وطولها $\Delta\text{س}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}-١}$

طول الفترة الكلية = مجموع أطوال جميع الفترات الجزئية

وبالرموز $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}-١}) = \text{ب} - \text{أ}$

نلاحظ من التعريف، أنه لكتابة أي تجزئة $\sigma_{\text{ن}}$ لفترة ما يجب أن تكون:

١. الفترة مغلقة.
٢. تبدأ التجزئة من بداية الفترة، وتنتهي بنهايتها.
٣. عناصر التجزئة مرتبة ترتيباً تصاعدياً.

مثال ١ : أي من الآتية يعتبر تجزئة للفترة [⁻١ ، ٣] .

❶ $\sigma_{٤} = \{⁻١ ، ١ ، \frac{٣}{٢} ، ٢ ، ٣\}$ ❷ $\sigma_{٤} = \{٠ ، ١ ، \frac{٣}{٢} ، ٢ ، ٣\}$

❸ $\sigma_{٤} = \{⁻١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤\}$ ❹ $\sigma_{٤} = \{⁻١ ، ١ ، ٠ ، ٢ ، ٣\}$

الحل :

١ $\sigma_{٤}$ تعتبر تجزئة للفترة، لأن $س_{٠}$ = ⁻١ ، $س_{٤}$ = ٣ وعناصرها مرتبة تصاعدياً

٢ $\sigma_{٤}$ ليست تجزئة، لأن $س_{٠}$ ≠ ⁻١

٣ $\sigma_{٤}$ ليست تجزئة، لأن ٤ ∌ [⁻١ ، ٣]

٤ $\sigma_{٤}$ ليست تجزئة للفترة [⁻١ ، ٣] لأن عناصرها ليست مرتبة ترتيباً تصاعدياً

مثال ٢ : اكتب ٣ تجزئات خماسية للفترة [٢ ، ٧]

الحل :

$\sigma_{٥} = \{٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧\}$

$\sigma_{٥} = \{٢ ، \frac{٥}{٢} ، ٤ ، \frac{٩}{٢} ، ٦ ، ٧\}$

$\sigma_{٥} = \{٢ ، \frac{٧}{٣} ، ٣ ، \frac{١١}{٢} ، ٦ ، ٧\}$

فكّر وناقش:

كم تجزئة خماسية للفترة [٢ ، ٧] يمكن تكوينها؟

مثال ٣ : إذا كانت $\sigma_{٣} = \{⁻١ ، ٣ ، ٤ ، ٦\}$ تجزئة ثلاثية للفترة [⁻١ ، ٦]

اكتب جميع الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٣}$ ، ثم احسب طول كل منها.

الحل :

الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٣}$ هي: [⁻١ ، ٣]، [٣ ، ٤]، [٤ ، ٦]

وأطوالها على الترتيب ٤ ، ١ ، ٢

تلاحظ من المثال السابق أن:

عدد عناصر التجزئة $\sigma_{٣}$ = ٤ ، عدد الفترات الجزئية = ٣

مجموع أطوال الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٣}$ = ٤ + ١ + ٢ = ٧ = طول الفترة الكلية.

نشاط ٢: إذا كانت $\sigma_{٤}$ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠} تجزئة رباعية للفترة [٢ ، ١٠]

١ الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٤}$ هي [٢ ، ٤]، [٤ ، ٦]، [٦ ، ٨]، [٨ ، ١٠]

٢ العلاقة بين أطوال الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٤}$ هي: ....

٣ عدد الفترات الجزئية = ...

٤ عدد عناصر التجزئة = ...   (ماذا تلاحظ؟)

تعريف:

تسمى التجزئة $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [أ ، ب]، إذا كانت أطوال جميع الفترات الجزئية الناتجة عنها متساوية، ويكون طول الفترة الجزئية = $\frac{\text{طول الفترة الكلية}}{\text{عدد الفترات الجزئية}} = \frac{ب - أ}{ن}$

مثال ٤ : اكتب تجزئة خماسية منتظمة للفترة [$^-٢$ ، ١٣]

الحل : طول الفترة الجزئية = $\frac{ب - أ}{ن} = \frac{١٣ - {}^-٢}{٥} = ٣$

ومنها تكون $\sigma_{٥}$ = {$^-٢$ ، ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣}

فكّر وناقش:

هل هناك تجزئات خماسية منتظمة أخرى للفترة [$^-٢$ ، ١٣]؟

مثال ٥ : إذا كانت $\sigma_{٦}$ تجزئة منتظمة للفترة [٥ ، ب] وكان طول الفترة الجزئية = $\frac{١}{٣}$، جد قيمة ب

الحل : طول الفترة الجزئية = $\frac{ب - أ}{ن} = \frac{١}{٣}$

ومنها $\frac{ب - ٥}{٦} = \frac{١}{٣}$ فيكون ٣ب − ١٥ = ٦ وينتج أن ب = ٧

لإيجاد قيمة أي عنصر في التجزئة المنتظمة $\sigma_{\text{ن}}$

يكون العنصر الأول $\text{س}_{\cdot} = \text{أ}$

العنصر الثاني $\quad \text{س}_{١} = \text{أ} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}$

والعنصر الثالث $\quad \text{س}_{٢} = \text{س}_{١} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \text{أ} + ٢(\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}})$ ..... (لماذا؟)

⋮

العنصر الرائي $\quad \text{س}_{\text{ر}-١} = \text{أ} + (\text{ر} - ١)\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}$

وبشكل عام، فإن: $\text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \times \text{ر}$ حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ن

وتكون الفترة الجزئية الرائية هي $[\text{س}_{\text{ر}-١} ، \text{س}_{\text{ر}}]$

مثال ٦ : لتكن $\sigma_{١٢}$ تجزئةً منتظمةً للفترة $[^{-}١ ، ١٩]$، فجد كلاً من:

١ $\text{س}_{٢}$ ، $\text{س}_{٩}$ ٢ العنصر الثامن ٣ الفترة الجزئية الخامسة

الحل :

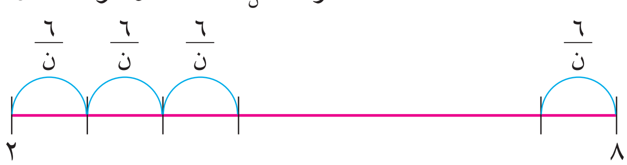
١ $\text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \times \text{ر}$ ومنها $\text{س}_{٢} = ^{-}١ + \frac{١٩ + ١}{١٢} \times ٢ = \frac{٧}{٣}$

$\text{س}_{٩} = ^{-}١ + \frac{١٩ + ١}{١٢} \times ٩ = ١٤$

٢ العنصر الثامن $\text{س}_{٧} = ^{-}١ + \frac{١٩ + ١}{١٢} \times ٧ = \frac{٣٢}{٣}$

٣ الفترة الجزئية الخامسة $= [\text{س}_{٤} ، \text{س}_{٥}] = [\frac{١٧}{٣} ، \frac{٢٢}{٣}]$ (تحقق من ذلك)

نشاط ٣ : الشكل المجاور يبين التجزئة $\sigma_{\text{ن}}$ للفترة $[٢ ، ٨]$، لاحظ أن التجزئة $\sigma_{\text{ن}}$ منتظمة وطول الفترة الجزئية فيها $= \frac{٦}{\text{ن}}$



١ طول الفترة الكلية = ... ٢ عدد عناصر التجزئة $\sigma_{\text{ن}}$ = ...

٣ $\text{س}_{٧}$ = ... ٤ العنصر السابع = ...

٥ الفترة الجزئية السابعة = ...

تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً في الفترة [أ ، ب]، وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئةً نونيةً للفترة [أ ، ب]،

فإن المقدار $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}^{*})\,(\text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}-١})$ حيث $\text{س}_{\text{ر}}^{*} \in [\text{س}_{\text{ر}-١} ، \text{س}_{\text{ر}}]$

يسمى مجموع ريمان، ويرمز له بالرمز $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق})$

وإذا كانت التجزئة نونية منتظمة فإن $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \sum\limits_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}^{*})$

مثال ٧ : إذا كان ق(س) = س − ٢ ، وكانت $\sigma_{٣} = \{٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$ تجزئةً ثلاثية للفترة [٣ ، ٦]، فاحسب $\text{م}(\sigma_{٣} ، \text{ق})$ معتبراً $\text{س}_{\text{ر}}^{*} = \text{س}_{\text{ر}-١}$

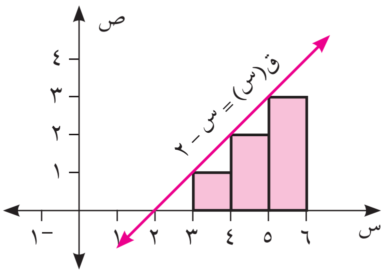
الحل : نكوّن الجدول الآتي:

الفترات الجزئية	$\text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}-١}$	$\text{س}_{\text{ر}}^{*}$	$\text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}^{*})$	$\text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}^{*}) \times (\text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}-١})$
[٣ ، ٤]	١	٣	١	١
[٤ ، ٥]	١	٤	٢	٢
[٥ ، ٦]	١	٥	٣	٣
المجموع				٦

أي أن $\text{م}(\sigma_{٣} ، \text{ق}) = \sum\limits_{\text{ر}=١}^{٣} \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}^{*})\,(\text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}-١}) = ٦$

لاحظ من الشكل المجاور أن مجموع مساحات المستطيلات

تساوي $\text{م}(\sigma_{٣} ، \text{ق}) = ٦$



مثال ٨ : إذا كان ق(س) = $\text{س}^٢$ − ٢س ، وكانت $\sigma_{٤}$ تجزئةً رباعيةً منتظمةً للفترة [−٣ ، ٥]، فاحسب $\text{م}(\sigma_{٤} ، \text{ق})$ حيث $\text{س}_{\text{ر}}^{*} = \text{س}_{\text{ر}-١}$

الحل : بما أن التجزئة منتظمة فإن: طول الفترة الجزئية = $\frac{٨}{٤} = ٢$ ،

وتصبح $\sigma_{٤} = \{-٣ ، -١ ، ١ ، ٣ ، ٥\}$

الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_٤$ هي:

$[-٣ ، -١]$ ، $[-١ ، ١]$ ، $[١ ، ٣]$ ، $[٣ ، ٥]$

$س_ر^*$ المناظرة = -٣ ، -١ ، ١ ، ٣   (لماذا؟)

$$م(\sigma_ن ، ق) = \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*)(س_ر - س_{ر-١}) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*) \text{ (لماذا؟)}$$

$$م(\sigma_٤ ، ق) = ٢ \sum_{ر=١}^{٤} ق(س_ر^*) = ٢(ق(-٣) + ق(-١) + ق(١) + ق(٣))$$

$$= ٢(١٥ + ٣ + -١ + ٣) = ٤٠$$

مثال ٩: إذا علمت أن ق(س) = لـوهـ س وكانت $\sigma_٣$ = {١ ، هـ ، هـ^٢ ، هـ^٣} تجزئةً للفترة [١ ، هـ^٣]، فاحسب م($\sigma_٣$ ، ق) معتبراً $س_ر^* = س_ر$

الحل: الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_٣$ هي: [١ ، هـ] ، [هـ ، هـ^٢] ، [هـ^٢ ، هـ^٣]

$$م(\sigma_٣ ، ق) = (هـ - ١)\,ق(هـ) + (هـ^٢ - هـ)\,ق(هـ^٢) + (هـ^٣ - هـ^٢)\,ق(هـ^٣)$$

$$= (هـ - ١)(١) + (هـ^٢ - هـ)(٢) + (هـ^٣ - هـ^٢)(٣)$$

$$= ٣هـ^٣ - هـ^٢ - هـ - ١$$

مثال ١٠: إذا كان ق(س) = أس ، س $\in$ [-١ ، ١]، وكانت $\sigma_٤$ تجزئةً منتظمةً للفترة [-١ ، ١] فجد قيمة أ علماً بأن م($\sigma_٤$ ، ق) = ٢ ، $س_ر^* = س_{ر-١}$

الحل: طول الفترة الجزئية = $\frac{١}{٢}$ ، $\sigma_٤ = \{-١ ، \frac{-١}{٢} ، ٠ ، \frac{١}{٢} ، ١\}$

$$م(\sigma_٤ ، ق) = \frac{١}{٢} \sum_{ر=١}^{٤} ق(س_ر^*) = \frac{١}{٢}(ق(س_٠) + ق(س_١) + ق(س_٢) + ق(س_٣))$$

$$= \frac{١}{٢}(ق(-١) + ق(\frac{-١}{٢}) + ق(٠) + ق(\frac{١}{٢}))$$

$$= \frac{١}{٢}(-أ + \frac{-١}{٢}أ + ٠ + \frac{١}{٢}أ) = ٢$$

$-أ = ٤$ ومنها   أ $= -٤$

تمارين ٥ - ١

١ إذا كانت $\sigma_٦$ تجزئةً منتظمةً للفترة [$^-١$ ، ٢]، فجد:

أ العنصر الثالث في التجزئة

ب الفترة الجزئية الرابعة

٢ إذا كان العنصر الخامس في التجزئة المنتظمة $\sigma_{١٠}$ للفترة [جـ ، ٧] يساوي ٤، جد قيمة جـ.

٣ إذا كان ق(س) = ٦ − س^٢ معرفاً في الفترة [١ ، ٥] ، وكانت $\sigma_٤$ تجزئةً منتظمةً للفترة نفسها،

فجد م($\sigma_٤$ ، ق) معتبرًا س$_ر^*$ = س$_ر$

٤ إذا كان ق(س) = ٢ + هـ^س معرفاً في الفترة [$^-١$ ، ٢] ، وكانت $\sigma_٣$ تجزئةً منتظمةً للفترة نفسها،

فجد م($\sigma_٣$ ، ق) معتبرًا س$_ر^*$ = س$_{ر-١}$

٥ إذا كان ق(س) = $\frac{\text{أ س}}{\text{س + ٢}}$ معرفاً على [$^-١$ ، ٨]، وكانت $\sigma_٥$ = {$^-١$ ، ٠ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨} تجزئة للفترة [$^-١$ ، ٨] ، فاحسب قيمة أ علماً بأن م($\sigma_٥$ ، ق) = ٥,٦ ، اعتبر س$_ر^*$ = س$_{ر-١}$

٦ إذا كانت $\sigma_٨$ تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب] والعنصر الثالث فيها يساوي ٢ ، وكانت $\sigma_{١٢}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب] والعنصر الخامس فيها يساوي ٤ ، جد قيم أ ، ب.

٧ إذا كان ق(س) = جاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، وكانت $\sigma_٤$ = {٠ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٢}$}

أوجد م($\sigma_٤$ ، ق) معتبراً س$_ر^*$ = س$_{ر-١}$

٨ إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً ومحدوداً في الفترة [٠ ، ١] وكانت $\sigma_ن$ تجزئة نونية منتظمة للفترة نفسها، وكانت م($\sigma_ن$ ، ق) = ل ، عندما س$_ر^*$ = س$_ر$ و م($\sigma_ن$ ، ق) = ك ، عندما س$_ر^*$ = س$_{ر-١}$

أثبت أن: ل − ك = $\frac{١}{ن}$ (ق(١) − ق(٠))

نشاط ١: يعتبر تل العاصور من الجبال العالية الواقعة شرق رام الله، يريد السيد جهاد حساب مساحة قطعة أرض له واقعة هناك (المنطقة المحدودة باللون الأحمر في الشكل المجاور)، لاحظ أنه لا يمكن تقسيمها إلى أشكال منتظمة، ولا يمكن إيجاد مساحتها باستخدام قوانين المساحة المعروفة. كيف يمكنك مساعدة جهاد في حساب مساحة قطعة الأرض؟

مثال ١ : *إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + ٣$ معرفاً في الفترة $[٢ ، ٦]$، ولتكن $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة نفسها فاحسب $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق})$ معتبرًا $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$

أتذكر

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ك}_{\text{ر}} \pm \text{ع}_{\text{ر}}) = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ك}_{\text{ر}}) \pm \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ع}_{\text{ر}})$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{أ}(\text{ك}_{\text{ر}}) = \text{أ} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ك}_{\text{ر}})$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{أ} = \text{ن أ}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢}$$

الحل :

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^*_{\text{ر}}) = \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^*_{\text{ر}})$$

لكن $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}}\text{ر}$

فيكون $\text{س}_{\text{ر}} = ٢ + \frac{٤}{\text{ن}}\text{ر}$

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(٢ + \frac{٤}{\text{ن}}\text{ر})$$

$$= \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (٧ + \frac{٨}{\text{ن}}\text{ر}) = \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٧ + \frac{٤}{\text{ن}} \times \frac{٨}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}$$

$= \frac{٤}{\text{ن}} \times ٧\text{ن} + \frac{٣٢}{\text{ن}^٢} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢}$ وبعد التبسيط

يكون $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = ٤٤ + \frac{١٦}{\text{ن}}$

* سوف نقتصر دراستنا في إيجاد $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق})$ (ن غير محددة) على اقترانات كثيرة حدود من الدرجة الأولى على الأكثر.

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٥س − ٢ معرفاً في الفترة [١ ، ب] ، وكانت $\sigma_{ه}$ تجزئةً خماسيةً منتظمةً لهذه الفترة بحيث ، م($\sigma_{ه}$ ، ق) = ٣٦، جد قيمة ب حيث $س^*_{ر} = س_{ر}$

الحل :

$$م(\sigma_{ن} ، ق) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س^*_{ر})$$

$$س^*_{ر} = س_{ر} = ١ + \frac{ب - ١}{ه} ر$$

$$م(\sigma_{ه} ، ق) = \frac{ب - ١}{ه} \sum_{ر=١}^{ه} ق(س^*_{ر}) = \frac{ب - ١}{ه} \sum_{ر=١}^{ه} ق(١ + \frac{ب - ١}{ه} ر)$$

$$= \frac{ب - ١}{ه} \sum_{ر=١}^{ه} (٣ + (ب - ١) ر))$$

ومنها يكون $\frac{ب - ١}{ه} (٣ \times ٥ + (ب - ١) (\frac{٥ \times ٦}{٢})) = ٣٦$

وينتج بعد التبسيط أن: $ب^{٢} - ب - ١٢ = ٠$ ، وبحل المعادلة، ينتج أن:

ب = ٤ ، ب = −٣ (مرفوضة) .... (لماذا؟)

تعريف التكامل المحدود:

إذا كان الاقتران ق(س) معرفاً ومحدوداً* في الفترة [أ ، ب]،

وكانت $\lim_{ن \to \infty} م(\sigma_{ن} ، ق) = ل$ لجميع قيم $س^*_{ر} \in [س_{ر-١} ، س_{ر}]$ فإن الاقتران ق(س)

يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]، ويكون $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس = ل$

(نسمي أ ، ب حدود التكامل)

* يكون الاقتران ق(س) محدوداً إذا وجد عددان حقيقيان م ، ن حيث م ≤ ق(س) ≤ ن ∀ س ∈ مجال الاقتران

مثال ٣ : إذا كان ق(س) = ٥ − ٤س حيث س ∈ [٠ ، ٣]، معتبراً $س^*_ر$ = $س_ر$ ، احسب $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) دس باستخدام تعريف التكامل المحدود .

الحل :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = \lim_{ن \leftarrow \infty} \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س^*_ر)$$

إذن $$\int_{٠}^{٣} ق(س)\, دس = \lim_{ن \leftarrow \infty} \frac{٣ - ٠}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر)$$

$$= \lim_{ن \leftarrow \infty} \frac{٣}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} \left(٥ - ٤\left(\frac{٣}{ن}ر\right)\right) \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \lim_{ن \leftarrow \infty} \frac{٣}{ن} \left(\sum_{ر=١}^{ن} ٥ - \frac{١٢}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ر\right) \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \lim_{ن \leftarrow \infty} \frac{٣}{ن} \left(٥ن - \frac{١٢}{ن} \times \frac{ن(ن + ١)}{٢}\right)$$

$$= \lim_{ن \leftarrow \infty} \frac{٣}{ن} (^-ن - ٦)$$

$$= \lim_{ن \leftarrow \infty} \left(^-٣ - \frac{١٨}{ن}\right) = ^-٣$$

أتذكر:

إذا كان ق(س) اقتراناً نسبياً، فإن $\lim_{س \leftarrow \pm\infty}$ ق(س) =

- عدداً حقيقياً ≠ ٠، إذا كانت درجة البسط = درجة المقام، وتكون قيمة النهاية = معامل $س^ن$ في البسط ÷ معامل $س^ن$ في المقام حيث ن أعلى أس في البسط والمقام.
- صفراً إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.
- إما ∞ ، أو −∞ ، إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

مثال ٤ : إذا علمت أن $\int_{-1}^{4} \text{ق(س) دس} = 9$ ، وكان م$(\sigma_{\text{ن}}$ ، ق$) = \frac{(\text{ن} + 1)(2\text{أن} + 1)}{\text{ن}^2}$

حيث $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [$^-1$ ، ٤] ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل : $\int_{-1}^{4} \text{ق(س) دس} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\sigma_{\text{ن}} \text{، ق})$

إذن $\int_{-1}^{4} \text{ق(س) دس} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{(\text{ن} + 1)(2\text{أن} + 1)}{\text{ن}^2} = 9$

ومنها يكون ٢أ = ٩ ومنها أ = $\frac{9}{2}$ ..... (لماذا؟)

قابلية الاقتران ق(س) للتكامل في الفترة [أ ، ب]

نظرية (١):

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب]، فإنه يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب].

مثال ٥ : هل الاقتران ق(س) = س^2 + ٥ قابل للتكامل في الفترة [$^-2$ ، ٤]. ولماذا؟

الحل : ق(س) = س^2 + ٥ قابل للتكامل في الفترة [$^-2$ ، ٤]

لأنه متصل في الفترة [$^-2$ ، ٤] كونه كثير حدود.

نظرية (٢):

إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]، وكان الاقتران هـ(س) = ق(س) لجميع قيم س ∈[أ ، ب]، عدا عند مجموعة منتهية من قيم س في تلك الفترة ، فإن هـ(س) يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]

ويكون $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س) دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس}$

مثال ٦ : ابحث في قابلية التكامل للاقتران ق(س) = $\left[\frac{١}{٢} س\right]$ في الفترة [٤ ، ٦].

الحل : تعلم أن ق(س) = $\left[\frac{١}{٢} س\right] = \begin{cases} ٢ &، ٤ \leq س < ٦ \\ ٣ &، س = ٦ \end{cases}$

نفرض أن هـ(س) = ٢ حيث س∈[٤ ، ٦]، لاحظ أن هـ(س) قابل للتكامل لأنه متصل

وبما أن هـ(س) = ق(س) لجميع قيم س∈[٤ ، ٦] ما عدا عند س = ٦

فإن الاقتران ق(س) = $\left[\frac{١}{٢} س\right]$ يكون قابلاً للتكامل على [٤ ، ٦].

مثال ٧ : بيّن أن الاقتران ق(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س + ١}$ قابل للتكامل في الفترة [-٢ ، ٢]

الحل : نفرض أن هـ(س) = س - ١ حيث س∈[-٢ ، ٢]

لاحظ أن هـ(س) اقتران متصل؛ لأنه كثير حدود فهو قابل للتكامل في الفترة [-٢ ، ٢]

وبما أن هـ(س) = ق(س) عند جميع قيم س∈[-٢ ، ٢] ما عدا عند س = -١

فإن الاقتران ق(س) يكون قابلاً للتكامل في [-٢ ، ٢]

تمارين ٥ - ٢

١ إذا كان ق(س) = ٢ - ٥س، وكانت $\sigma_ن$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [-١ ، ٣]،
فاحسب م($\sigma_ن$ ، ق) معتبرًا $س^*_ر$ = $س_ر$

٢ إذا كان ق(س) = أ هـ(س) + ب وكانت $\sigma_ن$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [٠ ، ١]،
فأثبت أن: م($\sigma_ن$ ، ق) = أم($\sigma_ن$ ، هـ) + ب لجميع اختيارات $س^*_ر$

٣ إذا كان ق(س) = ٢س معرفاً في الفترة [١ ، ب]، وكان م($\sigma_ن$ ، ق) = ٣٥ + $\frac{٢٥}{ن}$ ، فما قيمة الثابت ب ؟

٤ استخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد قيمة كل من:

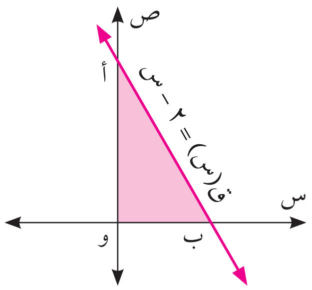
أ $\int_{-١}^{٤} \frac{١}{٢}$ دس

ب $\int_{١}^{٢} (٤ - ٦س)$ دس

٥ بيّن أن الاقتران ق(س) = $\frac{جتا^٣س - ١}{جتاس - ١}$ قابل للتكامل في الفترة $\left[-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right]$

٥ - ٣ العلاقة بين التفاضل والتكامل (Fundamental Theorem of Calculus)

نشاط ١ : الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) = ٢ − س،
والمار بالنقطتين أ ، ب



١ مساحة المثلث أ و ب = ...

٢ إذا كان م(س) هو الاقتران الأصلي للاقتران ق(س)

فإن م(س) = $\int$ (٢ − س) دس = ٢س − $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + جـ

٣ قيمة م(٢) − م(٠) = ... ماذا تلاحظ؟

تعريف:

إذا كان م(س) هو أحد الاقترانات الأصلية للاقتران المتصل ق(س) في الفترة [أ ، ب]،
فإن المقدار م(ب) − م(أ) يساوي التكامل المحدود للاقتران ق(س) في الفترة [أ ، ب]

ونرمز له بالرمز $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

١ إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً في الفترة [أ ، ب]، وكان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس = م(س) $\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ = م(ب) − م(أ)

٢ أ إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]،

فإن ت(س) = $\int_{\text{أ}}^{\text{س}}$ ق(ص) دص لجميع قيم س ∈[أ ، ب]

ويسمى ت(س) الاقتران المكامل للاقتران ق(س).

ب إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً، فإن تَ(س) = ق(س) لكل س ∈]أ ، ب[

مثال ١ : جد قيمة كل مما يأتي:

١ $\int_{-٢}^{٣} (٤س^٣ - ١)\ دس$

٢ $\int_{٤}^{٩} ٣\sqrt{س}\ دس$

٣ $\int_{١}^{٢} هـ^{س}\ دس$

الحل :

١ ق(س) = ٤س^٣ − ١ متصل على ح ، م(س) = س^٤ − س اقتران أصلي للاقتران ق(س)

إذن $\int_{-٢}^{٣} (٤س^٣ - ١)\ دس = م(س)\Big|_{-٢}^{٣} = (س^٤ - س)\Big|_{-٢}^{٣}$

$= [(٣)^٤ - (٣)] - [(-٢)^٤ - (-٢)] = ٦٠$

٢ لاحظ أن أحد الاقترانات الأصلية للاقتران $٣\sqrt{س}$ هو $٢س^{\frac{٣}{٢}}$

$\int_{٤}^{٩} ٣\sqrt{س}\ دس = \int_{٤}^{٩} ٣س^{\frac{١}{٢}}\ دس = ٢س^{\frac{٣}{٢}}\Big|_{٤}^{٩} = ...$ (أكمل)

٣ $\int_{١}^{٢} هـ^{س}\ دس = هـ^{س}\Big|_{١}^{٢} = هـ^{٢} - هـ$ (لماذا؟)

مثال ٢ : إذا كان م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س)

وكانت م(−٣) = ٤ ، م(٧) = ١٢، فجد $\int_{-٣}^{٧} ق(س)\ دس$

الحل : $\int_{-٣}^{٧} ق(س)\ دس = م(س)\Big|_{-٣}^{٧}$

$= م(٧) - م(-٣) = ٨$

مثال ٣ : إذا كان ق(س) = $٤س^{٣}$ معرفاً في الفترة [⁻٢ ، ٤]، فجد ت(س)، ثم احسب ت(⁻٢) ، ت(١)

الحل : $\text{ت(س)} = \int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص}$

$$= \int_{-٢}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص}$$

$$= \int_{-٢}^{\text{س}} ٤\text{ص}^{٣}\,\text{دص} = \text{ص}^{٤} \Big|_{-٢}^{\text{س}}$$

$$= \text{س}^{٤} - ١٦$$

ومنها ت(⁻٢) = ١٦ − ١٦ = ٠ ، ت(١) = ١ − ١٦ = ⁻١٥

فكّر وناقش:

كيف يمكنك إيجاد ت(١) دون إيجاد ت(س)؟

مثال ٤ : إذا كان ق(س) = $\text{س}^{٢}$ + جا٢س ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]، فجد:

١ الاقتران المكامل ت(س) ٢ ت(٠) ، ٣ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{ق(س) دس}$

الحل :

١ $\text{ت(س)} = \int_{٠}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص} = \int_{٠}^{\text{س}} (\text{ص}^{٢} + \text{جا}٢\text{ص})\,\text{دص}$

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{٢} + \frac{١}{٢} \qquad \text{(لماذا؟)}$$

٢ $\text{ت(٠)} = \frac{(٠)^{٣}}{٣} - \frac{\text{جتا}٢(٠)}{٢} + \frac{١}{٢} = ٠$

٣ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{ق(س) دس} = \text{ت}(\frac{\pi}{٤}) = \frac{\pi^{٣}}{١٩٢} + \frac{١}{٢} \qquad \text{(لماذا؟)}$

سوف نقدم الاقتران المكامل لاقتران متعدد القاعدة في الدرس التالي:

نظرية:

إذا كان ت(س) هو الاقتران المكامل للاقتران ق(س) المعرف في الفترة [أ ، ب] فإن:

١ ت(س) اقتران متصل دائماً في الفترة [أ ، ب].

٢ ت(أ) = ٠

مثال ٥ : جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \text{قا}^{٥}\text{س ظاس دس}$

الحل : نفرض ص = قاس فيكون دص = قاس ظاس دس ومنها دس = $\frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}}$

$\int \text{قا}^{٥}\text{س ظاس دس} = \int \text{ص}^{٥}\ \text{ظاس}\ \frac{\text{دص}}{\text{ص ظاس}} = \int \text{ص}^{٤}\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^{٥}}{٥} + \text{جـ}$

$\int \text{قا}^{٥}\text{س ظاس دس} = \frac{\text{قا}^{٥}\text{س}}{٥} + \text{جـ}$ ، لاحظ أن $\frac{\text{قا}^{٥}\text{س}}{٥}$ هو أحد الاقترانات الأصلية

ومنها $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \text{قا}^{٥}\text{س ظاس دس} = \left.\frac{\text{قا}^{٥}\text{س}}{٥}\right|_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$

$\frac{\text{قا}^{٥}\frac{\pi}{٣}}{٥} - \frac{\text{قا}^{٥}(٠)}{٥} = \frac{٣١}{٥}$ ..... (لماذا؟)

تمارين ٥ - ٣

١ جد قيم التكاملات المحدودة الآتية:

أ $\int_{٠}^{٤} (٣ + \sqrt{س})^{٢}$ دس

ب $\int_{١}^{٢}$ س(س^{٢} − ٣)^{٣} دس

جـ $\int_{١}^{هـ}$ لـو$_{هـ}$ س دس

د $\int_{٠}^{٢}$ ١٢٠س^{٢}(س − ١)^{٣} دس

٢ إذا كان ق(س) = $\frac{س}{س + ١}$ ، س ∋ [٠ ، ٤] ، أوجد ت(س)

٣ إذا كان ت(س) = $\begin{cases} ٢س^{٢} + أ & ، \quad ٢^{-} \geq س \geq ٣ \\ ب س + ١ & ، \quad ٣ > س \geq ٥ \end{cases}$ ، هو الاقتران المكامل للاقتران ق(س)

في الفترة [$^{-}$٢ ، ٥] ، فجد قيم الثابتين أ ، ب .

٤ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً، وكان $\int_{\frac{١}{٢}}^{س}$ ق(ص) دص = س + جا π س + جـ

فجد قيمة الثابت جـ ، ثم ق(٢) حيث س ≤ $\frac{١}{٢}$

٥ إذا كان ت(س) = $\int_{١}^{س}$ (أ + هـ^{ص}) دص وكان تَ(٢) = $^{-}$١ ، احسب قيمة أ .

٦ جد $\int_{٠}^{١}$ (س^{٢} − ٢س) (س − ١)^{٥} دس

٥ - ٤ خصائص التكامل المحدود (Properties of Definite Integral)

للتكامل المحدود خصائص مهمة تسهل حساب قيمته، ومنها:

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] فإن:

١ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس = $-\int_{ب}^{أ}$ ق(س) دس

٢ $\int_{أ}^{أ}$ ق(س) دس = ٠

٣ $\int_{أ}^{ب}$ ك دس = ك (ب - أ) حيث ك ∋ ح

٤ $\int_{أ}^{ب}$ ك ق(س) دس = ك $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس حيث ك ∋ ح

٥ $\int_{أ}^{ب}$ (ق(س) ± هـ(س)) دس = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس ± $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس (يمكن تعميمها على أكثر من اقترانين)

مثال ١ : جد قيمة ما يأتي:

١ $\int_{-٤}^{٦}$ دس

٢ $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٣}}$ -٣ جاس دس

٣ $\int_{١}^{٢} \frac{٣س^٤ - ٧س^٢ + ٥}{س^٢}$ دس

الحل :

١ $\int_{-٤}^{٦}$ دس = (٦ - (-٤)) = ١٠

٢ $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٣}}$ -٣ جاس دس = ٠ (لماذا؟)

٣ $\int_{١}^{٢} \frac{٣س^٤ - ٧س^٢ + ٥}{س^٢}$ دس = $\int_{١}^{٢} \left(\frac{٣س^٤}{س^٢} - \frac{٧س^٢}{س^٢} + \frac{٥}{س^٢}\right)$ دس

$\int_{١}^{٢}$ (٣س^٢ - ٧ + ٥س^{-٢}) دس = $\left.\left(س^٣ - ٧س - \frac{٥}{س}\right)\right|_{١}^{٢}$ = ... (أكمل)

مثال ٢ : إذا كان $\int_{\text{٣أ+١}}^{\text{٢+٥أ}} \text{٤ دس} = \text{٣٦}$ ، فما قيمة/ قيم الثابت أ ؟

الحل : حسب الخاصية (٣) يكون $\int_{\text{٣أ+١}}^{\text{٢+٥أ}} \text{٤ دس} = \text{٤((٢ + ٥أ) − (٣أ + ١))} = \text{٣٦}$

أي أن ٨أ + ٤ = ٣٦ ومنها أ = ٤

مثال ٣ : إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، وكان $\int_{\text{٣}}^{\text{٦}} \text{ق(س) دس} = \text{١٠}$ ، فجد:

١) $\int_{\text{٣}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس}$ ٢) $\int_{\text{٦}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس}$

الحل :

١) $\int_{\text{٣}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس} = \text{٠}$

٢) $\int_{\text{٦}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس} = - \int_{\text{٣}}^{\text{٦}} \text{ق(س) دس} = \text{−١٠}$

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، وكان ق(س) $\geq$ ٠

لكل س $\in$ [أ ، ب] فإن: $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} \geq \text{٠}$

مثال ٤ : بدون حساب التكامل بيّن أن: $\int_{\text{٠}}^{\text{٥}} \frac{\text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤}} \text{دس} \geq \text{٠}$

الحل : نبحث في إشارة المقدار $\frac{\text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤}}$ في الفترة [٠ ، ٥]، وبما أن ٣س $\geq$ ٠ ، $\forall$ س $\in$ [٠ ، ٥]

وكذلك س$^{\text{٢}}$ + ٤ $\geq$ ٤ > ٠ ، $\forall$ س $\in$ [٠ ، ٥]

إذن $\frac{\text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤}} \geq$ ٠ $\forall$ س $\in$ [٠ ، ٥] ومنها $\int_{\text{٠}}^{\text{٥}} \frac{\text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤}} \text{دس} \geq \text{٠}$

خاصية المقارنة:

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل في الفترة [أ ، ب]،

وكان ق(س) $\leq$ هـ(س) لكل س $\in$ [أ ، ب]، فإن $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس $\leq$ $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس

مثال ٥ : بدون إجراء عملية التكامل بيّن أن: $\int_{١}^{٢}$ (س^{٢} − ١) دس $\geq$ $\int_{١}^{٢}$ (٢س + ٢) دس

الحل : نفرض أن ق(س) = (س^{٢} − ١) − (٢س + ٢) = س^{٢} − ٢س − ٣

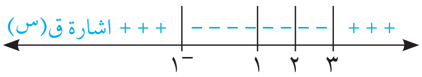
نبحث في إشارة الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٢س − ٣

فنلاحظ أن ق(س) $\leq$ ٠ في الفترة [١ ، ٢]،

أي أن س^{٢} − ٢س − ٣ $\leq$ ٠ (انظر الشكل المجاور)

وبالتالي يكون (س^{٢} − ١) $\leq$ (٢س + ٢) في الفترة [١ ، ٢]

أي أن $\int_{١}^{٢}$ (س^{٢} − ١) دس $\leq$ $\int_{١}^{٢}$ (٢س + ٢) دس



مثال ٦ : إذا كان ق(س) $\leq$ ٤ لجميع قيم س $\in$ [١ ، ٣]، فما أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣}$ ٥ق(س) دس؟

الحل : بما أن ق(س) $\leq$ ٤ لجميع قيم س $\in$ [١ ، ٣]،

فإن $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس $\leq$ $\int_{١}^{٣}$ ٤ دس

أي أن: $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس $\leq$ ٨

إذن المقدار $\int_{١}^{٣}$ ٥ق(س) دس = ٥ $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس $\leq$ ٥ × ٨

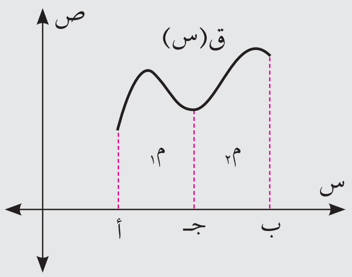
أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣}$ ٥ق(س) دس هي ٤٠.

خاصية الإضافة:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة ف $\subseteq$ ح

وكان أ ، ب ، جـ أي ثلاثة أعداد تنتمي للفترة ف فإن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس}$$



مثال ٧ : عبّر بتكامل واحد عما يأتي: $\int_{-١}^{٤} \text{ق(س) دس} + \int_{٤}^{٩} \text{ق(س) دس}$

الحل : $\int_{-١}^{٤} \text{ق(س) دس} + \int_{٤}^{٩} \text{ق(س) دس} = \int_{-١}^{٩} \text{ق(س) دس}$

مثال ٨ : إذا كان $\int_{٢}^{٦} \text{ق(س) دس} = ٣$ ، وكان $\int_{٨}^{٦} \text{ق(س) دس} = -٥$ ، فجد $\int_{٢}^{٨} \text{٢ق(س) دس}$

الحل : $\int_{٢}^{٨} \text{ق(س) دس} = \int_{٢}^{٦} \text{ق(س) دس} + \int_{٦}^{٨} \text{ق(س) دس}$

$= \int_{٢}^{٦} \text{ق(س) دس} - \int_{٨}^{٦} \text{ق(س) دس} = ٣ - (-٥) = ٨$

أي أن $\int_{٢}^{٨} \text{٢ق(س) دس} = ٢ \int_{٢}^{٨} \text{ق(س) دس} = ١٦$

مثال ٩ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣\text{س}^٢ & ، -١ \le \text{س} \le ٢ \\ ٤\text{س} + ٢ & ، ٢ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$ ، فجد الاقتران المكامل ت(س)

الحل :

١ عندما $-١ \le \text{س} \le ٢$ فإن ت(س) $= \int_{-١}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص} = \int_{-١}^{\text{س}} ٣\text{ص}^٢ \text{ دص} = \text{س}^٣ + ١$

٢ عندما $٢ < \text{س} \le ٤$ فإن:

ت(س) $= \int_{-١}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص} = \int_{-١}^{٢} \text{ق(س) دس} + \int_{٢}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص}$

$= ٩ + \int_{٢}^{\text{س}} (٤\text{ص} + ٢) \text{ دص} = ٢\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣$ (لماذا؟)

ومنها $ت(س) = \begin{cases} س^{٣} + ١ &، -١ \leq س \leq ٢ \\ ٢س^{٢} + ٢س - ٣ &، ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$

لاحظ أن ت(س) متصل ، $ت(-١) = ٠$

نشاط : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - ٧ &، س > ٢ \\ ٢س &، س \leq ٢ \end{cases}$ ،

فإن $\int_{-٢}^{٣} ق(س)\, دس = \int_{-٢}^{٢} ٢س\, دس + \int_{٢}^{٣} (........)\, دس$

$= س^{٢} \Big|_{-٢}^{٢} + س^{٣} - ٧س \Big|_{٢}^{٣} =$ صفر + ...

مثال ١٠: جد $\int_{١}^{٢} \frac{١}{١ + هـ^{س}}\, دس$

الحل : بإضافة وطرح $هـ^{س}$ للبسط يصبح $\int_{١}^{٢} \frac{١ + هـ^{س} - هـ^{س}}{١ + هـ^{س}}\, دس$

$= \int_{١}^{٢} \left(١ - \frac{هـ^{س}}{١ + هـ^{س}}\right) دس$

$= (س - لـو_{هـ}|١ + هـ^{س}|) \Big|_{١}^{٢}$

$= (٢ - لـو_{هـ} (١ + هـ^{٢}) - (١ - لـو_{هـ} (١ + هـ)))$

$= ١ + لـو_{هـ} \left(\frac{١ + هـ}{١ + هـ^{٢}}\right)$ (لماذا؟)

فكّر وناقش:

جد التكامل السابق بالتكامل بالتعويض بفرض $ص = ١ + هـ^{س}$

مثال ١١: إذا كان $\int_{٠}^{٢} س\, ق(س)\, دس = ٨$ ، $ق(٢) = ٥$ ، فجد $\int_{٠}^{٢} س^{٢}\, قَ(س)\, دس$

الحل : نفرض أن: $م = س^{٢}$ $دع = قَ(س)\, دس$

$دم = ٢س\, دس$ $ع = ق(س)$

ومنها ينتج أن: $\int_{٠}^{٢} س^{٢}\, قَ(س)\, دس = س^{٢}\, ق(س) - \int_{٠}^{٢} ٢س\, ق(س)\, دس$

$$\int_{٠}^{٢} س^{٢}\, قَ(س)\, دس = س^{٢}\, ق(س)\Big|_{٠}^{٢} - ٢ \int_{٠}^{٢} س\, ق(س)\, دس$$

$$= (٤ \times ق(٢) - ٠ \times ق(٠)) - ٢ \times ٨$$

$$= ٢٠ - ١٦ = ٤$$

مثال ١٢: اذا كان $\int_{٢}^{أ} \frac{٤}{س^{٢} - ١}\, دس = ٢\,لـو_{هـ} \frac{٣}{٢}$ فما قيمة الثابت أ حيث $أ > ١$ ؟

الحل : نجد $\int_{٢}^{أ} \frac{٤}{س^{٢} - ١}\, دس$ بطريقة الكسور الجزئية

نفرض أن $\frac{٤}{س^{٢} - ١} = \frac{ل}{س - ١} + \frac{ب}{س + ١}$ ، فتكون $ل = ٢$ ، $ب = -٢$ (تحقق من ذلك)

$$\int_{٢}^{أ} \frac{٤}{س^{٢} - ١}\, دس = \left(٢\,لـو_{هـ}|س - ١| - ٢\,لـو_{هـ}|س + ١|\right)\Big|_{٢}^{أ}$$

$$= ٢\,لـو_{هـ}\left|\frac{أ - ١}{أ + ١}\right| - ٢\,لـو_{هـ}\left|\frac{٢ - ١}{٢ + ١}\right|$$

ويكون $٢\,لـو_{هـ}\left|\frac{أ - ١}{أ + ١}\right| - ٢\,لـو_{هـ}\left|\frac{٢ - ١}{٢ + ١}\right| = ٢\,لـو_{هـ} \frac{٣}{٢}$

وبحل المعادلة $لـو_{هـ} \frac{أ - ١}{أ + ١} - لـو_{هـ} \frac{١}{٣} = لـو_{هـ} \frac{٣}{٢}$

وينتج أن $٣ \times \frac{أ - ١}{أ + ١} = \frac{٣}{٢}$ ومنها $أ = ٣$ (لماذا؟)

تمارين ٥ - ٤

١ جد قيمة التكاملات الآتية:

أ $\int_{0}^{\pi} \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

ب $\int_{0}^{2} (1 + \text{هـ}^{\text{س}})^{2}\ \text{دس}$

جـ $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\text{س} + 1)(\text{س}^{2} + 4)\ \text{دس}$

د $\int_{-2}^{1} \frac{\text{س}^{3} - 27}{\text{س}^{2} + 3\text{س} + 9}\ \text{دس}$

٢ أثبت بدون حساب قيمة التكامل فيما يأتي:

أ $\int_{1}^{2} (\text{س}^{2} + 2)\ \text{دس} \geq \int_{1}^{2} (2\text{س} - 1)\ \text{دس}$

ب $\int_{2}^{3} (\text{س}^{2} + 2)\ \text{دس} \geq 0$

٣ عبّر عن كل مما يأتي بتكامل واحد:

أ $\int_{5}^{7} \text{س}^{3}\ \text{دس} + \int_{1}^{5} \text{س}^{3}\ \text{دس}$

ب $\int_{1}^{2} \sqrt{\text{س} + 2}\ \text{دس} - \int_{4}^{2} \sqrt{\text{س} + 2}\ \text{دس}$

جـ $\int_{1}^{3} \text{س}^{2}\ \text{دس} - \int_{3}^{1} 4\ \text{دس} + \int_{3}^{5} (\text{س}^{2} + 4)\ \text{دس}$

د $\int_{2}^{5} (\text{س} - 1)\ \text{دس} + \int_{7}^{5} \frac{1 - \text{س}^{2}}{\text{س} + 1}\ \text{دس}$

٤ إذا كان $\int_{1}^{5} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = 7$

أ جد $\int_{1}^{5} (2\text{ق}(\text{س}) - 3\text{س} + 1)\ \text{دس}$

ب احسب قيمة أ علماً بأن $\int_{1}^{5} 2\text{أ}\ \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = 1$

٥ إذا كان $\int_{1}^{5}$ ق(س) دس = ٨ فما قيمة؟

أ $\int_{1}^{5}$ (٣ق(س) − ٢) دس

ب $\int_{3}^{7}$ (٤ق(س − ٢) − ٢س) دس

٦ إذا كان $\int_{2}^{7}$ ٣ق(س) دس = ٩ ، وكان $\int_{2}^{4}$ ٥ق(س) دس = ١٠، فما قيمة $\int_{4}^{7}$ ٢ق(س) دس ؟

٧ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أ س + ١ ،} & ١ \leq \text{س} \leq ٢ \\ \text{٣س}^{٢} \text{ ،} & ٢ < \text{س} \leq ٥ \end{cases}$ ،فجد قيمة الثابت أ علماً بأن $\int_{1}^{3}$ ق(س) دس = ١٨

٨ إذا كان $\int_{1}^{ب}$ (٤س − $\int_{-1}^{2}$ ٣ع^{٢} دع) دس = ١٢، فما قيمة/ قيم الثابت ب؟

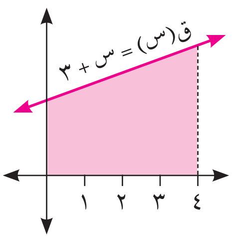
٩ إذا كان ق(س) = |٢ − س| ، س ∈ [٠ ، ٥] ، أوجد الاقتران المكامل ت(س).

٥ - ٥ تطبيقات التكامل المحدود (Applications of Definite Integral)

أولاً: المساحة (Area)

نشاط ١ : الشكل المجاور يبين مبنى وزارة التربية والتعليم العالي الفلسطينية، يراد طلاء المنطقة المحددة بالألوان فوق مدخل المبنى، فإذا علمت أن المنحنى الأزرق يمثل تقريباً منحنى الاقتران ق(س) = ٦ − ٣س^{٢}، فكيف يمكننا تحديد المساحة المراد طلاؤها؟

نشاط ٢ : إذا مثلنا منحنى الاقتران ق(س) = س + ٣ بيانياً في الفترة [٠ ، ٤] كما في الشكل المجاور، فإن:



١ المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٤ هي مساحة شبه منحرف طولي قاعدتيه .... ، .... وارتفاعه ٤ وحدات، وتكون قيمتها .... وحدة مربعة.

٢ قيمة $\int_{٠}^{٤}$ (س + ٣) دس = ...

٣ العلاقة بين مساحة شبه المنحرف وناتج التكامل للاقتران ق(س) في [٠ ، ٤] هي .... ، ماذا تستنتج؟

الحالة الأولى: مساحة منطقة محصورة بين منحنى اقتران ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]

نظرية (١):

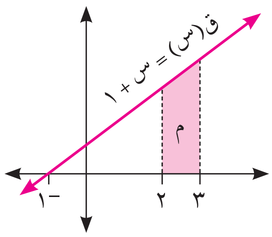
إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات في [أ ، ب] تعطى بالعلاقة : م = $\int_{أ}^{ب}$ |ق(س)| دس

مثال ١ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س + ١ ومحور السينات والمستقيمين س = ٢ ، س = ٣

الحل : نجد نقاط تقاطع منحنى الاقتران ق(س) مع محور السينات

وذلك بوضع س + ١ = ٠ ومنها س = $^{-}$١ ∌ [٢ ، ٣]

س + ١ > ٠ ، ∀ س ∈ [٢ ، ٣]



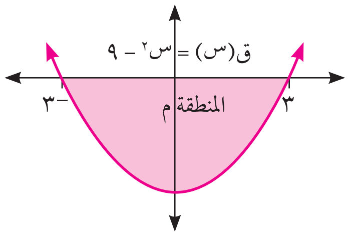
$$\text{م} = \int_{٢}^{٣} |\text{ق(س)}|\,\text{دس} = \int_{٢}^{٣} |\text{س} + ١|\,\text{دس} = \left|\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{س}\right|_{٢}^{٣}$$

$$= \frac{٣^{٢} - ٢^{٢}}{٢} + ١(٣ - ٢) = \frac{٧}{٢}\ \text{وحدة مربعة.}$$

مثال ٢ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٩ ومحور السينات

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنى الاقتران ومحور السينات

بوضع س^{٢} − ٩ = ٠ ومنها س = ±٣



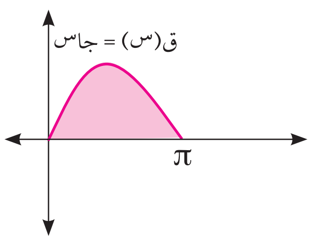
$$\text{م} = \int_{-٣}^{٣} |\text{ق(س)}|\,\text{دس} = \int_{-٣}^{٣} |(\text{س}^{٢} - ٩)|\,\text{دس}$$

$$= \left|\left(\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٩\text{س}\right)\right|_{-٣}^{٣} = \left|\frac{-١٠٨}{٣}\right| = \frac{١٠٨}{٣} = ٣٦\ \text{وحدة مربعة}$$

مثال ٣ : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جاس ومحور السينات في [٠ ، π]

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات

بوضع جاس = ٠ ومنها س = ٠ ، π



$$\text{م} = \int_{٠}^{\pi} |\text{ق(س)}|\,\text{دس} = \int_{٠}^{\pi} |\text{جاس}|\,\text{دس}$$

$$= \left|{}^{-}\text{جتاس}\right|_{٠}^{\pi} = ١ + ١ = ٢\ \text{وحدة مربعة}$$

الحالة الثانية: مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين، أو أكثر:

نظرية (٢):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل في [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي ق(س) ، هـ(س) في [أ ، ب] تعطى بالعلاقة :

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س) - هـ(س)| \, دس$$

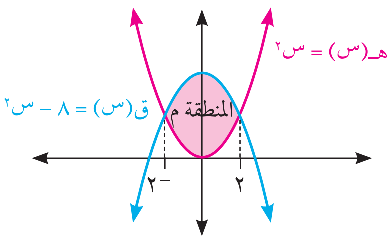
مثال ٤ : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٨ – س^{٢} ، هـ(س) = س^{٢}

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س)

بوضع ق(س) = هـ(س) فتكون ق(س) – هـ(س) = ٠

أي أن ٨ – ٢س^{٢} = ٠ ومنها س = ±٢

$$م = \int_{-٢}^{٢} |ق(س) - هـ(س)| \, دس$$



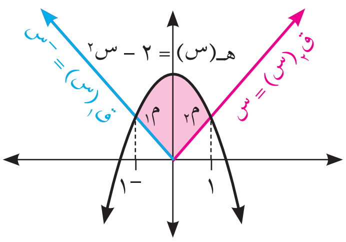
$$م = \int_{-٢}^{٢} |(٨ - ٢س^{٢})| \, دس$$

$$= \left| (٨س - \frac{٢}{٣}س^{٣}) \Big|_{-٢}^{٢} \right| = \frac{٦٤}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال ٥ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = |س| ، هـ(س) = ٢ – س^{٢}

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س) بوضع ق(س) = هـ(س)

لكن ق(س) = $\begin{cases} -س & ، س \leq ٠ \\ س & ، س > ٠ \end{cases}$



عندما س ≤ ٠ ، ٢ – س^{٢} = –س ومنها س = –١ (لماذا؟)

عندما س > ٠ ، ٢ – س^{٢} = س ومنها س = ١ (لماذا؟)

$$م = \int_{-١}^{١} |هـ(س) - ق(س)|\, دس = م_١ + م_٢$$

$$م_١ = \int_{-١}^{٠} |(٢ - س^٢) - (-س)|\, دس$$

$$= \int_{-١}^{٠} |(٢ - س^٢ + س)|\, دس = \left|(٢س - \frac{١}{٣}س^٣ + \frac{١}{٢}س^٢)\Big|_{-١}^{٠}\right| = \frac{٧}{٦} \text{ وحدة مربعة}$$

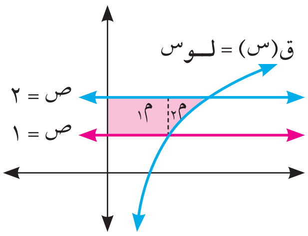
$$م_٢ = \int_{٠}^{١} |(٢ - س^٢ - س)|\, دس = \left|(٢س - \frac{١}{٣}س^٣ - \frac{١}{٢}س^٢)\Big|_{٠}^{١}\right| = \frac{٧}{٦} \text{ وحدة مربعة}$$

$$م = م_١ + م_٢ = \frac{٧}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

نلاحظ أن: $م_١ = م_٢$، وبالتالي $م = ٢ \times م_١ = ٢ \times \frac{٧}{٦} = \frac{٧}{٣}$

مثال ٦ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = لـو_{هـ} س$ والمستقيمين: $ص = ١$، $ص = ٢$ ومحور الصادات.

الحل : نجد نقط تقاطع منحنى الاقتران مع المستقيمين $ص = ١$ ، $ص = ٢$، كما يأتي:



نضع $لـو_{هـ} س = ١$ ومنها $س = هـ$

نضع $لـو_{هـ} س = ٢$ ومنها $س = هـ^٢$

$$م_١ = \int_{٠}^{هـ} (٢ - ١)\, دس = هـ \text{ وحدة مربعة}$$

$$م_٢ = \int_{هـ}^{هـ^٢} (٢ - لـو_{هـ} س)\, دس = ٢(هـ^٢ - هـ) - \int_{هـ}^{هـ^٢} لـو_{هـ} س\, دس$$

$$= ٢هـ^٢ - ٢هـ - \left|(س\, لـو_{هـ} س - س)\Big|_{هـ}^{هـ^٢}\right| \quad \text{(لماذا؟)}$$

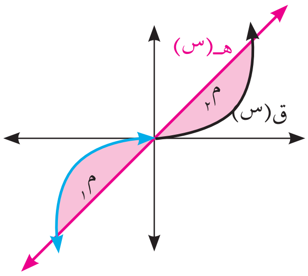
$$= ٢هـ^٢ - ٢هـ - (٢هـ^٢ - هـ^٢)$$

$$= هـ^٢ - ٢هـ$$

مساحة المنطقة المطلوبة $= م_١ + م_٢ = هـ^٢ - هـ$ وحدة مربعة

مثال ٧ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي ق(س) = س^٣ ، هـ(س) = س

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س)



بوضع ق(س) = هـ(س) اذن س^٣ − س = ٠

ومنها س = ٠ ، س = ١ ، س = −١

$$م = \int_{-١}^{١} |ق(س) - هـ(س)|\, دس = م_١ + م_٢$$

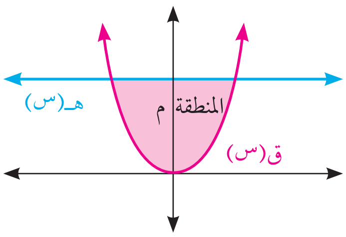
$$م = \int_{-١}^{٠} (س^٣ - س)\, دس + \int_{٠}^{١} (س - س^٣)\, دس$$

$= \frac{١}{٢}$ وحدة مربعة (لماذا؟)

مثال ٨ : إذا علمت أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = س^٢ ، هـ(س) = جـ

جـ ∈ ح هي ٣٦ وحدة مربعة ، فجد قيمة/ قيم جـ .

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س)،



بوضع ق(س) = هـ(س)

ومنها س^٢ − جـ = ٠ أي أن س = ± $\sqrt{جـ}$

$$م = \int_{-\sqrt{جـ}}^{\sqrt{جـ}} |ق(س) - هـ(س)|\, دس \quad \text{أي أن:}$$

$$٣٦ = \int_{-\sqrt{جـ}}^{\sqrt{جـ}} (هـ(س) - ق(س))\, دس \quad \text{ومنها} \quad ٣٦ = \int_{-\sqrt{جـ}}^{\sqrt{جـ}} (جـ - س^٢)\, دس$$

$$٣٦ = جـ(\sqrt{جـ} + \sqrt{جـ}) - \frac{(\sqrt{جـ})^٣ - (-\sqrt{جـ})^٣}{٣}$$

ينتج ٣٦ = $\frac{٤ جـ \sqrt{جـ}}{٣}$ ومنها جـ = ٩

تمارين ٥ – ٥ أ

١ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتاس ومحوري السينات والصادات والواقعة في الربع الأول.

٢ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣ – س^{٢} والمستقيم المار بالنقطتين أ(٠ ، ٠) ، ب(١ ، ٢) ومحور الصادات والواقعة في الربع الأول.

٣ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = (س^{٢} – ٩) (س^{٢} – ١) ومحور السينات الواقعة في الربع الثالث.

٤ جد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = هـ^{س} ، ك(س) = لــو$_{هـ}$ س والمستقيمين ص = ١ ، س = $^{-}$١ ومحور السينات.

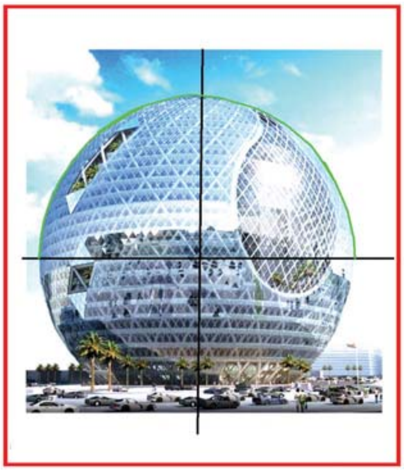
٥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = $\sqrt{٢ - س}$ حيث س ≤ ٢ ، ك(س) = $^{-}$س ومحور السينات.

٦ احسب المساحة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = ٤ ، ك(س) = ٢س

ثانياً: الحجوم الدورانية (Solid Revolutions)

نشاط : تمثل الصورة المقابلة أحد المباني الغريبة في العالم، والذي يأخذ شكلاً كروياً. نلاحظ أن قاعدة الاقتران الممثل بالمنحنى المرسوم باللون الأخضر، هي:

ق(س) = $\sqrt{\text{نق}^2 - \text{س}^2}$ ..... (لماذا؟)



١ حجم المبنى = ...

٢ قيمة المقدار $\pi \int_{-\text{نق}}^{\text{نق}}$ ق^2(س) دس = ...

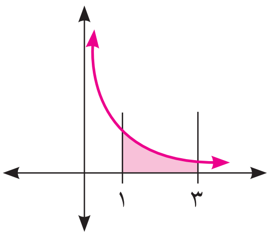
ماذا تلاحظ؟

نظرية:

إذا كان ق(س) : [أ ، ب] ⟵ ح ، وكان الاقتران ق^2(س) قابلاً للتكامل على [أ ، ب] فإن حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب

دورة كاملة حول محور السينات يعطى بالقاعدة: ح = $\pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق^2(س) دس

مثال ١ : جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{2}{\text{س}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣ دورة كاملة حول محور السينات.

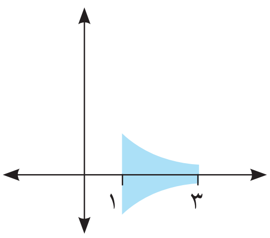


الحل :

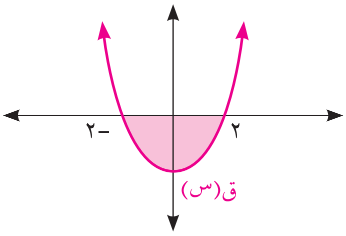
ح = $\pi \int_{1}^{3}$ ق^2(س) دس

ح = $\pi \int_{1}^{3} \left(\frac{2}{\text{س}}\right)^2$ دس = $\pi \int_{1}^{3}$ ٤س$^{-2}$ دس

= ٤$\pi \left(\frac{-1}{\text{س}}\right)\Big|_{1}^{3}$ = ٤$\pi \left(\frac{-1}{3} - \frac{-1}{1}\right)$ = $\frac{8\pi}{3}$ وحدة حجم



مثال ٢ : جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٤ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات.



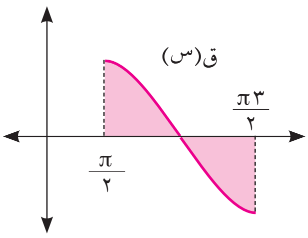
الحل : نجد نقاط تقاطع منحنى الاقتران ق(س) مع محور السينات

بوضع ق(س) = ٠ فيكون س^{٢} − ٤ = ٠ ومنها س = ±٢

$$ح = \pi \int_{-٢}^{٢} ق^{٢}(س)\, دس = \pi \int_{-٢}^{٢} (س^{٢} - ٤)^{٢}\, دس$$

$$= \pi \int_{-٢}^{٢} (س^{٤} - ٨س^{٢} + ١٦)\, دس = \pi \left(\frac{س^{٥}}{٥} - \frac{٨}{٣}س^{٣} + ١٦س\right)\Big|_{-٢}^{٢} = \frac{٥١٢\pi}{١٥} \text{ وحدة حجم}$$

مثال ٣ : جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جاس ومحور السينات في $\left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$ دورة كاملة حول محور السينات.

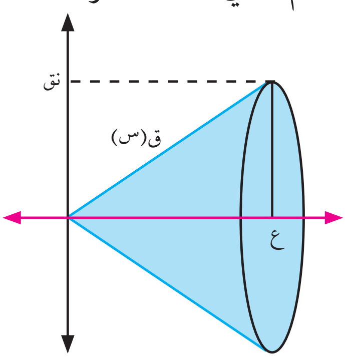


الحل : $ح = \pi \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٣\pi}{٢}} ق^{٢}(س)\, دس$

$$ح = \pi \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٣\pi}{٢}} جا^{٢}س\, دس = \pi \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٣\pi}{٢}} \frac{١}{٢}(١ - جتا٢س)\, دس$$

$$= \frac{\pi}{٢}\left(س - \frac{١}{٢}جا٢س\right)\Big|_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٣\pi}{٢}} = \frac{\pi^{٢}}{٢} \text{ وحدة حجم}$$

مثال ٤ : استخدم التكامل المحدود لإثبات أن حجم المخروط الدائري القائم الذي نصف قطر قاعدته نق وارتفاعه ع يساوي $\frac{\pi}{٣}$ نق^{٢}ع



الحل : ينتج المخروط من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة. نفرض أن طول أحد ضلعي القائمة يساوي (نق) والآخر (ع) كما في الشكل المجاور، فيكون وتر المثلث هو الراسم للمخروط.

نجد أولاً معادلة وتر المثلث (المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (ع ، نق))

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{نق}}{\text{ع}} \quad \text{إذن ص} = \frac{\text{نق}}{\text{ع}}\,\text{س}$$

$$\text{ح} = \pi \int_{٠}^{\text{ع}} \text{ص}^{٢}\,\text{دص}$$

$$= \frac{\pi\,\text{نق}^{٢}}{\text{ع}^{٢}} \int_{٠}^{\text{ع}} \text{س}^{٢}\,\text{دس} = \frac{\pi\,\text{نق}^{٢}}{\text{ع}^{٢}} \left. \frac{\text{س}^{٣}}{٣} \right|_{٠}^{\text{ع}} = \frac{\pi}{٣}\,\text{نق}^{٢}\text{ع} \quad \text{وحدة حجم.}$$

نظرية:

إذا كان ق^{٢}(س) ، هـ^{٢}(س) اقترانين قابلين للتكامل في [أ ، ب] وكان منحنى الاقتران هـ(س) ، ومنحنى الاقتران ق(س) يقعان على جهة واحدة من محور السينات، فإن حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بينهما دورة كاملة حول محور السينات هو

$$\text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left| \text{هـ}^{٢}(\text{س}) - \text{ق}^{٢}(\text{س}) \right| \text{دس}$$

مثال ٥ : جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنيي الاقترانين ق(س) = هـ$^{\text{س}}$ ، ك(س) = هـ ومحور الصادات دورة كاملة حول محور السينات.

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، ك(س)

بوضع ق(س) = ك(س) ينتج أن هـ$^{\text{س}}$ = هـ ومنها س = ١

$$\text{ح} = \pi \int_{٠}^{١} \left| (\text{ك}^{٢}(\text{س}) - \text{ق}^{٢}(\text{س})) \right| \text{دس}$$

$$\text{ح} = \pi \int_{٠}^{١} \left| (\text{هـ}^{٢} - \text{هـ}^{٢\text{س}}) \right| \text{دس} = \pi \left| \left. (\text{هـ}^{٢}\text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{٢\text{س}}) \right|_{٠}^{١} \right|$$

$$= \frac{\pi(\text{هـ}^{٢} + ١)}{٢} \quad \text{وحدة حجم.}$$

مثال ٦ : جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنيات الاقترانات ق(س) = س^{٢} − ٤س ، هـ(س) = −س دورة كاملة حول محور السينات.

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س) بوضع ق(س) = هـ(س) ومنها س^{٢} − ٤س = −س

أي أن س^{٢} − ٣س = ٠ ⟵ س = ٠ ، س = ٣

ومنها ح $= \pi \int_{٠}^{٣} |($ق$^{٢}($س$) -$ هـ$^{٢}($س$))$ دس$| = \pi \int_{٠}^{٣} |($س$^{٢} - ٤$س$)^{٢} - (-$س$)^{٢}|$ دس

$= \pi \int_{٠}^{٣} |($س$^{٤} - ٨$س$^{٣} + ١٥$س$^{٢})|$ دس

$= \pi \left| \left(\frac{\text{س}^{٥}}{٥} - ٢\text{س}^{٤} + ٥\text{س}^{٣} \right) \Big|_{٠}^{٣} \right| = \frac{١٠٨\pi}{٥}$ وحدة حجم

تمارين ٥ - ٥ ب

١ احسب حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران ق(س) = ٤ ومحوري السينات والصادات والمستقيم س = ٥ دورة كاملة حول محور السينات.

٢ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = هـ^{٢} دورة كاملة حول محور السينات.

٣ استخدم التكامل المحدود لإيجاد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بشبه المنحرف أب جـ د حيث أ (٠ ، ٠) ، ب(٣ ، ٠) ، جـ (٣ ، ١) ، د (٠ ، ٤) دورة كاملة حول محور السينات.

٤ احسب حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنيي الاقترانين ق(س) = س^{٢} + ٦ ، هـ(س) = ٥س دورة كاملة حول محور السينات.

٥ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{هـ}$ س ومحور السينات والمستقيم س = هـ دورة كاملة حول محور السينات.

٦ استخدم التكامل المحدود لإثبات أن حجم الاسطوانة الدائرية القائمة التي نصف قطرها (نق) وارتفاعها (ع) يساوي π نق^{٢}ع.

٧ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٤}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ٢ ، س = ٣ دورة كاملة حول محور السينات.

تمارين عامة

١ ضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كانت $\sigma_{١٠}$ = {أ ، ١ ، ..... ، ١٧ ، ب} تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب]، فما قيمة أ ؟

أ) صفر ب) ١- ج) ٢- د) ٣-

٢ إذا كان ق(س) = ٥ معرفاً في الفترة [١ ، ٢] وكانت $\sigma_{ن}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [١ ، ٢] فما قيمة م($\sigma_{ن}$ ، ق)؟

أ) ٥ ب) ١٠ ج) ٢٠ د) ٥٠

٣ إذا كان ق(س) = ٢س + ١ معرفاً في الفترة [١ ، ٢] وكانت $\sigma_{ن}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [١ ، ٢] فما قيمة $\lim_{ن \to \infty}$ م($\sigma_{ن}$ ، ق)؟

أ) ١ ب) ٢ ج) ٤ د) غير موجودة

٤ إذا كان $\int_{٢}^{٣}$ ق(س) دس = ٦ ، $\int_{٢}^{٧}$ (٤ + ق(س)) دس = ٣٠ ، فما قيمة $\int_{٣}^{٧}$ ٢ق(س)) دس؟

أ) ٨ ب) ١٦ ج) ٦٠ د) ١٢

٥ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على مجاله وكان $\int$ ق(س) دس = قا^{٢}س – ظا^{٢}س + س^{٢} + جـ ،

فما قيمة $\int_{١-}^{٢}$ قَ(س) دس ؟

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) ٦

٦ ما قيمة $\int_{١}^{٢} \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}$ دس؟

أ) $\frac{١}{٦}$ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٢}$ د) ١

٧ إذا كان $\int_{١}^{٢} \frac{س^{٢} + ٢س + ١}{س + ٢}$ دس = أ ، $\int_{١}^{٢} \frac{س + ١}{س + ٢}$ دس = ب ، فما قيمة أ + ب ؟

أ) $\frac{١١}{٢}$ ب) $\frac{٥}{٢}$ ج) ١ د) $\frac{١}{٢}$

٨ إذا كان ق(س) = $\int_{1}^{س} \frac{ص}{ص^٢ + ١}$ دص + $\int_{1}^{٤}$ جا^{٢}س دس فما قيمة قَ(٤) ؟

أ) $\frac{٤}{٥}$ ب) $\frac{٤}{١٧}$ ج) $\frac{٨}{١٧}$ د) $\frac{١٦}{٦٥}$

٩ إذا كان ق(س) كثير حدود بحيث قَ(س) = ٣س − ٢، فما قيمة ق(٣) − ق(⁻١)؟

أ) ٠ ب) ٢ ج) ٤ د) ٨

١٠ إذا كان ق(س) = س لــو$_{هـ}$ س ، فما قيمة $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{هـ}{2}}$ قً(س) دس؟

أ) ⁻١ ب) ٠ ج) ١ د) هـ

أجب عن الأسئلة الآتية :

٢ إذا كانت $\sigma_{١٢}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب]، وكان العنصر السابع فيها يساوي ١٢، والعنصر الرابع فيها يساوي ٧، فما قيم الثابتين أ ، ب ؟

٣ إذا كان ق ، هـ اقترانين معرفين في الفترة [٢ ، ١٠] وكان هـ(س) = ٣ق(س) + س بحيث م($\sigma_{٤}$ ، ق) = ٦، جد م($\sigma_{٤}$ ، هـ) معتبرًا س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر}$ علماً بأن $\sigma_{٤}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [٢ ، ١٠]

٤ استخدم تعريف التكامل المحدود لإيجاد $\int_{1}^{٥}$ ٣س دس

٥ أثبت أن : ٠ ≤ $\int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - س^٢}$ دس ≤ ٨

٦ إذا كان ق(س) متصلاً على مجاله وكان $\int_{٠}^{س}$ ق(ص) دص = س^٢ − $\sqrt{س}$ ، فجد ق(٤) ، قَ(٤).

٧ إذا كان ت(س) = $\begin{cases} ٢س^٢ + ٢جـ س ، & ٢ \le س \le ٣ \\ أس - ب ، & ٣ < س \le ٥ \end{cases}$ ، هو الاقتران المكامل للاقتران المتصل ق(س) في الفترة [٢ ، ٥]. جد:

أ قيم أ ، ب ، جـ ب $\int_{٢}^{٤}$ ق(س) دس

٨ جد التكاملات الآتية:

أ $\int_{1}^{2}$ ٥٦(س − ٢)^2 (س − ١)^5 دس

ب $\int_{هـ}^{هـ^2}$ لـوهـ س دس

جـ $\int_{3}^{5} \frac{س + ٥}{س^2 - س}$ دس

د $\int_{0}^{2} \sqrt{س^4 + س^2}$ دس

هـ $\int_{1}^{2} \frac{1}{س^2 \sqrt{س^2 + 1}}$ دس

٩ إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [١ ، ٥] وكان ق(س) $\le$ هـ(س)

لكل س $\in$ [١ ، ٥]، أثبت أن: $\int_{7}^{3}$ ق(س − ٢) دس $\le$ $\int_{3}^{-1}$ هـ(س + ٢) دس

١٠ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س) فيما يأتي :

أ ق(س) = س + ٢ ، هـ(س) = $\begin{cases} ٤ - س^2 & ، س \le ٠ \\ ٤ - س & ، س > ٠ \end{cases}$

ب ق(س) = ٢جاس ، هـ(س) = ١ في الفترة [٠ ، π]

١١ إذا كان $\int_{1}^{3}$ (جا^{2}س + هـ$^{-س}$) دس = أ ، $\int_{1}^{3}$ (جتا^{2}س) دس = ب ، فجد قيمة أ + ب.

١٢ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{1}{4}$ س^2 والمماس المرسوم له عند النقطة (٤ ، ٤) ومحور السينات.

١٣ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتاس، والمستقيم ص = ٣ − س والمحورين الإحداثيين.

١٤ انطلق جسيم في خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) بحيث تعطى سرعته ع وفق العلاقة:

ع(ن) = $\begin{cases} ٥ن^2 & ، ٠ \le ن \le ٢ \\ ٢٤ - ٢ن & ، ٢ < ن \le ١٢ \end{cases}$ ،

فجد : أ بعد الجسيم عن النقطة (و) عندما ن = ٥ ثوان.

ب متى يتوقف الجسم عن الحركة، وما المسافة المقطوعة عندئذ؟

١٥ إذا كان $\acute{\text{ق}}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$ ، $\text{ق}(\text{س}) \neq ٠$ ، جد:

أ $\int (\text{ق}(\text{س}))^{\text{ن}}$ دس   ب قاعدة الاقتران ق(س)

١٦ إذا كان $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا٢س}}{(\text{س} + ١)}$ دس = أ ، فما قيمة $\int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جتاس}}{(\text{س} + ٢)^{٢}}$ دس بدلالة أ ؟

١٧ إذا كان ك(٣) = ٣ك(١) = ٦ ، فما قيمة $\int_{١}^{٣} \frac{\text{س}\,\acute{\text{ك}}(\text{س}) - \text{ك}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}$ دس ؟

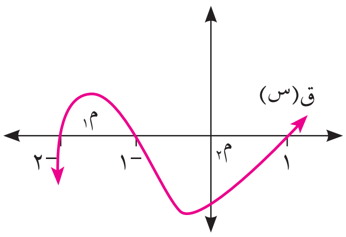
١٨ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى س ص = ٤ + $\text{س}^{٢}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٤ دورة كاملة حول محور السينات.

١٩ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ص}_{١}$ = ظاس ومنحنى $\text{ص}_{٢}$ = قاس والمستقيمين س = $\frac{\pi}{٦}$ ، س = $\frac{\pi}{٣}$ دورة كاملة حول محور السينات.

٢٠ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = $\text{س}^{٣}$ ، هـ(س) = س دورة كاملة حول محور السينات.

٢١ في الشكل المجاور، احسب $\int_{-١}^{٢}$ س ق($\text{س}^{٢}$ − ٣) دس

علماً بأن $\text{م}_{١}$ = ٤ وحدات مربعة ، $\text{م}_{٢}$ = ١٢ وحدة مربعة



٢٢ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
اجد التجزئة ومجموع ريمان لاقترانات محددة			
اوظف العلاقة بين التفاضل والتكامل			
اوظف خواص التكامل المحدود في حل المسائل المنتمية			

الوحدة

٦

الأعداد المركبة

Complex Numbers

طلبت شركة للاتصالات من مكتب للإعلانات تصميم لوحة إعلانية مستطيلة الشكل محيطها ٨م ومساحتها ٨م^{٢}، رفض المكتب ذلك؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الأعداد المركبة في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ التعرف إلى مجموعة الأعداد المركبة.

٢ إيجاد ناتج: الجمع، والطرح، والضرب على الأعداد المركبة.

٣ التعرف إلى خصائص العمليات على الأعداد المركبة.

٤ التعرف إلى مقياس العدد المركب، ومرافقه، وخصائصهما.

٥ إيجاد ناتج قسمة عددين مركبين.

٦ حل المعادلات التربيعية في مجموعة الأعداد المركبة.

٧ تمثيل العدد المركب بيانياً (بنقطة ومتجه).

٨ كتابة العدد المركب بالصورة القطبية.

٩ إيجاد الجذور التربيعية للأعداد المركبة.

٦ – ١ الأعداد المركبة (Complex Numbers)

نشاط ١: أراد أبو محمود شراء قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها (س^{٢} – ٥س + ٨)م^{٢} وأحد أبعادها (س + ٣)م. لم يقبل محمود فكرة أبيه وقال له إن هذه القطعة ليست مستطيلة الشكل، كيف عرف محمود ذلك؟

درست في السنوات السابقة مجموعة الأعداد الطبيعية، ثم الأعداد الصحيحة، إلى أن تعرفت أخيراً إلى مجموعة الأعداد الحقيقية، وقد لاحظت وجود قصور في نظام الأعداد الحقيقية، حيث إننا لا نستطيع إيجاد حلول للمعادلات كافةً باستخدام هذا النظام، وخاصةً المعادلة التربيعية التي مميزها سالب، فمن أجل وجود حلول للمعادلة التربيعية في نظام الأعداد الحقيقية، لا بد أن يكون المميز غير سالب؛ لأن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف في هذا النظام.

في القرن السادس عشر قام العالم كاردانو (Gerolamo Cardano) بتعريف نظام جديد في محاولته لإيجاد حلول للمعادلة التربيعية بشكل عام، فقام بتعريف عدد جديد هو ت = $\sqrt{-١}$ ثم قام بتعريف نظام جديد للأعداد أسماه الأعداد المركبة (ك) والتي لها تطبيقات مهمة في مختلف العلوم، مثل: الهندسة، والفيزياء وغيرها...

نشاط ٢: لإيجاد مجموعة حل المعادلة س^{٣} + س = ٠ في ك ، فإننا نضع

س^{٣} + س = ٠ ومنها س(س^{٢} + ١) = ٠ وينتج أن: س = ٠، (س^{٢} + ١) = ٠

فتكون: س^{٢} = ...، س = ± ..... ومنها س = ±ت

مجموعة الحل = {٠ ، ..... ، .....}

تعريف:

١ العدد المركب هو مقدار جبري على الشكل ع = س + ص ت حيث س ، ص ∈ ح، ت = $\sqrt{-١}$

ويسمى س الجزء الحقيقي للعدد المركب، ويسمى ص الجزء التخيلي له.

٢ مجموعة الأعداد المركبة = {س + ص ت، س ، ص ∈ ح، ت = $\sqrt{-١}$ } ،

ويرمز لها بالرمز ك.

مثال ١ : جد الجزء الحقيقي، والجزء التخيلي لكل من:

١ ع = ٤ − ت

٢ ع = $\frac{ت + \sqrt{٢}}{٢}$

الحل : ١ الجزء الحقيقي للعدد ع = ٤ − ت هو ٤ ، بينما الجزء التخيلي هو ⁻١

٢ الجزء الحقيقي للعدد ع = $\frac{ت + \sqrt{٢}}{٢}$ هو $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

بينما الجزء التخيلي هو $\frac{١}{٢}$

ملاحظة:

يكون العدد المركب ع = س + ص ت

- عدداً حقيقياً إذا كانت ص = ٠
- عدداً تخيلياً إذا كانت س = ٠
- صفراً إذا كانت ص = ٠ ، س = ٠

نشاط ٣: أكمل بناء الجدول الآتي:

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$\frac{١}{٢}$		٠
٢ت		
$\frac{٢ - ٣ت}{٢}$	١	
$\sqrt{-١٢}$		
٣ + $ت^{٧}$	٣	

نشاط ٤: أوجد كل من أشرف وخالد قيمة المقدار $\sqrt{-٤} \times \sqrt{-٩}$

كانت إجابة أشرف كما يلي:

$\sqrt{-٤} \times \sqrt{-٩}$

$= \sqrt{-٤ \times -٩}$

$= \sqrt{٣٦}$

$= ٦$

أما إجابة خالد فكانت كما يلي:

$\sqrt{-٤} \times \sqrt{-٩}$

$= \sqrt{٤ \times -١} \times \sqrt{٩ \times -١}$

$= \sqrt{٤} \times \sqrt{-١} \times \sqrt{٩} \times \sqrt{-١}$

$= ٢ت \times ٣ت = ٦ت^{٢} = -٦$

أيهما كانت إجابته صحيحة؟ ولماذا؟

فكّر وناقش:

إذا كان س ، ص $\in$ ح فإن $\sqrt{س} \times \sqrt{ص} \neq \sqrt{س \times ص}$ دائماً. ولماذا؟

تعلم من التعريف أن $ت = \sqrt{-١}$ ومنها $ت^{٢} = ت \times ت = \sqrt{-١} \times \sqrt{-١} = (\sqrt{-١})^{٢} = -١$

وكذلك فإن $(ت)^{٣} = -ت$ ، $ت^{٤} = ١$ .... (لماذا؟)

وبشكل عام إذا كانت ن $\in$ ص$^{+}$ فإن $ت^{ن} = ت^{م}$ حيث م هي باقي قسمة ن على ٤ ، $٠ \leq م < ٤$

مثال ٢ : جد قيمة : ① $ت^{٩٩}$ ② $\frac{١}{ت^{٢٢}}$ ③ $ت^{-٤ن+٢}$

الحل :

١ لاحظ أن باقي قسمة ٩٩ على ٤ يساوي ٣، ومنها فإن $ت^{٩٩} = ت^{٣} = -ت$

٢ $\frac{١}{ت^{٢٢}} = \frac{١}{ت^{٢}} = -١$ (لماذا؟)

٣ $ت^{-٤ن+٢} = ت^{-٤ن} \times ت^{٢} = (ت^{٤})^{-ن} \times -١ = -١$

مثال ٣: جد قيمة $١ + ت + ت^{٢} + ت^{٣}$

الحل : بالتبسيط والاختصار فإن:

$١ + ت + ت^{٢} + ت^{٣} = ١ + ت + {}^{-}١ + {}^{-}ت = ٠$

طريقة أخرى: باستخدام التحليل للعوامل:

$(١ + ت + ت^{٢} + ت^{٣}) = (١ + ت) + ت^{٢}(١ + ت)$

$= (١ + ت)(١ + ت^{٢}) = ٠$ (لماذا؟)

تمارين ٦ - ١

١ اكتب ما يلي على الصورة س + ص ت:

أ $٢ + \sqrt{{}^{-}٢}$ ب $\sqrt{{}^{-}٣٢} + \sqrt{{}^{-}٢}$ جـ $\sqrt{{}^{-}٨} \times \sqrt{{}^{-}٢}$

٢ حدد الجزء الحقيقي، والجزء التخيلي لكل مما يأتي:

أ $\frac{٢}{٥}ت - ٣$ ب $\sqrt{{}^{-}٩}$ جـ $١ - \sqrt{{}^{-}١}$

د $\sqrt{٩ \times {}^{-}٤}$ هـ ${}^{-}٢ت$ و $\frac{١}{٣}$

٣ بيّن أن: $(١ + ت + ت^{٢})^{٣}(١ - ت + ت^{٢})^{٣} = ١$

٤ اكتب كلاً مما يأتي بأبسط صورة:

أ $ت^{٤٣}$ ب $\frac{١}{ت^{٦٥}}$ جـ $ت^{٢٧} + \frac{١}{ت^{٢٧}}$

٥ أثبت أن: $\frac{١ + ٢ت^{٢} + ت^{٣} + ٢ت}{ت^{٣} + ت^{٤}} = {}^{-}١$

٦ - ٢ العمليات على الأعداد المركبة (Operations on Complex Numbers)

نشاط ١: يستخدم الفيزيائيون الأعداد المركبة في الدارات الكهربائية ذات التيار المتردد لحساب الجهد

حيث أن: فرق الجهد يعرف بالقانون جـ = م ش

حيث م: المقاومة، ش: شدة التيار

ولإيجاد فرق الجهد في دارة كهربائية ذات تيار متردد عندما تكون:

شدة التيار = ٣ أمبير، المقاومة = ٧ أوم، فإن جـ = م ش = ٧ × ٣ = ٢١ فولت

والآن إذا كانت شدة التيار = ٢ + ٢ت أمبير، المقاومة = ٩ − ٣ت أوم.

فإن جـ = م ش = (٩ − ٣ت) × (٢ + ٢ت) = ... أكمل

بما أن العدد المركب هو مقدار جبري يُكتب على الصورة س + ص ت فإنه يمكن تعريف الجمع والضرب على الأعداد المركبة، من خلال عملية جمع وضرب مقدارين جبريين، ويكون لهما نفس خصائص عمليتي الجمع والضرب للمقادير الجبرية، مع مراعاة خصائص قوى ت.

تساوي عددين مركبين:

تعريف:

يتساوى العددان المركبان $ع_١ = س_١ + ص_١ت$ ، $ع_٢ = س_٢ + ص_٢ت$ إذا وفقط إذا كان لهما الجزء الحقيقي نفسه، والجزء التخيلي نفسه، أي أن $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$

مثال ١: إذا كان ٢س + ٣ت = (ص + س) + ص ت، جد كلاً من س ، ص في ح

الحل: بما أن العددين متساويان، فإن: ٢س = س + ص .... (١)

٣ = ص .... (٢)

بالتعويض في (١) ينتج أن: س = ٣

جمع الأعداد المركبة، وطرحها:

تعريف:

إذا كان $ع_١ = س_١ + ص_١ت$، $ع_٢ = س_٢ + ص_٢ت$

فإن $ع_١ \pm ع_٢ = (س_١ \pm س_٢) + (ص_١ \pm ص_٢)$ ت

مثال ٢ : جد ناتج (٢ − ٣ت) + (٣ − ٤ت)

الحل : (٢ − ٣ت) + (٣ − ٤ت) = (٢ + ٣) + ت(−٣ − ٤)

= ٥ − ٧ت

مثال ٣ : إذا كان $ع_١$ = ٣ − ت ، $ع_٢$ = ١ + ٢ت ، $ع_٣$ = −٥ت ، جد:

١ $(ع_١ - ع_٢)$

٢ $(ع_١ + ع_٢) - ع_٣$

الحل :

١ $ع_١ - ع_٢$ = (٣ − ت) − (١ + ٢ت) = (٣ − ١) + (−١ − ٢) ت = ٢ − ٣ت

٢ $(ع_١ + ع_٢) - ع_٣$ = ((٣ − ت) + (١ + ٢ت)) − (−٥ت)

= ٤ + ٦ت

خصائص عملية الجمع على الأعداد المركبة:

١ عملية الجمع عملية مغلقة: أي أنه $\forall ع_١، ع_٢ \in ك$ فإن $ع_١ + ع_٢ \in ك$

٢ عملية الجمع عملية تجميعية:

أي أنه $\forall ع_١، ع_٢، ع_٣ \in ك$ فإن $(ع_١ + ع_٢) + ع_٣ = ع_١ + (ع_٢ + ع_٣)$

٣ العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع على الأعداد المركبة هو الصفر

حيث $\forall ع \in ك$ ، $٠ + ع = ع + ٠ = ع$

٤ لكل عنصر نظير جمعي: إذا كان $ع \in ك$ فإن $-ع \in ك$

ويكون $ع + (-ع) = (-ع) + ع = ٠$ ويسمى $-ع$ النظير الجمعي للعدد ع.

٥ عملية الجمع عملية تبديلية: $\forall ع_١، ع_٢ \in ك$ ، $ع_١ + ع_٢ = ع_٢ + ع_١$

ضرب الأعداد المركبة:

تعريف:

إذا كان ع$_{١}$ = س$_{١}$ + ص$_{١}$ت ، ع$_{٢}$ = س$_{٢}$ + ص$_{٢}$ت ، س$_{١}$ ، س$_{٢}$، ص$_{١}$، ص$_{٢}$ ∈ ح

فإن ع$_{١}$ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ س$_{٢}$ − ص$_{١}$ ص$_{٢}$) + (س$_{١}$ ص$_{٢}$ + س$_{٢}$ ص$_{١}$)ت

نتيجة:

إذا كانت جـ ∈ ح فإن جـ (س + ص ت) = جـ س + جـ ص ت

مثال ٤ : جد ناتج: ١ (٣ + ت)(٢ − ٥ت)   ٢ ت(ت + ٥)(٣ − ت^{٥})

الحل :

١ (٣ + ت)(٢ − ٥ت)

= (٣ × ٢ − ١ × ⁻٥) + (٣ × ⁻٥ + ١ × ٢)ت

= ١١ − ١٣ت   (من تعريف عملية الضرب)

٢ ت(ت + ٥)(٣ − ت^{٥})

= (⁻١ + ٥ت)(٣ − ت)

= ٢ + ١٦ت   (لماذا؟)

مثال ٥ : ليكن ع$_{١}$ = ٣ + ٥ت، ع$_{٢}$ = ٦ − ٥ت فجد قيمة كل مما يأتي:

١ ٥ع$_{١}$ ٢ ٣ع$_{٢}$ + ٥ع$_{١}$ − ٢ت

٣ م حيث ٤ − تع$_{١}$ = م(ت − ٣)، م ∈ ح

الحل :

١ ٥ع$_{١}$ = ٥(٣ + ٥ت)

= ١٥ + ٢٥ت

٢ ٣ع$_{٢}$ + ٥ع$_{١}$ − ٢ت

= ٣(٦ − ٥ت) + ٥(٣ + ٥ت) − ٢ت

= ٣٣ + ٨ت

٣ ٤ − ت $ع_1$ = ٤ − ت(٣ + ٥ت)

= ٤ − ٣ت − ٥$ت^2$

= ٩ − ٣ت = م(ت − ٣)

أي أن ٩ − ٣ت = −٣م + م ت

ومنها م = −٣

خصائص عملية الضرب على الأعداد المركبة:

١ عملية الضرب مغلقة: $\forall$ $ع_1$، $ع_2$ $\in$ ك ، $ع_1$ × $ع_2$ $\in$ ك

٢ عملية الضرب تجميعية: $\forall$ $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$ $\in$ ك ، ($ع_1$ × $ع_2$) × $ع_3$ = $ع_1$ × ($ع_2$ × $ع_3$)

٣ العنصر المحايد لعملية الضرب هو العدد ١ ، حيث $\forall$ ع $\in$ ك
يكون ١ × ع = ع × ١ = ع

٤ النظير الضربي: $\forall$ ع $\in$ ك، ع $\neq$ ٠ يوجد $\frac{١}{ع}$ $\in$ ك بحيث $\frac{١}{ع}$ × ع = ع × $\frac{١}{ع}$ = ١
ويسمى $\frac{١}{ع}$ النظير الضربي للعدد ع ونرمز له بالرمز $ع^{-1}$

٥ عملية الضرب تبديلية: $\forall$ $ع_1$، $ع_2$ $\in$ ك ، $ع_1$ × $ع_2$ = $ع_2$ × $ع_1$

نشاط ٢: لإيجاد النظير الضربي $ع^{-1}$ للعدد المركب ع = ٣ + ٤ت باستخدام التعريف

نفرض $ع^{-1}$ = س + ص ت فيكون $ع^{-1}$ × ع = ١

أي أن (س + ص ت)(٣ + ٤ت) = ١

ومنها ٣س − ٤ص = ١ ، ٤س + ٣ص = ...

وبحل المعادلتين، ينتج أن س = ... ص = ...،

ومنها النظير الضربي $ع^{-1}$ = ...

ملاحظة:

النظير الضربي للعدد المركب (س + ص ت) هو $\frac{س}{س^2 + ص^2}$ + $\frac{-ص}{س^2 + ص^2}$ ت

مثال ٦ : جد النظير الضربي للعدد ع = ١ + ٢$\sqrt{٢}$ ت

الحل : باستخدام القاعدة السابقة، حيث س = ١ ، ص = ٢$\sqrt{٢}$ ، وينتج أن:

$$ع^{-١} = \frac{س}{س^٢ + ص^٢} + \frac{-ص}{س^٢ + ص^٢} ت$$

$$= \frac{١}{٩} - \frac{٢\sqrt{٢}}{٩} ت$$ (تحقق من ذلك)

تمارين ٦ - ٢

١ اكتب كلاً مما يأتي على الصورة أ + ب ت

أ ٤(٢ + ٤ت) + ٥(٣ – ٢ت)

ب (٣ + ٤ت)(٣ – ٥ت)

جـ $(٣ + ٤ت)^٣$

د ٤ت$(١ – ٥ت)^٢$

هـ $(١ – ت)^٦$

٢ إذا كانت س = أ + ب ت ، فما قيم س التي تحقق المعادلة س + ٢س ت = $^-$٥(س – ٤ت)؟

٣ جد قيم س ، ص ∈ ح والتي تحقق المعادلة س – ص – ٢ = ص^٢ ت – س ت

٤ بيّن أن: ع = ت تحقق المعادلة $ع^٥ + ع^٢ = ع – ١$

٥ بيّن أن: ع = $^-$١ + ت تحقق المعادلة $ع^٢ + ٢ع + ٢ = ٠$

٦ إذا كان $\frac{ت}{ت + ٣} = \frac{١ + ٣ت}{أ}$ ، جد قيمة الثابت أ حيث أ ∈ ح.

٧ جد $ع^{-١}$ لكل مما يأتي، واكتبه على الصورة أ + ب ت:

أ ٢ + $\sqrt{١٢}$ ت

ب $\frac{ت}{ت - ٣}$

جـ $(١ + ت)^{١٣}$

٨ حِل النظام الآتي:

$ع_١ + ٣ع_٢ = -\sqrt{٨}$ ت

$٢ع_١ - ٣ع_٢ = \sqrt{٥٠}$ ت حيث $ع_١، ع_٢$ ∈ ك

نشاط ١: رسم محمد لوحة مستطيلة الشكل مستخدماً الألوان الزيتية أبعادها (٢٨ + ١٤$\sqrt{٥}$) سم، $\frac{١٤}{\sqrt{٥} - ٢}$ سم . وعندما رآها معلم الرياضيات قال إنها مربعة الشكل. ما رأيك؟

نشاط ٢: لإنطاق المقام للمقدار $\frac{١}{١ - \sqrt{٢}}$

نعلم أن مرافق العدد ١ − $\sqrt{٢}$ هو ١ + $\sqrt{٢}$

نضرب كلاً من البسط والمقام بمرافق المقام

أي أن $\frac{١}{١ - \sqrt{٢}} = \frac{١}{١ - \sqrt{٢}} \times \frac{١ + \sqrt{٢}}{١ + \sqrt{٢}} =$ .... (أكمل)

تعتبر عملية القسمة في الأعداد المركبة مشابهة إلى حد كبير لعملية إنطاق المقام،

وذلك بكتابة $\frac{ع_١}{ع_٢}$ على الصورة ع = س + ص ت

تعريف:

إذا كان ع = س + ص ت

١ نسمي المقدار $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ مقياس العدد المركب ع ويرمز له |ع|

أي أن: |ع| = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

٢ ونسمي العدد س − ص ت مرافق (conjugate) العدد المركب ع = س + ص ت

ويرمز له $\overline{ع}$ أي أن: $\overline{ع}$ = س − ص ت

مثال ١ : إذا كان ع = ٣ + ٤ت ، جد: ١ $\overline{ع}$ ٢ |ع| ٣ |$\overline{ع}$|

الحل :

١ $\overline{ع}$ = ٣ − ٤ت

٢ |ع| = |٣ + ٤ت| = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥

٣ |$\overline{ع}$| = |٣ − ٤ت| = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥ ماذا تلاحظ؟

نشاط ٣: إذا كان $\text{ع}_1 = ٢ + \text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = ١ - ٣\text{ت}$ فإن:

1. $|\text{ع}_1| = \sqrt{٥}$
2. $|\text{ع}_2| = ...$
3. $|\text{ع}_1\text{ع}_2| = ...$ ماذا تلاحظ؟
4. $|-٢\text{ع}_1| = ٢\sqrt{٥}$
5. $-٢|\text{ع}_1| = ...$ ماذا تلاحظ؟

نشاط ٤: أكمل ما يأتي:

1. $\overline{١ + \text{ت}} = ...$
2. $\overline{١ - \text{ت}} = ١ + \text{ت}$
3. $\overline{٥} = ٥$
4. $\overline{-٣} = ...$
5. $\overline{\text{ت}} = ...$
6. $\overline{٢\text{ت} + \sqrt{٢}\,\text{ت}} = ...$

خصائص المقياس، والعدد المرافق:

إذا كان $\text{ع} \in \text{ك}$ فإن:

1. $(\overline{\overline{\text{ع}}}) = \text{ع}$
2. $\text{ع}\,\overline{\text{ع}} = \overline{\text{ع}}\,\text{ع} = |\text{ع}|^٢$
3. $|\text{ع}| = |\overline{\text{ع}}|$
4. $|\text{جـ ع}| = |\text{جـ}|\,|\text{ع}|$ ، $\text{جـ} \in \text{ح}$
5. إذا كان $\text{ع} = \text{أ} + \text{ب ت}$ فإن $\text{ع} + \overline{\text{ع}} = ٢\text{أ}$ ، $\text{ع} - \overline{\text{ع}} = ٢\text{ب ت}$
6. إذا كان $\text{ع}_1، \text{ع}_2 \in \text{ك}$ ، فإن $|\text{ع}_1\text{ع}_2| = |\text{ع}_1|\,|\text{ع}_2|$
7. إذا كان $\text{ع}_1، \text{ع}_2 \in \text{ك}$ ، $\text{ع}_2 \neq ٠$ فإن $\left|\dfrac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}\right| = \dfrac{|\text{ع}_1|}{|\text{ع}_2|}$

نشاط ٥: أكمل الجدول الآتي:

العدد المركب ع	المرافق $\overline{\text{ع}}$	المقياس $\lvert\text{ع}\rvert$	النظير الضربي ع^{-1}
٢ + ت		$\sqrt{\text{٥}}$	
$\sqrt{\text{٣}}$ − ت	$\sqrt{\text{٣}}$ + ت		
٢ت			$\frac{\text{١}^-}{\text{٢}}$ ت

تعريف:

إذا كان ع_1، $\text{ع}_2 \in$ ك، $\text{ع}_2 \neq$ ٠ فإن $\text{ع}_1 \div \text{ع}_2 = \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{\text{ع}_1\,\overline{\text{ع}_2}}{\text{ع}_2\,\overline{\text{ع}_2}} = \frac{\text{ع}_1\,\overline{\text{ع}_2}}{\lvert\text{ع}_2\rvert^2}$

ملاحظة:

إذا كان ع ≠ ٠ فإن $\text{ع}^{-1} = \frac{\text{١}}{\text{ع}} = \frac{\overline{\text{ع}}}{\text{ع}\,\overline{\text{ع}}} = \frac{\overline{\text{ع}}}{\lvert\text{ع}\rvert^2}$

مثال ٢ : اكتب المقدار $\frac{\text{٢ − ٣ت}}{\text{٣ + ٤ت}}$ على الصورة س + ص ت:

١ باستخدام الضرب بالمرافق ٢ باستخدام النظير الضربي

الحل :

١ باستخدام الضرب بالمرافق:

$\frac{\text{٢ − ٣ت}}{\text{٣ + ٤ت}} = \frac{\text{(٢ − ٣ت) (٣ − ٤ت)}}{\text{(٣ + ٤ت) (٣ − ٤ت)}} = \frac{\text{(٦ − ٨ت − ٩ت − ١٢)}}{\text{(٩ + ١٦)}}$

$= \frac{\text{٦}^- \text{ − ١٧ت}}{\text{٢٥}} = \frac{\text{٦}^-}{\text{٢٥}} + \frac{\text{١٧}^-}{\text{٢٥}}$ ت

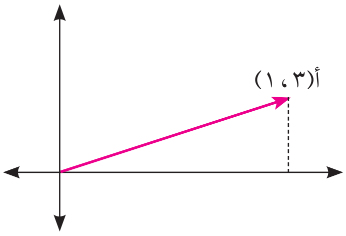
٢ باستخدام النظير الضربي:

النظير الضربي للعدد ٣ + ٤ت هو $\frac{\text{٣}}{\text{٢٥}} - \frac{\text{٤}}{\text{٢٥}}$ ت

إذن: $\frac{\text{٢ − ٣ت}}{\text{٣ + ٤ت}} = \text{(٢ − ٣ت)}\left(\frac{\text{٣}}{\text{٢٥}} - \frac{\text{٤}}{\text{٢٥}}\text{ت}\right)$

$= \frac{\text{٦}^-}{\text{٢٥}} + \frac{\text{١٧}^-}{\text{٢٥}}$ ت (ماذا تلاحظ؟)

أولاً: التمثيل البياني للأعداد المركبة:



يمكن تمثيل العدد المركب ع = س + ص ت بيانياً في المستوى الديكارتي بالنقطة، أ (س ، ص)*، فالعدد المركب ٣ + ت يمثل بالنقطة أ(٣ ، ١) في المستوى كما في الشكل المجاور.

يسمى هذا المستوى الإحداثي بالمستوى المركب (مستوى أرجاند).

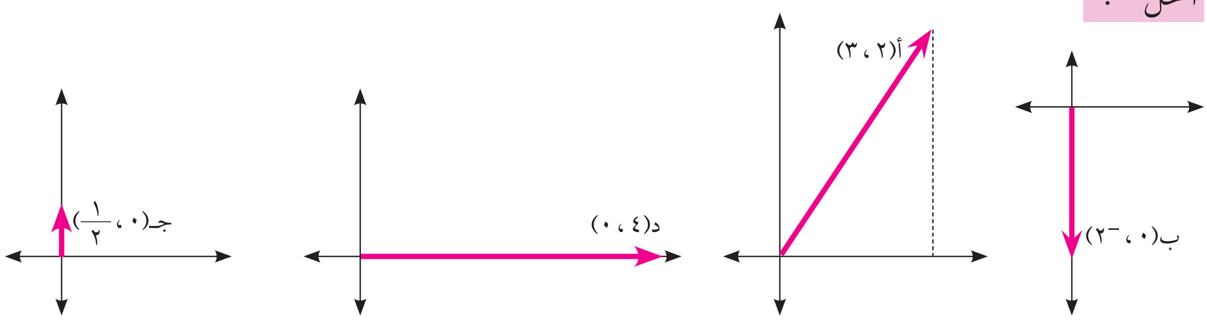
فكّر وناقش:

ماذا يمثل كل من المحور الأفقي والمحور الرأسي في المستوى المركب؟

مثال ٣ : مثّل بيانياً كلاً من الأعداد الآتية في المستوى المركب:

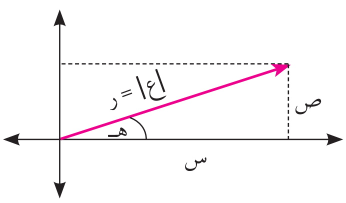
−٢ت ، ٢ + ٣ت ، ٤ ، $\sqrt{-\frac{١}{٤}}$

الحل :



ثانياً: التمثيل القطبي للأعداد المركبة (Complex Plane and Polar Representation)

كما أشرنا أعلاه، بأنه يمكن تمثيل العدد المركب ع = س + ص ت بيانياً في مستوى الأعداد المركبة بالنقطة، أو الزوج المرتب (س ، ص) وتتذكر أيضاً أن كل زوج مرتب، يمكن تمثيله بمتجه قياسي بدايته النقطة (٠،٠) ونهايته النقطة (س ، ص) ويصنع زاوية هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (المحور الأفقي) وتسمى هـ السعة الأساسية للعدد المركب،



* يعتبر الزوج المرتب في الأعداد المركبة متجهاً قياسياً.

حيث ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، ٠ ≤ هـ < ٢ π كما في الشكل ويكون طول المتجه = ر ، ويساوي مقياس العدد المركب ع = س + ص ت حيث ر = |ع| = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$.

نلاحظ من الشكل أعلاه أن س = رجتاهـ ، ص = رجاهـ وبذلك فإن العدد ع = س + ص ت يمكن كتابته على الصورة ع = ر(جتاهـ + ت جاهـ) ويسمى هذا التمثيل بالتمثيل القطبي للعدد المركب.

تعريف:

الصورة القطبية للعدد المركب ع = س + ص ت ، ع ≠ ٠ هو ع = ر(جتاهـ + ت جاهـ)

حيث ر = |ع| = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$ ، ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

مثال ٤ : اكتب العدد ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت بالصورة القطبية.

الحل : ر = |ع| = $\sqrt{١^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢}}$ = ٢ ، جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ،

جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ = $\frac{١}{٢}$ ومنها هـ = $\frac{\pi}{٣}$

الصورة القطبية للعدد ع = ٢(جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$)

مثال ٥ : حوّل العدد المركب ع = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$) إلى الصورة أ + ب ت

الحل : ع = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

= $\sqrt{٢}$ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{\text{ت}}{\sqrt{٢}}$) = ١ + ت

نشاط ٦: إذا كان ع = ٤ − ٣ت ، فإن $\overline{\text{ع}}$ = ...

مثّل كلاً من ع ، $\overline{\text{ع}}$ هندسياً في المستوى المركب، ماذا تلاحظ؟

تمارين ٦ - ٣

١ جد $|\text{١} + \sqrt{\text{-٤}}\,|$

٢ إذا كان $\text{ع}_{\text{١}} = \text{١} + \text{ت}$ ، $\text{ع}_{\text{٢}} = \text{١} - \text{ت}$ ، جد ما يلي:

أ $|\text{-٣ع}_{\text{١}}|$ ب $|\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ع}_{\text{١}}\,\overline{\text{ع}}_{\text{١}}|$ جـ $\left|\frac{\text{ع}_{\text{٢}}}{\text{ع}_{\text{١}}}\right|$ د $|\text{٢ع}_{\text{١}}\text{ع}_{\text{٢}}|$

٣ إذا كان $\text{ع} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}} + \frac{\text{-٤}}{\text{٥}}\,\text{ت}$ ، جد:

أ $(\text{ع})^{\text{-١}}$ ب $(\text{٣ع})^{\text{-١}}$ جـ $|(\text{ع})^{\text{-١}}|$ د $\left|\frac{\overline{\text{ع}}}{\text{٥}}\right|$

٤ اكتب المقادير الآتية على صورة أ + ب ت:

أ $\frac{\text{-١} + \sqrt{\text{٢}}\,\text{ت}}{\text{٢} + \text{ت}}$ ب $\frac{\text{٣} + \text{٤ت}}{\text{٣} - \text{٥ت}} + \frac{\text{٢} + \text{٣ت}}{\text{٢} - \text{٣ت}}$

٥ أثبت أن: $|\text{ع} - \text{١}| = |\overline{\text{ع}} - \text{١}|$ حيث ع $\in$ ك

٦ مثّل الأعداد الآتية في المستوى المركب:

أ $\text{ت}^{\text{٣٥}}$ ب $\text{٢} + \sqrt{\text{-٢}}$ جـ $\sqrt{\text{-٤}} + \sqrt{\text{-٩}}$ د $\frac{\text{١}}{\text{ت}^{\text{٥٢}}}$

٧ إذا كان $\text{ع}^{\text{٢}} = (\overline{\text{ع}})^{\text{٢}}$ فأثبت أن ع إمّا أن تكون عدداً حقيقياً، أو أنها عدد تخيلي.

٨ اكتب ما يأتي على الصورة القطبية ع = ر(جتاهـ + ت جاهـ):

أ $\text{ع} = \text{-١} + \text{ت}$ ب $\text{ع} = \frac{\text{-١}}{\text{٢}}$ جـ $\text{ع} = \frac{\text{-١} + \sqrt{\text{٣}}\,\text{ت}}{\text{٢}}$

٩ اكتب ما يأتي على الصورة أ + ب ت:

أ $\text{ع} = \text{٧}(\text{جتا}\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}} + \text{ت جا}\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}})$ ب $\text{ع} = \text{٣}(\text{جتا}\frac{\pi}{\text{٦}} + \text{ت جا}\frac{\pi}{\text{٦}})$

جـ $\text{ع} = \text{٢}(\text{جتا}\frac{\pi}{\text{٤}} - \text{ت جا}\frac{\pi}{\text{٤}})$ د $|\text{ع}| = \text{٣}$ ، $\text{هـ} = \frac{\pi}{\text{٣}}$

تمارين عامة

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١ ما قيمة $(ت)^{٥٧}$؟

أ) ١ ب) -١ ج) ت د) $-$ت

٢ ما قيمة $(\sqrt{٢} - ت) - ت\,(١ - \sqrt{٢}\,ت)$ ؟

أ) -٢ ب) ٢ت ج) -٢ت د) ت

٣ ما قيمة $\frac{٤ + ت}{٢ - ٣ت}$ ؟

أ) $\frac{٥ - ١٤ت}{١٣}$ ب) $\frac{-٥ - ١٤ت}{٣}$ ج) $\frac{-٥ - ١٤ت}{٥}$ د) $\frac{٥ + ١٤ت}{١٣}$

٤ ما قيمة $\frac{١ + ٢ت}{٣ - ٤ت} + \frac{٢ - ت}{٥ت}$ ؟

أ) $\frac{-٢}{٥}$ ب) $\frac{-٢ت}{٥}$ ج) $\frac{-٢ - ٢ت}{٥}$ د) $\frac{٢}{٥}$

٥ ما قيمة $\overline{\bar{ع} + ت}$ ؟

أ) ع + ت ب) ع $-$ ت ج) $\bar{ع}$ + ت د) $\bar{ع}$ $-$ ت

٦ ما الصورة القطبية للعدد ع = ٢ + ٢ت ؟

أ) $٢\sqrt{٢}\,(جتا\,\frac{\pi}{٤} - ت\,جا\,\frac{\pi}{٤})$ ب) $٢\sqrt{٢}\,(جتا\,\frac{\pi}{٤} + ت\,جا\,\frac{\pi}{٤})$

ج) $٢\sqrt{٢}\,(-جتا\,\frac{\pi}{٤} - ت\,جا\,\frac{\pi}{٤})$ د) $٢\sqrt{٢}\,(-جتا\,\frac{\pi}{٤} + ت\,جا\,\frac{\pi}{٤})$

٧ ما سعة العدد المركب $(٢ + ٢ت)^{٢}$ ؟

أ) ٠ ب) $\frac{\pi}{٣}$ ج) $\frac{\pi}{٤}$ د) $\frac{\pi}{٢}$

٢ إذا كان $ع_١ = ١ + ٢ت$ ، $ع_٢ = ٢ - ت$ ، جد ناتج ما يلي:

أ $|ع_١|$ ب $|ع_٢|$ جـ $|ع_١ + ع_٢|$ د $|ع_١| + |ع_٢|$ (ماذا تلاحظ؟)

٣ جد س ، ص ∈ ح بحيث $س^٢ + س + (ص - ١)ت = {}^-س^٢ ت$

٤ إذا كان $ل = \frac{٥(٣ - ت)}{٣ + ت}$ ، $م = \frac{١١ت - ٢}{١ + ٢ت}$

أ بيّن أن: ل ، م مترافقان.

ب احسب ل + م ، ل م ، ثم جد قيمة $ل^٢ + م^٢$

٥ احسب قيمة $\left(\frac{\sqrt{٣} - ت}{١ + \sqrt{٣}\,ت}\right)^٧$

٦ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
اجري عمليات حسابية على الاعداد المركبة			
احل المعادلات واجد الجذور للاعداد المركبة			
اتحرى دقة ومعقولية الحل			

إجابات تمارين الكتاب

تمارين ١ - ١

١ أ $\frac{٧٨}{٥}$ ب $\frac{١٧}{٤}$

٢ $\frac{٤}{\pi}$ ٣ أ = ٤ ٤ ١٦ ٥ ١

٦ ب = ٢ ٨ أ ١ + هـ^٢ − هـ ب −٢

تمارين ١ - ٢

١ أ ٧ ب ٤٣١ جـ −٢٠

٢ أ ٩ ب −٢

٣ $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$ ٥ −١٦

٦ أولاً: أ قَ(٠) = ٠

ب هـَ(٠) غير موجودة

جـ $(ق \times هـ)(س) = \begin{cases} -س^٢ & ، \quad \frac{-١}{٢} \leq س < ٠ \\ ٠ & ، \quad ٠ \leq س < \frac{١}{٢} \end{cases}$

د $(ق \times هـ)'(٠) = ٠$

ثانياً: نستنتج أنه لا يمكن الحكم على وجود أو عدم وجود المشتقة لذلك نعود إلى إيجاد قاعدة الاقتران الأصلي ثم نحدد قيمة المشتقة وهذا لا يتناقض مع القاعدة المذكورة .

٧ أ = −٥ ٨ أ = ٢٤

تمارين ١ - ٣

١ أ −٢جاس − ٢قا^{٢}س ب $\frac{-٢قاس ظاس}{(١ + قاس)^٢}$

جـ $\frac{(١ + س قتاس)}{(قتاس + ظتاس)}$ د س قاس(٢ + س ظاس)

٤ س = π ، س = $^-\pi$

تمارين ١ - ٤

١ أ ٠ ب ٤ جـ $\frac{١}{٦}$

٢ أ $-$جاس $هـ^{س}$ + $هـ^{س}$ جتاس ب $\frac{١}{٢س}$ جـ $\frac{-٥}{٢س}$ د ٢ $هـ^{٢س}$

٣ أ ٢ ب ١ ٤ س = ١ ٦ ٣ ٧ ١٠

تمارين ١ - ٥

١ (٢ ، ١) ٢ ص = $-$٤س + π + ٢ ٣ ١ وحدة مساحة

٤ أ أ = ٣٢ ، ٨

٥ $-$٢٠م/ث

٦ أ أقصى ارتفاع = ٤٥م ب السرعة = $-$١٠ م/ث

تمارين ١ - ٦

١ أ $\frac{-١}{٩}$ ب $-$٢ جـ $\frac{-٥}{٢}$ د $-\pi$ هـ ٠

٢ $\frac{١}{هـ}$ $-$ ١ ٣ أ (٢س + ١)$هـ^{س^٢+س}$ ب $\frac{٣س^٢ - ٦س}{س^٣ - ٣س^٢}$

٤ قَ(١) = ٤ ٥ $-$٣٠

٦ ١٤ ٨ أ $قا^٢$ ٢س ب $\frac{-٦}{٥}$

تمارين ١ - ٧

١ أ $\frac{-٣س^٢ - ص}{س + ٤ص}$ ب $\frac{-٢}{٥}$ س$(١ - س^٢)^{\frac{-٤}{٥}}$

جـ جتا(س + ص) × $\frac{١}{١ - جتا(س + ص)}$ د $\frac{-ص^٢}{س^٢}$

٢ ص = $\frac{-١}{٣}$ س + ٦ ، ص = $\frac{١}{٣}$ س + ٥

٣ أ = ٣ ٥ $(\frac{-١}{٢} ، \sqrt{٣})$ ، $(\frac{-١}{٢} ، -\sqrt{٣})$

٦ صَ = $-$١ ٧ صَ = هـ

تمارين عامة: الوحدة الأولى

١

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
رمز الاجابة	د	ب	ج	د	ج	د	د	ج	أ	ب	ب	د

الأسئلة المقالية:

٢ -٣٦ ٣ ١ ٤ -٢ ٥ أ ٤ ب $\frac{-١}{٢}$ جـ $\frac{١}{٢}$ د $\frac{١}{٢}$

٦ ٥ ٧ ٩ ٨ ٢٥ م/ ث ٩ أ = ±٢

١٠ $ق'(س) = \begin{cases} ٢س & ، ٠ < س < ١ \\ ٢س & ، ١ < س < ٢ \\ \frac{-٢}{(س + ١)^٢} & ، س > ٢ \end{cases}$ عند س = ٠ ، ١ ، ٢ غير موجودة .

١٢ ٠ ١٣ أ س = ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ب $\frac{\pi}{٣}$

١٤ أ $\frac{(هـ^{٦س} + ٦س هـ^{٦س}) جاس - س هـ^{٦س} جتاس}{جا^٢س}$

ب $\frac{(١ + لـو_{هـ}س) جتاس + س جاس لـو_{هـ}س}{جتا^٢س}$

١٥ -١٢ م/ ث^٢ ١٦ $(-\sqrt{٢}$ ، ق$(-\sqrt{٢}))$ ، $(\sqrt{٢}$ ، ق$(\sqrt{٢}))$

تمارين ٢ - ١

١ أ جـ = ٢

ب جـ = ١

جـ جـ = ١

د جـ = $\frac{\pi}{٣}$ لا يحقق

٢ أ جـ = ١

ب جـ = صفر

جـ جـ = $\frac{٢٥}{٤}$

٣ أ = ١ ، ب = ٦ ، جـ = $\frac{٥}{٢}$ (ترفض) ، جـ = $\sqrt{\frac{١٣}{٣}}$ (تقبل)

تمارين ٢ - ٢

١ أ ق(س) متناقص في [−٢ ، ٠] ، [٢ ، ٥] ومتزايد في [٠ ، ٢]

ب ق(س) متزايد في [٠ ، π]

جـ ق(س) متناقص في]−∞ ، ١] ومتزايد في [١ ، ∞[

٢ ق(س) متزايد على ح$^{+}$

٣ ق(س) متزايد في [٠ ، ١] ، كذلك ق(س) متزايد في [١ ، ٢]

٤ ق(س) متزايد في [٠ ، ∞[، كذلك ق(س) متناقص في]−∞ ، ٠]

٥ ل(س) متزايد في [٢ ، ∞[، متناقص في]−∞ ، ٢]

٧ قَ(س) متناقص في]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

تمارين ٢ - ٣

١ أ $(-٢ ، \frac{-١٩}{٣})$ ، $(٣ ، \frac{١}{٣})$ ، $(٠ ، \frac{١}{٣})$ ، $(٢ ، -١)$

ب $(٠ ، ٠)$ ، $(-٨ ، ٤)$ ، $(٨ ، ٤)$

٢ أ ق(٢) = ٢٠ قيمة عظمى محلية ، ق(٤) = ١٦ قيمة صغرى محلية

ب ق(-٢) = ق(٢) = صفر قيمة صغرى محلية ، ق(٠) = ٢ قيمة عظمى محلية

جـ ق(-٣) = ٦هـ$^{-٣}$ قيمة عظمى محلية ، ق(١) = -٢هـ قيمة صغرى محلية

د ق$(-\frac{١}{٢}) = \frac{٣}{٤}$ قيمة صغرى محلية

هـ ق(٠) = ١ قيمة عظمى محلية ، ق(π) = ١ قيمة عظمى محلية ، ق$(\frac{\pi}{٢})$ = -١ قيمة صغرى محلية

و ق(٢) = ١ قيمة عظمى محلية

٣ أ ق(٠) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة) ، ق(٣)=١٣ قيمة عظمى مطلقة (اكبر قيمة)

ب ق(١) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة)

ق(٣)= هـ^{٣} -٣هـ قيمة عظمى مطلقة (اكبر قيمة)

جـ ق(π) = $\frac{-٢}{٣}$ قيمة صغرى مطلقة ، ق$(\frac{\pi}{٢})$ = ٠ قيمة عظمى مطلقة، ق$(\frac{٣\pi}{٢})$ = صفر قيمة عظمى مطلقة

٤ أ = ١ ، ب = -٦

٥ ق(٣)= -٢ قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لأنها وحيدة

إذن ق(س) ≤ -٢ ، ∀ س ∈ ح ⟸ ق(س) سالب دائماً

تمارين ٢ - ٤

١ أ ق(س) مقعر إلى أعلى في]-٢ ، -١[كذلك في]٤ ، ∞[،

ومقعر إلى أسفل في]-∞ ، -٢[كذلك في]-١ ، ٤[

ب ق(س) مقعر إلى أسفل في]$\frac{-\pi}{٢}$ ، ٠[كذلك في]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

جـ ق(س) مقعر إلى أسفل في]٢ ، ٤[ومقعر إلى أعلى في]٠ ، ٢[

د ق(س) مقعر إلى أعلى في]٣ ، ∞[

هـ ق(س) مقعر إلى أسفل في]٠ ، π[

و ق(س) مقعر إلى أسفل في]٠ ، π[و ق(س) مقعر إلى أعلى في]π ، ٢π[

ز ق(س) اقتران ثابت]١ ، ٣[، ومقعر إلى أعلى في]٣ ، ٥[

٢ أ (٠، ق(٠)) = (٠ ، ٠) نقطة انعطاف

ب $(\frac{\pi}{٢}$ ، ٠)، $(\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٠) نقط انعطاف

جـ يوجد نقطة انعطاف هي (٥ ، ٠)

٣ أ ق(٠) = ٠ قيمة صغرى محلية ، ق(−٤) = ٣٢ قيمة عظمى محلية

ب يفشل اختبار المشتقة الثانية ، ق(−٦) = ٠ قيمة صغرى محلية وهي صغرى مطلقة

٤ أ = ٣

٥ أ ق(س) مقعر إلى أعلى في]٣ ، ∞[ومقعر إلى أسفل في]−∞ ، ٣[، (٣ ، ق(٣)) نقطة انعطاف.

ب ق(٠) قيمة عظمى محلية ، ق(٦) قيمة صغرى محلية

جـ ق(س) متزايد في]−∞ ، ٠] كذلك في [٦ ، ∞[ومتناقص في [٠ ، ٦]

٦ ق(س) = −س^{٣} + ٦س^{٢} − ١٥س + ١٥

٧ عً(١) = ٢٤٨

٨ أ ق(س) متزايد في [−٣ ، −٢] كذلك في [١ ، ٢] ومتناقص في [−٢ ، ١]

ب قيم س التي يكون للاقتران عندها قيمة قصوى هي س = ١ ، س = −٢ ، س = −٣ ، س = ٢
ق(١) قيمة صغرى محلية و ق(−٢) قيمة عظمى محلية، ق(٢) قيمة عظمى محلية، ق(−٣) قيمة صغرى محلية

جـ نقطة الانعطاف هي (٠ ، ٠)

تمارين ٢ - ٥

١ س = ٢٠ م ، ص = ٢٠ م ، أكبر مساحة = ٤٠٠ م^{٢}

٢ نق = ٤سم ، ع = ١٢سم

٣ و = (٢ ، $\sqrt{٣}$)

٤ ب = ١٠ ، أ = −١٠

٥ الساعة الواحدة و ١٢ دقيقة

٦ نق = $\frac{٨}{٣}$ ، ح = $\frac{٢٥٦\pi}{٩}$ سم^{٣}

٧ أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف هي ٢٧ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

٨ س = ٤

تمارين عامة: الوحدة الثانية

١

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
رمز الاجابة	جـ	ب	ب	جـ	د	جـ	أ	د	أ	جـ	د	جـ	جـ	أ

٣ ق(س) متناقص في]−∞ ، −٣] ، [١ ، ∞ [

ق(س) متزايد في [−٣ ، ١]

ق(−٣) = $\frac{-١}{٦}$ قيمة صغرى محلية

ق(١) = $\frac{١}{٢}$ قيمة عظمى محلية

٤ أ = ٤

٥ أ س = −٢ ، −١ ، ٣ ، ٦

ق(٣) = −٢٢ صغرى مطلقة ، ق(٦) = ٥٩ عظمى مطلقة

ب ق مقعر إلى أسفل في]−٢ ، ١[ومقعر إلى أعلى في [١ ، ٦[

جـ (١ ، −٦) نقطة انعطاف، ظل زاوية الانعطاف = قَ(١) = −١٢

٦ أ منحنى ق(س) مقعر إلى أعلى في]−∞ ، −٢[كذلك في]١ ، ∞[ومقعر إلى أسفل في]−٢ ، ١[

ب س = −٢ ، س = ١

٨ ع = $\frac{٤٠}{٣}$ سم ، نق = $\frac{٢٠\sqrt{٢}}{٣}$

١١ ق(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٣} − ٣س + ٣

١٢ طول المستطيل = ١٠٠م ، وعرض المستطيل = $\frac{٢٠٠}{\pi}$ م

١٣ طول ضلع المثلث الأول ٣ سم ، طول ضلع المثلث الثاني ٣ سم

حلول الوحدة الثالثة: المصفوفات

تمارين ٣ – ١

١ أ $\begin{bmatrix} ٧٥٠ & ٦٠٠ & ٨٠٠ \\ ٦٥٠ & ٤٥٠ & ٩٠٠ \end{bmatrix}$ من الرتبة ٢ × ٣

ب انتاج فرع طولكرم

٢ أ ٤ × ٣

ب ٢

جـ −٣

٣ س = ٣

٤ $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

٥ ب = $\begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ -٣ & ٥ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$

تدريبات:

١ $\begin{bmatrix} ١٦ & -٥ & ٠ \\ ١٢ & ١٧ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٣ & -١١ & ١٤ \\ -١٠ & ٨ & -١ \end{bmatrix}$

٢ س = $\frac{١}{٤}\begin{bmatrix} -١٠ & ١ \\ ٣ & ١٠ \end{bmatrix}$

٣ أ = $\begin{bmatrix} \frac{٥}{٢} & -١ \\ \frac{-٣}{٢} & \frac{-١}{٢} \end{bmatrix}$

٤ س = −٦ ، ص = ٣

٥ س = $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٤ & -٢ \end{bmatrix}$

تمارين ٣ – ٢

١ أ $ب_{٤ \times ٥}$

ب $ب_{٥ \times ٣}$

٢ أ $\begin{bmatrix} ٢٧ & ٢٤ & ٤٠ \\ ١١ & -١٢ & -٦ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} -٣٠ & ٦ & -١١ \\ ٢٩ & ١٨ & ٣٥ \\ ١٠ & ١٢ & ١٨ \end{bmatrix}$

جـ $\begin{bmatrix} ٢٥ & ٦ \\ -٩ & -١٠ \end{bmatrix}$

٣ س = −٢ ، ص = −٣

٦ مجموعة الحل = $\emptyset$

٧ أ $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

تمارين ٣ – ٣

١ أ صفر ب ٣٢ جـ ١٢٥

٢ س=٦ ، س= –٣ ٣ –٢٦ ٤ س = ±٣

٥ –٥س +٢ص + ١١ = ٠

٦ أ –٢ ص$_١$ + ص$_٢$

ب إخراج عامل مشترك من كل من الصفين الأول والثاني فتتساوى المدخلات المتناظرة في الصفين فتصبح قيمته صفرا.

جـ تبديل عمود مكان عمود فإن قيمة المحدد تضرب بـ (–١)

تمارين ٣ – ٤

١ أ لها نظير ضربي ب لها نظير ضربي. جـ ، د ليس لها نظير ضربي.

٢ في المصفوفة أ تكون قيم ك = ٠ ، ٢، وفي المصفوفة ب تكون قيم ك = ٢ ، –٢

٣ أ $\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ = أ

٤ س = ٥ ٥ س . ص = –٤ ، –٢ ٦ $\begin{bmatrix} ٨ & -٦ \\ -٥ & ٥ \end{bmatrix}$

تمارين ٣ – ٥

١ أ س = ٣ ، ص = ٠ ب س = ١ ، ص = ١

٢ أ س = ٤ ، ص = –١ ب س = –٤ ، ص = ١

٣ س = ٤ ، ص = ١

٤ أ س = ١ ، ص = ٢ ب ع = ٣ ، ص = –١ ، س = ٢

تمارين عامة: الوحدة الثالثة

١

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة	جـ	جـ	جـ	د	أ	ب	د	ب	د	أ

٢ س = ٥ ، ص = ٣

٣ أ $\begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ب -١٨ جـ $\begin{bmatrix} ١ & \frac{-٥}{٤} \\ \frac{١}{٢} & \frac{-٣}{٤} \end{bmatrix}$

٤ س أي عدد حقيقي.

٥ أ س = -٥ ، ص = ٤ ب س = ١ ، ص = $\frac{-١}{٤}$

٦ س = ٤ ، ص = - ٣

٨ أ ن = ٦ ، ك = ٢ ب س = ١ ، ص = ١

٩ $(أ^{٢})^{-١} = (أ^{-١})^{٢}$

١٠ س = - ٢ ، ص = ١

١١ ع = ١ ، ص = -٢ ، س = ٣

١٢ س = ± ٥

حلول الوحدة الرابعة: التكامل غير المحدود، وتطبيقاته

تمارين ومسائل ٤ - ١

١ أ اقتران أصلي

ب ليس اقتراناً أصلياً

جـ اقتران أصلي

٢ هـ(١) = ٤

٣ (٣م – هـَ)(٤) = ١٤

٤ أ = ٢

٥ أ = ٢ ، جـ = −٢

تمارين ومسائل ٤ - ٢

١ أ ٨س + جـ

ب $\frac{٧}{٣}$ س^{٣} – ٢س^{٢} – $\frac{١}{س^{٣}}$ + جـ

جـ ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$ + $\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

د $\frac{٥}{٢}$ س^{٢} + قاس + جـ

هـ $\frac{٣}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٣}}$ + $\frac{٣}{٤}$ س$^{\frac{٤}{٣}}$ + س + جـ

و س^{٢} + ٥س + $\frac{١}{س}$ + جـ

ز ظاس + جـ

ح ٥هـ^{س} + ٢لـو$_{هـ}$|س| + جـ

٢ ق(س) = جاس – هـ^{س}

٤ ق(−١) = $\frac{-١٥}{٢}$

تمارين ومسائل ٤ - ٣

١ $ص = ق(س) = س^{٣} - س^{٢} + ١$

٢ $ق(س) = س^{٢} - س^{٣} + ٣$

٣ $ق(س) = ٢س^{٢}$

٤ $ق(س) = -جتاس + ٢س - ٢\pi$

٥ $ع(٥) = \frac{٣١}{٢}$ م/ث ، $ف(٥) = \frac{٢١٥}{٦}$ متراً

٦ $ص = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} - ٢$

٧ $ن = ٩$ ثانية

تمارين ٤ - ٤ أ

١ أ $-(س + ٢)^{-٤} + جـ$

ب $\frac{١}{٢} جتا(س^{٢} - ٢س) + جـ$

جـ $\frac{(لو_{هـ} س)^{٢}}{٢} + جـ$

د $\frac{٢}{٧} (س + ١)^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٤}{٥} (س + ١)^{\frac{٥}{٢}} + ٢(س + ١)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

هـ $\frac{(س - ١)^{٩}}{٩} + \frac{٦(س - ١)^{٨}}{٨} + \frac{٩(س - ١)^{٧}}{٧} + جـ$

و $\frac{٣}{٨} س + \frac{١}{٤} جا٢س + \frac{١}{٣٢} جا٤س + جـ$

ز $ظاس - قاس + جـ$

ح $لو_{هـ}|١ + هـ^{س}| + جـ$

٢ أ $\frac{-٢}{٣} (١ + \frac{١}{س})^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

ب $جتا \frac{١}{س} + جـ$

جـ $\frac{٥}{٢} س - \frac{١}{٤} جا٢س - ظتاس + جـ$

د $\frac{-١}{١٢} (١ + \frac{٢}{س})^{٦} + جـ$

هـ $\frac{٣}{١٦} (س^{٤} + ١)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

و $\frac{ظا^{٢}س}{٢} + لو_{هـ}|جتاس| + جـ$

تمارين ٤ - ٤ ب

١ أ $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \text{جـ}$

ب $\text{س ظاس} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{جتاس} + \text{جـ}$

جـ $\text{٣س لـو}_{\text{هـ}}(\text{س} + ٢) - \text{٣س} + \text{٦لـو}_{\text{هـ}}(\text{س} + ٢) + \text{جـ}$

د $\frac{-١}{٢}\ \text{س جتا٢س} + \frac{١}{٤}\ \text{جا٢س} + \text{جـ}$

هـ $\frac{١}{٢}\ \text{س}^{٢}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١} - \frac{١}{٢}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١} + \text{جـ}$

و $-٢\sqrt{\text{س} + ١}\ \text{جتا}\sqrt{\text{س} + ١} + ٢\ \text{جا}\sqrt{\text{س} + ١} + \text{جـ}$

ز $\frac{-\text{٢س هـ}^{\text{س}}}{\text{س} + ١} + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

ح $\frac{-٢}{٥}\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٢س} + \frac{١}{٥}\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س} + \text{جـ}$

ط $\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{قتاس} + \text{جـ}$

ي $\frac{-١}{\text{س}}\ \text{جا}\ \frac{١}{\text{س}} - \text{جتا}\ \frac{١}{\text{س}} + \text{جـ}$

تمارين ٤ - ٤ جـ

١ أ $\frac{٥}{٤}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ٣| + \frac{-١}{٤}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} + ١| + \text{جـ}$

ب $\text{س} + \frac{-١١}{٥}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} + ٣| + \frac{٦}{٥}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ٢| + \text{جـ}$

جـ $٢\sqrt{\text{س}} + \frac{٨}{٣}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(\sqrt{\text{س}} - ٢) - \frac{٢}{٣}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(\sqrt{\text{س}} + ١) + \text{جـ}$

د $-٢\ \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \frac{٣}{٢}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ١| + \frac{١}{٢}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} + ١| + \text{جـ}$

هـ $-$ لـو$_{هـ}$|قتاس + ظتاس| + جـ

و $\frac{-١}{٢}$ لـو$_{هـ}$|١ − لـو$_{هـ}$س| + $\frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$|١ + لـو$_{هـ}$س| + جـ

٢ أ ٢ لـو$_{هـ}$|س − ١| − ٣ لـو$_{هـ}$|س + ٢| + جـ

ب $\frac{-١}{٨}$ لـو$_{هـ}$|٤ + جتاس| + $\frac{١}{٨}$ لـو$_{هـ}$|٤ − جتاس| + جـ

جـ $\frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$|ظتاس − ١| − $\frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$|ظتاس + ١| + جـ

د $\frac{١}{٣}$ (لـو$_{هـ}$|س^{٣}| − لـو$_{هـ}$|س^{٣} + ١|) + جـ

مارين عامة: الوحدة الرابعة

١

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤
رمز الاجابة	جـ	د	جـ	ب

٣ $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٤}}{١٢} - ٣\text{جاس} + ٦\text{س} + ٢$

٤ $\text{ف}(٣) = ٢٢ + ٣\text{لـو}_{\text{هـ}}\, ٤$ متراً

٥

١) $\frac{١}{٣}(\text{س}^{٢} - ٣)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

٢) $\frac{١}{٩}(\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٩}| - \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٩} + ١|) + \text{جـ}$

٣) $٢\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}} + ٢\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}\sqrt{\text{س}}| + \text{جـ}$

٤) $\frac{١}{٣}\text{قا}(٣\text{س} + ١) + \text{جـ}$

٥) $(\text{س}^{٢} + ١)\ \text{جاس} + ٢\text{س جتاس} - ٢\text{جاس} + \text{جـ}$

٦) $\text{س لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ١) - ٢\text{س} + \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} + ١| - \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ١| + \text{جـ}$

٧) $\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

٨) $-\text{ظاس} + \text{لـو}_{\text{هـ}}|١ + \text{ظاس}| - \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ظاس} - ١| + \text{جـ}$

٩) $\frac{١}{٢}\ \text{جا}\,٢\text{س} + \text{جـ}$

١٠) $\frac{-١}{٨}(\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{٨} + \text{جـ}$

١١) $\frac{١}{٤٩}(\text{س}^{٧} - ٦)^{٧} + \text{جـ}$

٦ $\text{أ} = ١$

٧ $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$

حلول الوحدة الخامسة: التكامل المحدود، وتطبيقاته

تمارين ٥ - ١

١) أ) صفر   ب) $[\frac{١}{٢} ، ١]$ ٢) ٢   ٣) -٣٠

٤) $٧ + هـ + \frac{١}{هـ}$ ٥) $أ = ٢$ ٦) $أ = -٤$ ، $ب = ٢٠$

٧) $\frac{\pi}{٢٤}(١ + \sqrt{٢} + ٢\sqrt{٣})$

تمارين ٥ - ٢

١) $-١٢ - \frac{٤٠}{ن}$ ٣) $ب = ٦$ ٤) أ) $\frac{٥}{٢}$ ب) -٥

تمارين ٥ - ٣

١) أ) ٧٦   ب) $\frac{-١٥}{٨}$ جـ) ١   د) ٩٦

٢) $ت(س) = س - لو_{هـ}(س + ١)$

٣) $أ = -٨$ $ب = ٣$

٤) $جـ = \frac{-٣}{٢}$ ، $ق(٢) = ١ + \pi$

٥) $أ = -هـ^{٢} - ١$ ٦) $\frac{١}{٢٤}$

تمارين ٥ - ٤

١) أ) $\frac{\pi}{٢}$ ب) $\frac{هـ^{٤}}{٢} + ٢هـ^{٢} - \frac{١}{٢}$

جـ) $١٠\sqrt{٣}$ د) $\frac{-٢١}{٢}$

٣) أ) $\int_{١}^{٧} س^{٣} \, دس$ ب) $\int_{١}^{٤} \sqrt{س + ٢} \, دس$

جـ) $\int_{١}^{٥} (س^{٢} + ٤) \, دس$ د) $\int_{٢}^{٧} (س - ١) \, دس$

٤) أ) -١٨ ب) $أ = \frac{١}{١٤}$

٥ أ ١٦ ب $^{-}$٨

٦ ٢

٧ $\frac{-٤}{٣}$

٨ ب = $\frac{-١}{٢}$ ، ٥

٩ ت(س) = $\begin{cases} ٢س - \frac{١}{٢}س^٢ & ، \quad س \in]٠ ، ٢] \\ \frac{١}{٢}س^٢ - ٢س + ٤ & ، \quad س \in [٢ ، ٥] \end{cases}$

تمارين ٥ - ٥ أ

١ ١ وحدة مساحة

٢ $\frac{٥}{٣}$ وحدة مساحة

٣ $\frac{٣٠٤}{١٥}$ وحدة مساحة

٤ هـ $-$ $\frac{١}{هـ}$ وحدة مساحة

٥ $\frac{١٠}{٣}$ وحدة مساحة

٦ $\frac{٢٨}{٣}$ وحدة مساحة

تمارين ٥ - ٥ ب

١ ٨٠ π وحدة حجم

٢ ٣٢ π وحدة حجم

٣ ٢١ π وحدة حجم

٤ $\frac{٦٢}{١٥}$ π وحدة حجم

٥ ح = π (هـ $-$ ٢) وحدة حجم

٧ ٨ π لــو$_{هـ}$ $\frac{٣}{٢}$ وحدة حجم

تمارين عامة: الوحدة الخامسة

١

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الاجابة	ب	أ	جـ	أ	د	جـ	ب	ب	جـ	جـ

٢ أ = ٢ ، ب = ٢٢

٣ ٧٤

٦ ق(٤) = $\frac{٣}{٤}$ ٧ ، قَ(٤) = $\frac{٦٥}{٣٢}$

٧ أ جـ = ⁻٢ ، أ = ٨ ، ب = ١٨ ب ١٤

٨ أ $\frac{١}{٣}$ ب $هـ^{٢}$ جـ ٥لـوهـ $\frac{٣}{٥}$ + ٦لـوهـ ٢

د $\frac{١}{٣}((\sqrt{٥})^{٣} - ١)$ هـ $\frac{-\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٢}}{٢}$

١٠ أ $\frac{١٣}{٣}$ وحدة مساحة ب $٤\sqrt{٣} - \frac{\pi}{٣} - ٤$ وحدة مساحة

١١ أ + ب = ٢ + $هـ^{٣}$ − هـ

١٢ $\frac{٤}{٣}$ وحدة مساحة

١٣ $\frac{٧}{٢}$ وحدة مساحة

١٤ أ ف(٥) = $\frac{١٩٣}{٣}$ م ب ن = ١٢ ، $\frac{٣٤٠}{٣}$ وحدة مسافة

١٥ أ $\frac{١}{ن}$ $(ق(س))^{ن}$ + جـ ب ق(س) = ± أ$هـ^{س}$

١٦ $\frac{١}{\pi + ٢} + \frac{١}{٢}$ − أ ١٧ صفر

١٨ ٥٧ π وحدة حجم ١٩ $\frac{\pi^{٢}}{٦}$ وحدة حجم

٢٠ $\frac{٨\pi}{٢١}$ وحدة حجم ٢١ ⁻٤

حلول الوحدة السادسة: الأعداد المركبة

تمارين ٦ - ١

١ أ $٢ + \sqrt{٢}$ ت ب $٥\sqrt{٢}$ ت جـ $^-٤ + ٠$ت

٢

الجزء الحقيقي	$^-٣$	٠	١	٠	٠	$\frac{١}{٣}$
الجزء التخيلي	$\frac{٢}{٥}$	٣	$^-١$	٦	$^-٢$	٠

٤ أ $^-$ت ب $-$ت جـ ٠

تمارين ٦ - ٢

١ أ ٢٣ + ٦ت ب ٢٩ − ٣ت جـ $^-١١٧ + ٤٤$ت
د ٤٠ − ٩٦ت هـ ٠ + ٨ت

٢ س = ١ + ٣ت

٣ (٤ ، ٢)، (١ ، -١)

٦ أ = ١٠

٧ أ $\frac{١}{٨} - \frac{\sqrt{٣}}{٨}$ ت ب ١ + ٣ت جـ $\frac{^-١}{١٢٨} + \frac{١}{١٢٨}$ ت

٨ $\sqrt{٢}$ ت ، $-\sqrt{٢}$ ت

تمارين ٦ - ٣

١ $\sqrt{٥}$

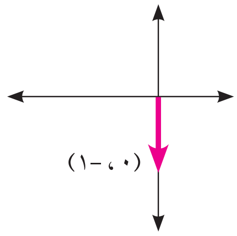
٢ أ $\sqrt{١٨}$ ب ١ جـ ١ د ٤

٣ أ $\frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}$ ت ب $\frac{٣}{١٥} + \frac{٤}{١٥}$ ت جـ ١ د $\frac{١}{٥}$

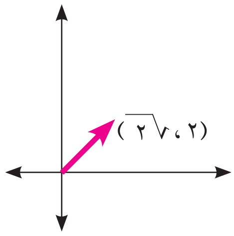
٤ أ $\frac{^-٢ + \sqrt{٢}}{٥} + \frac{١ + ٢\sqrt{٢}}{٥}$ ت ب $\frac{^-٣١٣}{٤٤٢} + \frac{٧٥٩}{٤٤٢}$ ت

٦ تمثيله في مستوى الأعداد المركبة

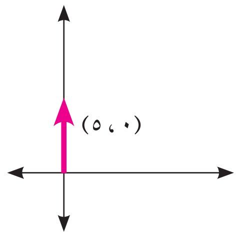
أ



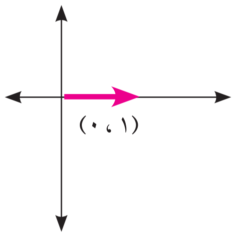
ب



جـ



د



٨ أ $\text{ع} = \sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,\frac{٣\pi}{٤} + \text{ت جا}\,\frac{٣\pi}{٤})$

ب $\text{ع} = \frac{١}{٢}\,(\text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi)$

جـ $\text{ع} = ١\,(\text{جتا}\,\frac{٢\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٢\pi}{٣})$

٩ أ $\frac{-٧}{\sqrt{٢}} + \frac{٧}{\sqrt{٢}}\,\text{ت}$

ب $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢} + \frac{٣}{٢}\,\text{ت}$

جـ $\sqrt{٢} - \sqrt{٢}\,\text{ت}$

د $\frac{٣}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ت}$

١

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الإجابة	جـ	جـ	د	أ	ب	ب	د

٢ أ $\sqrt{٥}$ ب $\sqrt{٥}$ جـ $\sqrt{١٠}$ د $\sqrt{٢٠}$

٣ (٠ ، ١) ، (−١ ، ٠)

٤ ل + م = ٨ ، ل م = ٢٥ ، ل^{٢} + م^{٢} = ١٤

٥ ت

أفكار ريادية

* تصميم دليل ارشادي لمدينة القدس للتعريف باهميتها، مع إبراز اهم معالمها التاريخية والسياحية.
* تصميم اداة لقياس اثر استخدام مواقع التواصل الاجتماعي على تحصيل الطلبة.
* تعاني المحافظات الجنوبية (قطاع غزة) من مشكلات الماء والكهرباء، اصمم مقترحا لعرضه على الحكومة للتخفيف من حدة هذه الازمات.
* إعداد رحلات معرفية (Web quest) عن وحدة التفاضل.
* إعداد دراسة عن كيفية الافادة من الاراضي البور لدعم السلة الغذائية .

المشروع

شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع.

ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

ميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.

٢. ينفّذه فرد أو جماعة.

٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.

٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.

٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.

٢. أن يوفّر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.

٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.

٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومترابطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلّب مجالاً على الآخر.

٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.

٦. أن يُخطّط له مسبقاً.

ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخّل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.

٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.

٣. تحديد خطوات سير المشروع.

٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، **(شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).**

٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلّي.

ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلّاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلّم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. **الأهداف** التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.
٢. **الخطة** من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحّدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.
٣. **الأنشطة** التي قام بها الطلبة من حيث، تنوّعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.
٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التي استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

المراجع

بسيوني، جابر أحمد (2014) : الإحصاء العام، دار الوفاء لدنيا الطباعة، الإسكندرية .

حمدان، فتحي خليل (2012) ، الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية، دار وائل للنشر، عمان .

شاهر، ثائر فيصل (2009) : الرياضيات في العلوم المالية والإدارية والاقتصادية، دار الحامد للنشر والتوزيع عمان.

رمضان، زياد (2001) : مبادئ الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، 2001.

الجندي، حسن عوض (2014) :منهج الرياضيات المعاصر محتواه واساليب تدريسه، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة .

المومني، غازي فلاح، الرياضيات المالية المعاصرة ، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، 2014

الخطيب، روحي إبراهيم (2012) : التفاضل والتكامل ج1، دار المسيرة، عمان .

الخطيب، روحي إبراهيم (2012) : التفاضل والتكامل ج2، دار المسيرة، عمان .

عدنان عوض، أحمد علاونة ، مفيد عزام ،(1990) –دار الفكر – عمان –الأردن

فريدريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الأول (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع

فريدريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الثاني(ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع

ابو أسعد ، صلاح عبد اللطيف (2010): أساليب تدريس الرياضيات، الطبعة الاولى. دار الشروق للنشر والتوزيع

الزغلول، عماد (2005): الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.

حسين فرج، عبد اللطيف (2005): طرق التدريس في القرن الواحد والعشرين، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة/ عمان

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume1

Howard Anton, John Wiley (1999): Calculus, 6th Edition ,

Bell,E,T (1937):Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Lanl B.Boyer(1989): History of Mathematics Wiley,N.Y

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume2

Edwards & Penny(1994): Calculus with Analytic Geometry, 4th Edition, Prentice hall

لجنة المناهج الوزارية:

د. صبري صيدم	أ. ثروت زيد	د. شهناز الفار
د. بصري صالح	أ. عزام أبو بكر	د. سمية النخالة
م. فواز مجاهد	أ. عبد الحكيم أبو جاموس	م. جهاد دريدي

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد مطر	د. سمية النخالة
د. محمد صالح (منسقًا)	د. علا الخليلي	أ. أحمد سياعرة
د. معين جبر	د. شهناز الفار	أ. قيس شبانة
د. علي عبد المحسن	د. علي نصار	أ. مبارك مبارك
د. تحسين المغربي	د. أيمن الأشقر	أ. عبد الكريم صالح
د. عادل فوارعة	أ. ارواح كرم	أ. نادية جبر
أ. وهيب جبر	أ. حنان أبو سكران	أ. أحلام صلاح
د. عبد الكريم ناجي	أ. كوثر عطية	أ. نشأت قاسم
د. عطا أبوهاني	د. وجيه ضاهر	أ. نسرين دويكات
د. سعيد عساف	أ. فتحي أبو عودة	

المشاركون في ورشات عمل كتاب الرياضيات للثاني عشر العلمي والصناعي:

خليل محيسن	لبنى ابو باشا	أروى مشارقة	محمد مسلم	عزيزة عيطة
نادية عباسي	يوسف الحروب	آسيا العلامي	محمد الفرا	صلاح الترك
أحمد العملة	رهام مصلح	صفية النجار	فلاح الترك	باسم المدهون
فداء أبو عرة	عريب الزبون	سناء أبو حماد	رائد عبد العال	سمير عمران
جوني مصلح	فهمي بشارات	محمد ابو سليم	رفيق الصيفي	مصطفى قنيص
توفيق السعدة	خالد طقاطقة	سهيلة بدر	حسين عرفات	نادر أبو عقيل
رائد ملاك	صهيب عكر	هيثم مسالمة	سميرة حنيف	مريم الحوامدة
أشجان جبر	ماهر أبو بدر	عبير لعسوس	مؤيد الحنجوري	وهيب جبر
علي زايد	خوله الشاعر	محمد عليان	سرين أبو عيشة	عبد الحافظ الخطيب
ابتسام بعباع	فادي زيدان	مطيعة صوافطه	ابتسام اسليم	كفاية مضية
جميل معالي	عبدالرحمن عزام	سوزان عبدالحميد	منال الصباغ	محمد دراوشة
سميه سلامه	خالد الدشت	محمد موسى	د.رحمة عودة	عماد النابلسي
ايناس سباعنة	هاشم عبيد	أيمن ابو زياد	هانم النخالة	نجود ريحان

تم مناقشة الكتاب بورشات عمل على مستوى مديريات الوطن

تَمَّ بِحَمْدِ الله