١٢

بسم الله الرحمن الرحيم

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيـات

"التكنولوجي"

فريق التأليف:

د. عادل فوارعة (منسقاً)
أ. خليل محيسن
أ. قيس شبانة
أ. وهيب جبر

مركز المناهج

أ. نسرين دويكات

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين

تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٨ / ٢٠١٩م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائرة الفنية

إشراف فني	أ. كمال فحماوي
تصميم	أ. لينا يوسف

تحكيم علمي	د. محمد نجيب
تحرير لغوي	أ. عمر عبدالرحمن
متابعة المحافظات الجنوبية	د. سميّة النّخالَة

الطبعة الأولى

٢٠١٩ م/ ١٤٤٠هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولـــة فلـسـطـين

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

+970 2 2983250 فاكس | +970 2 2983280 هاتف

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

تقديم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقرّرة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٨

مقدمة

يسرنا أن نقدم لزملائنا المعلمين والمعلمات، ولطلبتنا الأعزاء كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي التكنولوجي، وَفْق الخطوط العريضة لوثيقة الرياضيات، والتي تم تطويرها بناءً على التغذية الراجعة والدراسات الهادفة إلى تطوير المناهج الفلسطينية، ومواكبتها لمهارات القرن الحادي والعشرين، مستندين في ذلك لمعايير وطنية ودولية.

لقد اشتمل محتوى الكتاب، على أنشطةٍ وتطبيقاتٍ وسياقاتٍ حياتيةٍ، من أجل إفساح المجال للطلبة للتفكير والإبداع، ولإبراز أهمية الرياضيات في الحياة، وقد تم مراعاة التسلسل المنطقي للمفاهيم والنظريات والتعميمات .

وقد اشتمل الكتاب على خمس وحدات، هي:

ففي الوحدة الأولى الإحصاء والاحتمال فتم عرض العلاقة المعيارية والمنحنى الطبيعي المعياري ضمن أنشطة حياتية منوعة.

أما في الوحدة الثانية النهايات والإتصال، تم تقديم النهايات وقوانينها، ومعنى الاتصال.

وفي الوحدة الثالثة التفاضل فقدمت المفاهيم الأساسية في الاشتقاق وتطبيقات منوعة للتكامل.

أما الوحدة الرابعة التكامل فكانت امتداداً للوحدة السابقة وعرضت المفاهيم الأساسية للتكامل.

أخيراً الوحدة الخامسة الأعداد المركبة فقدمت العدد المركب وتعريفه وبعض العمليات عليه.

نتمنى أن نكون بهذا العمل قد حققنا مطالب عناصر العملية التعليمية كافة، بإخراج منهاجٍ فلسطينيٍ واقعيٍ ، يربط الطالب بظواهر رياضيةٍ حياتيةٍ، آملين من زملائنا المعلمين والمعلمات والمديرين والمديرات في مدارس الوطن، تقديم التغذية الراجعة لمركز المناهج قبل تطبيق الكتاب المقرر، وأثناء تطبيقه في الميدان، وبعد التطبيق.

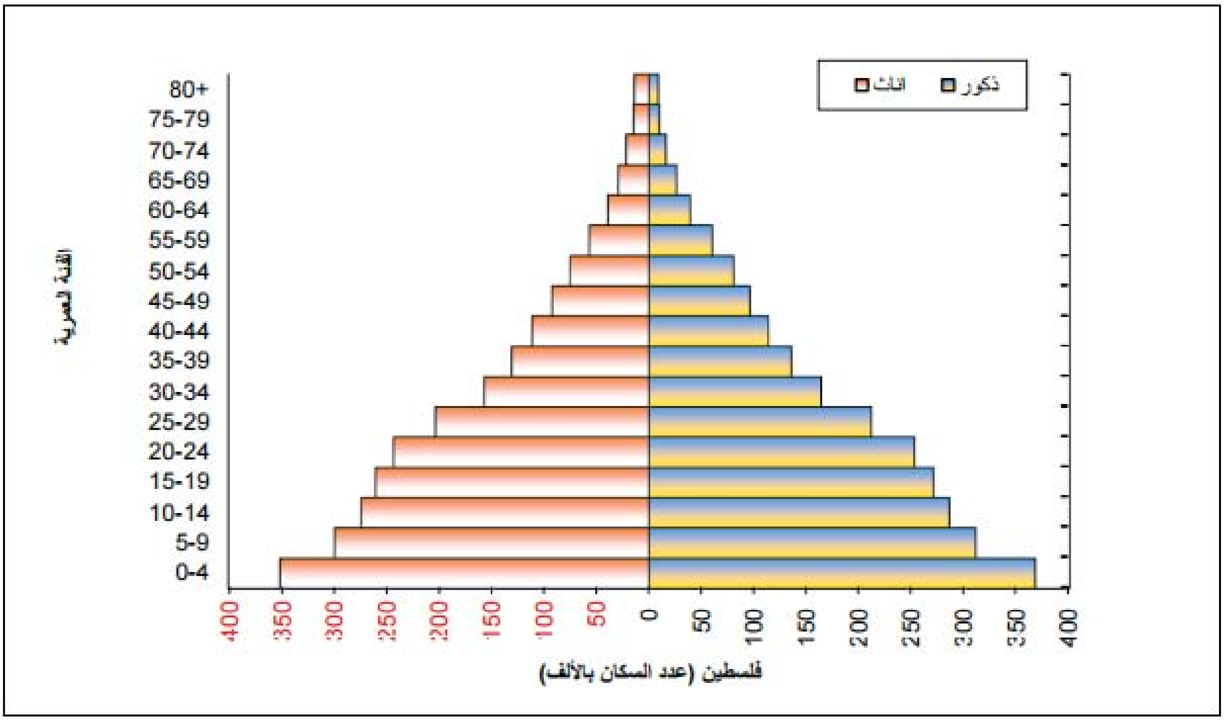
فريق التأليف

المحتويات

الوحدة			الصفحة
الوحدة الأولى		الإحصاء والإحتمال Statistics and Probability	
	(١ - ١):	العلامة المعيارية Standard Score	٤
	(١ - ٢):	التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Distribution	١٠
الوحدة الثانية		النهايات والإتصال Limits and Continuity	
	(٢ - ١):	نهاية الاقتران Limit of a function	٢٠
	(٢ - ٢):	قوانين النهايات Limits Rules	٢٣
	(٢ - ٣):	نهاية الاقتران متعدد القاعدة Limit of Multi Rules Function	٢٨
	(٢ - ٤):	نهاية الاقتران عندما س ← ∞ Limit of afunction at Infinity	٣١
	(٢ - ٥):	الاتصال Continuity	٣٥
الوحدة الثالثة		التفاضل Differentiation	
	(٣ - ١):	متوسط التغير Rate of Change	٤٣
	(٣ - ٢):	مفهوم المشتقة الأولى First Derivative	٤٧
	(٣ - ٣):	قواعد الإشتقاق (١) Differentiation Rules	٥٢
	(٣ - ٤):	قواعد الإشتقاق (٢) Differentiation Rules	٥٧
	(٣ - ٥):	تطبيقات هندسية (المماس والعمودي) Tangent Line	٦١
	(٣ - ٦):	قاعدة السلسلة (مشتقة الاقتران المركب) Chain Rule	٦٥
	(٣ - ٧):	القيم القصوى Extreme Values	٦٩
	(٣ - ٨):	تطبيقات عملية على القيم القصوى Applications	٧٤
الوحدة الرابعة		التكامل Integration	
	(٤ - ١):	التكامل غير المحدود Indefinite Integral	٨٢
	(٤ - ٢):	قواعد التكامل غير المحدود Rules of Indefinite Integral	٨٥
	(٤ - ٣):	تطبيقات هندسية على التكامل غير المحدود Geometric Applications for Indefinite Integral	٩٠
	(٤ - ٤):	التكامل المحدود Definite Integral	٩٢
	(٤ - ٥):	خصائص التكامل المحدود Definite Integral Properties	٩٦
	(٤ - ٦):	التكامل بالتعويض: Integration by Substitution	١٠١
	(٤ - ٧):	تطبيقات على التكامل المحدود (إيجاد المساحات) Definite Integral (Applications Areas)	١٠٤
الوحدة الخامسة		الأعداد المركبة Complex Numbers	
	(٥ - ١):	الأعداد المركبة Complex Numbers	١١١
	(٥ - ٢):	العمليات على الأعداد المركبة، وخصائصها Operations on Complex numbers	١١٥
	(٥ - ٣):	قسمة الأعداد المركبة: Division Of Complex Numbers	١٢٠

الوحدة ١ الإحصاء والاحتمال Statistics and Probability

الهرم السكاني في فلسطين تقديرات منتصف عام، 2016



أُناقش: إحصائية عدد السكان في فلسطين وفق الجنس والفئة العمرية.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التوزيع الطبيعي وخواصه في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إلى العلاقة بين العلامة المعيارية والعلامة الخام.

٢. حساب العلامة المعيارية، وتفسيرها.

٣. التعرف إلى التوزيع الطبيعي المعياري، وخواصّه.

٤. استخدام جدول التوزيع الطبيعي في إيجاد المساحة تحت المنحنى.

٥. توظيف خواص التوزيع الطبيعي في حل مسائل مشكلات حياتية.

١-١ العلامة المعيارية Standard Score

نشاط (١):

إذا كانت علامتا الطالبة رنيم في مبحثي الرياضيات والفيزياء، هي ٩٣ و ٨٨ على الترتيب، فهل يعني ذلك أن تحصيل الطالبة أفضل في الرياضيات؟ .... لماذا؟ ....

للحكم على أفضلية التحصيل، لا يكفي أن نعتمد على العلامة فقط، وإنما نحتاج إلى معرفة الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعلامات جميع طلبة الصف.

أتذكر: الوسط الحسابي (μ): هو مجموع القيم (المشاهدات) مقسوماً على عددها.

$$\mu = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}}$$

الانحراف المعياري (σ): هو الجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}} - \mu)^{٢}}{\text{ن}}}$$

نشاط (٢):

إذا كانت درجات الحرارة في مدينة صفد في خمسة أيام من شهر نيسان، هي: ١٠، ١١، ١٤، ١٢، ٨ أجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لدرجات الحرارة.

الوسط الحسابي $\mu = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}} =$ ....

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}} - \mu)^{٢}}{\text{ن}}} =$ ....

تبعد درجة الحرارة ١٦ عن الوسط الحسابي بمقدار ....

القيمة الخام: هي القيمة الأصلية التي نحصل عليها في اختبار أو مقياس ما، ويرمز لها بالرمز «س».

العلامة المعيارية: هي عدد الانحرافات المعيارية التي تبعدها القيمة (العلامة) الخام عن الوسط الحسابي، وبالرموز فإن: $\text{ع} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$

نشاط (٣):

معتمداً على المعلومات الواردة في الجدول الآتي الذي يبين علامات ثلاثة طلاب في الرياضيات والتكنولوجيا. أجيب عن كل مما يأتي:

	الرياضيات	التكنولوجيا
الوسط الحسابي	٦٤	٧٠
الانحراف المعياري	١٠	٥
بلال	٨٢	٨٠
يامن	٦٤	٧٠
كنان	٦٠	٦٠

تحصيل بلال أفضل في ....

أجد العلامة المعيارية للطالب بلال في الرياضيات والتكنولوجيا:

العلامة المعيارية للرياضيات $\text{ع}_{١} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$

$= \frac{٨٢ - ٦٤}{١٠} = ١{,}٨$

العلامة المعيارية للتكنولوجيا $\text{ع}_{٢} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$

$= \frac{٨٠ - ٧٠}{٥} = ٢$

تحصيل بلال أفضل في التكنولوجيا؛ لأن علامته المعيارية في التكنولوجيا أكبر من علامته المعيارية في الرياضيات.

تحصيل يامن أفضل في ....

تحصيل كنان أفضل في ....

مثال (١): مزارع فلسطيني يزرع البندورة في سهل مرج ابن عامر، كان الوسط الحسابي لكتل (٣٠٠) صندوق بندورة ١٧كغم، وانحرافها المعياري (٢)كغم، اختيرت ٣ صناديق، وكانت كتلها ١٣كغم، ١٩كغم، ١٧كغم على الترتيب. أجد العلامة المعيارية لكتل كل من الصناديق الثلاثة.

الحل: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$، حيث ع هي العلامة المعيارية، س الكتلة الخام، μ الوسط الحسابي للكتل، σ الانحراف المعياري لها.

- العلامة المعيارية لكتلة الصندوق الأول $ع_{١} = \frac{١٣ - ١٧}{٢} = -٢$

- العلامة المعيارية لكتلة الصندوق الثاني $ع_{٢} = \frac{١٩ - ١٧}{٢} = ١$

- العلامة المعيارية لكتلة الصندوق الثالث $ع_{٣} = \frac{١٧ - ١٧}{٢} =$ صفر

مثال (٢): حصلت عهد على علامة ما في الرياضيات، وكانت العلامة المعيارية المقابلة لها (١,٥) علماً بأن الوسط الحسابي لعلامات طالبات صفها كان (٨٥) والانحراف المعياري (٦)، أجد علامة عهد في اختبار الرياضيات.

الحل: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

$١,٥ = \frac{س - ٨٥}{٦}$

ومنها $٩ = س - ٨٥$

$س = ٩٤$

مثال (٣): إذا كانت أعمار (٥) أشخاص كالآتي: ٢٠ ، ٨ ، ١٢، ١٤، ١٦، جد:

١) العلامات المعيارية المناظرة لأعمار هؤلاء الأشخاص.

٢) الوسط الحسابي للعلامات المعيارية.

٣) الانحراف المعياري للعلامات المعيارية.

الحل:

$$\mu = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن} = \frac{٢٠ + ١٦ + ١٤ + ١٢ + ٨}{٥} = \frac{٧٠}{٥} = ١٤$$

العمر (س)	(س − μ)	(س − μ)^{٢}	ع = $\frac{س - \mu}{\sigma}$
٢٠	٦	٣٦	$\frac{٦}{٤}$ = ١,٥
١٦	٢	٤	$\frac{٢}{٤}$ = ٠,٥
١٤	٠	٠	صفر
١٢	-٢	٤	$\frac{-٢}{٤}$ = -٠,٥
٨	-٦	٣٦	$\frac{-٦}{٤}$ = -١,٥
المجموع		٨٠	صفر

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س - \mu)^{٢}}{ن}} = \sqrt{\frac{٨٠}{٥}} = \sqrt{١٦} = ٤$$

٢) الوسط الحسابي للعلامات المعيارية

$$\bar{ع} = \frac{١,٥ + ٠,٥ + صفر + {}^{-}٠,٥ + {}^{-}١,٥ + صفر}{٥} = ٠$$

٣) الانحراف المعياري للعلامات المعيارية:

$$\sigma_{ع} = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (ع - \bar{ع})^{٢}}{ن}} = \sqrt{\frac{(١,٥-٠)^{٢} + (٠,٥-٠)^{٢} + (٠-٠)^{٢} + ({}^{-}٠,٥-٠)^{٢} + ({}^{-}١,٥-٠)^{٢}}{٥}}$$

$$\sigma_{ع} = \sqrt{\frac{٥}{٥}} = ١$$

نتيجة: إذا كانت القيم الخام لمجتمع إحصائي هي $س_{١}$، $س_{٢}$، ....، $س_{ن}$، وكانت العلامات المعيارية المقابلة لها هي $ع_{١}$، $ع_{٢}$، ....، $ع_{ن}$ فإن الوسط الحسابي $\bar{ع}$ للعلامات المعيارية يساوي صفراً، والانحراف المعياري لها $\sigma_{ع}$ = ١.

مثال (٤): إذا كانت العلامات المعيارية المناظرة لأطوال ٥ أشجار صنوبر كالآتي:

ل ، ٠,٥ ، صفر ، $^-$٠,٥ ، -١,٥ فما قيمة ل؟

الحل: ل + ٠,٥ + ٠ + $^-$٠,٥ + $^-$١,٥ = صفر

ل + $^-$١,٥ = صفر

ل = ١,٥

مثال (٥): إذا كانت علامتا طالبين في امتحان التكنولوجيا ٧٠، ٨٨ وكانت علاماتهما المعياريتان المناظرتان $^-$٠,٨ ، ١ على الترتيب، ما الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعلامات طلبة الصف في الامتحان؟

الحل:

$$\text{ع} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$$

$$^-٠,٨ = \frac{٧٠ - \mu}{\sigma}$$ وبالضرب التبادلي:

$$^-٠,٨\sigma = ٧٠ - \mu \quad .... \quad (١)$$

$$١ = \frac{٨٨ - \mu}{\sigma}$$ وبالضرب التبادلي:

$$\sigma = ٨٨ - \mu \quad .... \quad (٢)$$

أحل المعادلتين (١) ، (٢) بالحذف

$$\sigma = ٨٨ - \mu$$

$$^-٠,٨\sigma = ٧٠ - \mu$$

بالطرح $١,٨\sigma = ١٨$ ومنها $\sigma = ١٠$

وبالتعويض في إحدى المعادلتين ينتج أن $١٠ = ٨٨ - \mu$ ومنها $\mu = ٧٨$

أي أن الوسط الحسابي = ٧٨ والانحراف المعياري = ١٠

تمارين ومسائل (١-١)

س١: في مزرعة خراف، إذا كانت كتل (٥) خراف كالآتي ٤٠كغم، ٥٠كغم، ٦٠كغم، ٧٠كغم، ٥٥كغم. أجد العلامات المعيارية للكتل؟

س٢: إذا علمت أن علامة سمير في امتحان اللغة العربية ٧٢ ، وفي التكنولوجيا ٦٩، وفي الرياضيات ٧٥، والوسط الحسابي لعلامات طلبة الصف في المواد الثلاث بالترتيب هو ٦٩، ٦٨، ٧٩، والانحراف المعياري ١، ٤، ٢، في أي المواد كان تحصيل سمير أفضل؟

س٣: إذا كان الوسط الحسابي لأطوال أشجار الصنوبر في محيط برك سليمان في بيت لحم ١٧متراً والانحراف المعياري لمجموعة الأطوال يساوي ٣م، أجد الأطوال الحقيقية للأشجار التي أطوالها المعيارية ٢، ⁻١٫٨.

س٤: إذا حولت القيم الخام لمجتمع إحصائي إلى علامات معيارية فأصبحت كالآتي:
٠٫٥، ٠٫٥ك، ⁻١٫٥، ⁻٠٫٥، ٠ ، أجد قيمة ك ؟ أتحقق أن الانحراف المعياري للعلامات المعيارية يساوي ١.

س٥: إذا كانت العلامات المعيارية المقابلة للقيمتين ٨٥، ٧٠ هي ١، ⁻٢ على الترتيب. أحسب العلامة المعيارية للعلامة الخام ٧٥.

٢-١ التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Distribution

نشاط (١):

تكمن وظيفة الهيموجلوبين في الدم، بأنّه يقوم بحمل الأكسجين والغذاء إلى الخلايا الحيويّة كافّة في جميع مناطق الجسم، ويجب أن تكون نسبة الهيموجلوبين في مستويات محدّدة تختلف حسب عمر الإنسان وجنسه، حتى تتمكّن أعضاء الجسم من القيام بوظائفها بكفاءة عالية. والمستوى الطبيعي للهيموجلوبين يجب أن يكون كالآتي: عند الذكور البالغين: من ١٣,٥ - ١٧,٥جرام/ ديسيليتر، عند الإناث: من ١١ - ١٤ جرام/ ديسيليتر، وعند الأطفال: من ١١ - ١٦ جرام/ ديسيليتر.

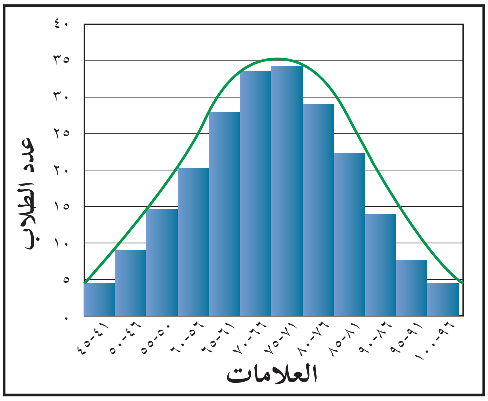
١) إذا كانت نسبة الهيموجلوبين عند سيدة عمرها ٤٥ سنة هي ٨,٨ ، فإن هذه النسبة تكون أقل من المعدل الطبيعي.

٢) إذا كانت نسبة الهيموجلوبين عند رجل بالغ هي ١٢,٥ ، فإن هذه النسبة تكون ....

٣) إذا كانت نسبة الهيموجلوبين عند طفل هي١٣، فإن هذه النسبة تكون ....

نشاط (٢):

مثّل المعلم حمدان علامات طلاب مدرسته في مادة الرياضيات بيانياً، كما هو في الشكل المجاور. ألاحظ أن هناك تجمعاً لعلامات الطلاب في المنتصف، كما أن شكل التمثيل البياني لتوزيع العلامات يشبه الجرس تقريباً. إن مثل هذا التوزيع يسمى توزيعاً طبيعياً.



١) الوسط الحسابي للعلامات يقع في الفئة (٧١-٧٥)

٢) الوسيط للعلامات يقع في الفئة ....

٣) المنوال للعلامات هو مركز الفئة ....

أتعلّم:

إذا كان الوسط = الوسيط = المنوال يكون التوزيع طبيعياً.

التوزيع الطبيعي:

يوجد العديد من التوزيعات الاحتمالية، ومنها التوزيع الطبيعي، ويعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية في علم الإحصاء، لأنه يمثل كثيراً من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العملية، مثل: الأطوال، والكتل، والأعمار، ودرجات الحرارة، والدخل الشهري، وغيرها من الظواهر المتصلة.

خصائص التوزيع الطبيعي:

١) التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالوسط.

٢) يتساوى فيه الوسط والوسيط والمنوال.

٣) المنحنى متصل.

٤) يقترب المنحنى من المحور س، ولكنه لا يمسه.

وسنركز في دراستنا هذه على التوزيع الطبيعي المعياري.

التوزيع الطبيعي المعياري: إذا كانت $س_١$، $س_٢$، ....، $س_ن$ علامات خام تتبع التوزيع الطبيعي، فإن العلامات المعيارية المقابلة لها هي $ع_١$، $ع_٢$، ....، $ع_ن$ تتبع توزيعاً طبيعياً يسمى التوزيع الطبيعي المعياري، ويكون فيه الوسط الحسابي يساوي صفراً، والانحراف المعياري يساوي (١).

جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري:

المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعي المعياري تساوي وحدة مساحة واحدة، وقد وضع العلماء جداول خاصة تبين نسبة المساحة تحت المنحنى والمحدودة بقيمة معينة من العلامات المعيارية.

سنعتمد الجداول الملحقة في نهاية الكتاب والتي تعطي المساحة المحصورة تحت ع حيث ع عدد حقيقي.

مثال (١): باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد كلاً من:

أ) نسبة المساحة تحت (ع = ١,١٧).

ب) نسبة المساحة فوق (ع = ١,٢)

جـ) نسبة المساحة تحت (ع = $^-$١)

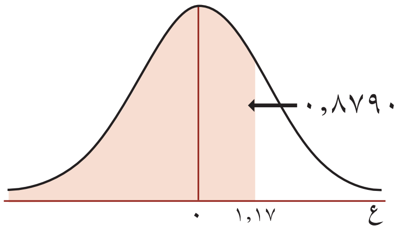
د) نسبة المساحة فوق (ع = $^-$٠,٥)

هـ) نسبة المساحة المحصورة بين ($ع_١$ = $^-$٠,٨ و $ع_٢$ = ٠,١٥)

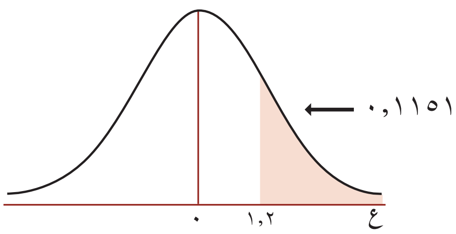
ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥

الحل:

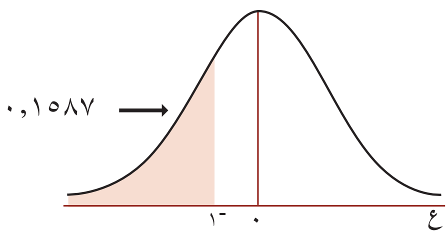
أ) نسبة المساحة تحت (ع = ١,١٧) = ٠,٨٧٩٠ ويتم إيجادها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وتحدد من تقاطع الصف ١,١ ومن العمود ٠,٠٧، حيث أن تقاطع العمود مع الصف يمثل قيمة المساحة. ألاحظ الشكل:



ب) نسبة المساحة فوق (ع = ١,٢) = ١ – المساحة تحت (ع = ١,٢) = ١ – ٠,٨٨٤٩ = ٠,١١٥١ ألاحظ الشكل:

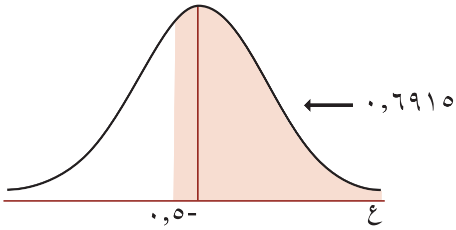


جـ) نسبة المساحة تحت (ع = ⁻١) = ٠,١٥٨٧ مباشرة من الجدول، ألاحظ الشكل:



د) نسبة المساحة فوق (ع = -٠,٥) = ١ − (المساحة تحت ع = -٠,٥)

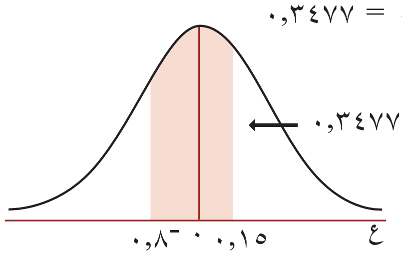
= ١ − ٠,٣٠٨٥ = ٠,٦٩١٥ ألاحظ الشكل:



هـ) نسبة المساحة المحصورة بين ($ع_{١}$ = ‾٠,٨) و ($ع_{٢}$ = ٠,١٥)

= المساحة تحت (ع = ٠,١٥) − المساحة تحت (ع = -٠,٨)

= ٠,٥٥٩٦ − ٠,٢١١٩ = ٠,٣٤٧٧

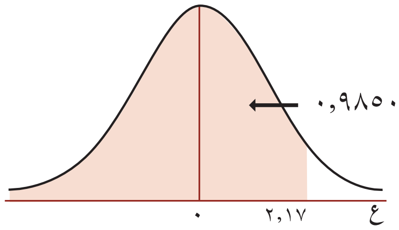


مثال (٢): أجد قيمة ع في كل مما يأتي:

أ) نسبة المساحة تحتها تساوي ٠,٩٨٥٠

ب) نسبة المساحة فوقها تساوي ٠,٦٦٢٨

الحل: أ) نسبة المساحة تحت ع = ٠,٩٨٥٠ ، أبحث في الجدول عن المساحة ٠,٩٨٥٠ ، جد أنها تقع عند تقاطع صف ع = ٢,١ وعمود ٠,٠٧ ، ومنها ع = ٢,١٧ ، ألاحظ الشكل الآتي:

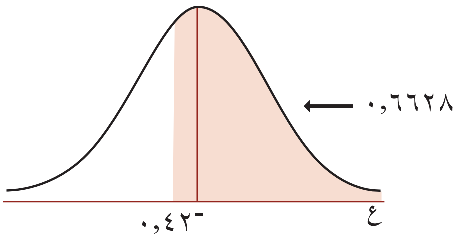


ب) نسبة المساحة فوق ع = ٠,٦٦٢٨ = ١ − المساحة تحت ع

نسبة المساحة تحت ع = ١ − ٠,٦٦٢٨

= ٠,٣٣٧٢

من الجدول ع = ‾٠,٤٢ ألاحظ الشكل المجاور:



مثال (٣): الوسط الحسابي لأعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع هو ١٢٠٠ ساعة بانحراف معياري مقداره ٣٠٠ ساعة، فإذا كانت هذه الأعمار تتبع التوزيع الطبيعي واختير أحد المصابيح عشوائياً، فما النسبة المئوية لأن يبقى المصباح الكهربائي صالحاً لمدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة.

الحل: نسبة أن يبقى المصباح صالحاً لمدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة = المساحة فوق ($ع\,|_{س=١٨٠٠}$)

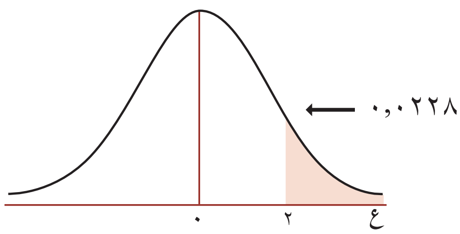
$$ع\,|_{س=١٨٠٠} = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{١٨٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠} = ٢$$

المساحة = المساحة فوق (ع = ٢)

= ١ − المساحة تحت (ع = ٢)

= ١ − ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

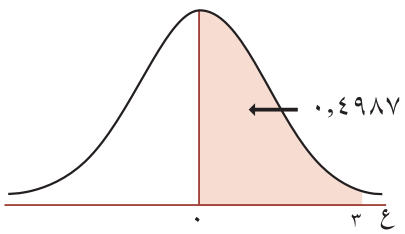
النسبة المئوية المطلوبة = ٠,٠٢٢٨ × ١٠٠٪ = ٢,٢٨٪



مثال (٤): الوسط الحسابي لكتل ١٠٠٠ شخص يساوي ٦٥كغم، والانحراف المعياري للكتل ١٠كغم، فإذا كانت الكتل تتبع التوزيع الطبيعي، فما نسبة الأشخاص الذين تقع كتلهم بين ٦٥كغم و٩٥كغم؟ وما عددهم؟

الحل: نسبة الأشخاص الذين كتلهم بين ٦٥كغم، ٩٥كغم

= نسبة المساحة المظللة في الشكل المقابل.



أحول القيمة الخام ٩٥ إلى علامة معيارية

$$ع\,|_{س=٩٥} = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{٩٥ - ٦٥}{١٠} = ٣$$

نسبة الأشخاص = المساحة بين (ع = صفر ، و ع = ٣)   لماذا؟

= المساحة تحت (ع = ٣) − ٠,٥   لماذا؟

= ٠,٩٩٨٧ − ٠,٥

= ٠,٤٩٨٧

عدد هؤلاء الأشخاص = ١٠٠٠ × ٠,٤٩٨٧ ≈ ٤٩٩ شخصاً.

تمارين ومسائل (١ - ٢)

س١: أجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري في كل من الحالات الآتية:

أ) تحت (ع = ١,٣٨)

ب) فوق (ع = ٠,٩٠)

جـ) بين (ع = $^-$١,٥) و (ع = ١,٥)

س٢: أجد العلامة المعيارية (ع) في كل من الحالات الآتية:

أ) المساحة تحت ع هي ٠,٨٥٥٤

ب) المساحة فوق ع هي ٠,٧٧٣٤

ج) المساحة بين $^-$ع و ع هي ٠,٦

س٣: إذا كانت أطوال طلبة مدرسة ثانوية فيها ٥٠٠ طالب، أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ١٦٥سم، وبانحراف معياري ١٠سم، ما نسبة الطلبة الذين تنحصر أطوالهم بين ١٥٠سم ، ١٨٠سم؟ وما عددهم؟

س٤: إذا كانت علامات ٦٠٠ طالب تتخذ توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ٧٢ وبانحراف معياري ٨ وكانت علامة النجاح هي ٦٠، أجد:

أ) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع علاماتهم بين ٦٢، ٧٨.

ب) عدد الطلبة الراسبين.

س٥: تتبع رواتب ١٠٠٠ موظف في إحدى الشركات توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ٧٠٠ دينار، وبانحراف معياري ٢٠ ديناراً. أحسب عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين ٦٨٠ ديناراً و ٧٤٠ ديناراً.

(١-٣) تمارين عامة

س١: أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

١) ما قيمتا الوسط الحسابي (μ) والانحراف المعياري (σ) لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري:

أ) $\mu = ١$، $\sigma = ١$ ب) $\mu = ٠$، $\sigma = ٠$ جـ) $\mu = ٠$، $\sigma = ١$ د) $\mu = ١$، $\sigma = ٠$

٢) ما العلامة المعيارية المناظرة للعلامة ٧٧ علماً بأن الوسط الحسابي ٧٠ والانحراف المعياري ١٤ .

أ) -٢   ب) -٠,٥٠   جـ) ٠,٥٠   د) ٢

٣) إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات ٧٥ والانحراف المعياري ١٥ فما العلامة الخام المناظرة للعلامة المعيارية ع = ٢؟

أ) ١٠٣   ب) ١٠٨   جـ) ١٠٤   د) ١٠٥

٤) ما نسبة المساحة تحت (ع = ٢,٨٥)؟

أ) ٠,٩٩٧٨   ب) ٠,٠٠٢٢   جـ) ٠,٠٣٢٢   د) ٠,٩٧٨٨

٥) ما نسبة المساحة بحيث (٠,٩٦ < ع < ١,٦٥) :

أ) ٠,٠٩٩١   ب) ٠,١١٩٠   جـ) ٠,٦٩٠٠   د) ٠,٨٨٠٩

٦) ما مجموع جميع العلامات المعيارية لتوزيع طبيعي؟

أ) ١   ب) ٠   جـ) -١   د) ٠,٥٠٠٠

٧) إذا كانت العلامات المعيارية لخمسة طلاب كما يلي ١,٥، صفر ، $\frac{-٣}{٢}$، أ ، $\frac{-١}{٢}$ فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ١   ب) $\frac{٣}{٢}$ جـ) $\frac{-١}{٢}$ د) $\frac{١}{٢}$

٨) ما نسبة المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي المعياري والواقعة فوق (ع = ٠,٧٥)

أ) ٠,٢٢٦٦   ب) ٠,٢٧٣٤   جـ) ٠,٧٧٣٤   د) ٠,٥٧٢١

س٢: إذا كانت العلامتان المعياريتان المناظرتان للعلامتين ٧١ ، ٥٣ هما ٢ ، -١ على الترتيب، أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات الخام لطلبة الصف.

س٣: خط إنتاج في مصنع ينتج أكياساً من الأرز بوسط حسابي يساوي ١,٠١كغم، وبانحراف معياري يساوي ٠,٠٢ كغم. أجد:

أ) نسبة الأكياس التي كتلتها أقل من ١,٠٣كغم.

ب) نسبة الأكياس التي تتراوح كتلها بين ١كغم و ١,٠٥كغم.

س٤: إذا ارتبط عمر بطارية السيارة بالمسافة التي تقطعها السيارة باستعمال هذه البطارية، وعلم أن عمر أحد أنواع بطاريات السيارات يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ١٠٠٠٠٠كم، وبانحراف معياري ١٠٠٠٠كم. وأنتجت إحدى الشركات ٢٠٠٠٠ بطارية من هذا النوع في الشهر. أجد:

أ) عدد البطاريات التي تتراوح أعمارها بين ٩٠٠٠٠كم، ١١٠٠٠٠كم.

ب) عدد البطاريات التي تزيد أعمارها على ١٢٠٠٠٠كم.

ج) النسبة المئوية للبطاريات التي تتراوح أعمارها بين ٨٠٠٠٠كم، ١١٠٠٠٠كم.

س٥: نادي رياضي مكون من ٤٠٠ عضو تتبع أعمارهم التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٤٠ سنة وبانحراف معياري ٥ ، أجد:

أ) عدد الأعضاء الذين تزيد أعمارهم على ٥٠ سنة.

ب) عدد الأعضاء الذين تتراوح أعمارهم بين ٣٥ سنة إلى ٤٥ سنة.

س٦: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
أجد العلامة المعيارية			
أجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي			
أحل مسائل منتمية لايجاد كل من الوسط والانحراف المعياري			
أوظف المنحنى الطبيعي في حل مشكلات حياتية			

الوحدة ٢

النهايات والاتصال

Limits and Continuity

جدار الضم والتوسع العنصري قسّم فلسطين إلى مجمعات منفصلة، أناقش كيف يمكن جعل مدن فلسطين متصلة.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف النهايات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إلى مفهوم نهاية الاقتران عند نقطة.

٢. إيجاد نهاية الاقتران عند نقطة باستخدام الجدول، والرسم البياني.

٣. إيجاد نهاية اقتران متعدد القاعدة عند نقطة.

٤. التعرف إلى نهاية الاقتران في المالانهاية باستخدام القوانين.

٥. بحث اتصال اقتران عند نقطة.

٢-١ نهاية الاقتران: Limit of a function

نشاط (١):

تمتاز الأجهزة الحديثة بسعة وسائط التخزين التي تستخدم لتخزين المعلومات، فعادة تخزن هذه المعلومات بشكل رقمي على وسائط التخزين المتصلة بالحاسوب لذاكرة القراءة ROM وذاكرة الوصول العشوائي RAM فإذا استخدم إبراهيم جهازاً سعته ٨ جيجابايت، وسجل في الجدول الآتي السعة المستخدمة، والسعة الحرّة، فكانت كما يأتي:

السعة المستخدمة س	...	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	$\leftarrow$ ...	٣	$\rightarrow$ ...	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩	...
السعة الحرّة ص	...	٤,٩	٤,٩٩	٤,٩٩٩	$\leftarrow$ ...	٥	$\rightarrow$ ...	٥,٠٠١	٥,٠١	٥,١	...

وبفرض أن السعة المستخدمة س والسعة الحرّة ص فإن العلاقة بين س ، ص تكون ص = ٨ − س

ويقابل ٣,٠١ من السعة المستخدمة ٤,٩٩ جيجابايت من السعة الحرّة.

ويقابل ٣,٠٠١ جيجابايت من السعة المستخدمة .... جيجابايت من السعة الحرّة.

يقابل .... جيجابايت من السعة المستخدمة ٥,٠١ جيجابايت من السعة الحرّة.

يلاحظ من الجدول أنه كلما اقتربت السعة المستخدمة (س) من اليمين من العدد ٣ يقابل ذلك اقتراب السعة الحرّة (ص) من اليمين من العدد ٥.

وكذلك اقتراب السعة المستخدمة من اليسار من العدد ٣ يقابلها اقتراب السعة الحرّة من اليسار من العدد ....

قارن بين السعة الحرّة من اليسار ومن اليمين، عندما تقترب السعة المستخدمة من العدد ٣.

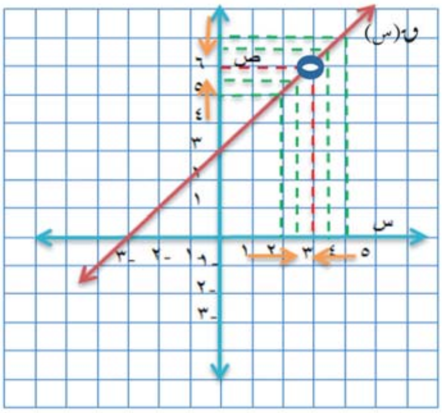
نشاط (٢):

ليكن ق(س) = س+١ ، س ∈ ح ، فإنه عندما تقترب س من العدد ٤ من اليمين فإن ق(س) يقترب من ٥، وعندما تقترب س من العدد ٤ من اليسار فإن ق(س) يقترب ....

تعريف: نهاية الاقتران ق(س) عند نقطة:

- كلما اقتربت قيم س من العدد أ من جهة اليمين اقتربت قيم ق(س) المقابلة لها من عدد حقيقي معين (ل) يعبر عنها بالصورة $\lim\limits_{س \leftarrow أ^{+}}$ ق(س) = ل.
- كلما اقتربت قيم س من العدد أ من جهة اليسار اقتربت قيم ق(س) المقابلة لها من عدد حقيقي معين (ل) يعبر عنها بالصورة $\lim\limits_{س \leftarrow أ^{-}}$ ق(س) = ل.
- إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow أ^{-}}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow أ^{+}}$ ق(س) = ل فإن $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) موجودة ويكون $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ل.

مثال (١): الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران:



$\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س}^2 - ٩}{\text{س} - ٣}$ ، س $\neq$ ٣ أجد ما يأتي:

١) ق(٣) (إن وجدت)

٢) نهاية ق(س) عندما تقترب س من العدد ٣ (إن وجدت)

الحل: بملاحظة الشكل، أجد أن:

١) ق(س) غير معرف عندما س = ٣

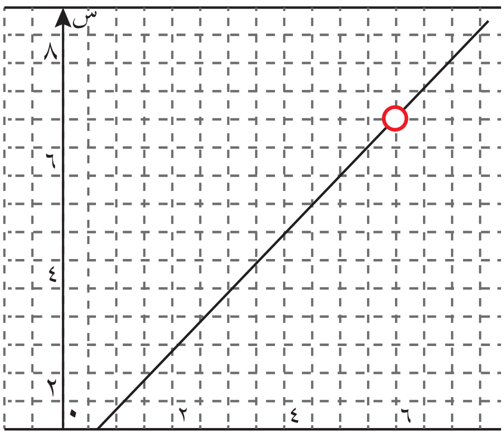
٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٦ وكذلك $\underset{\text{س} \leftarrow ٣^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٦ أي أن $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٦

أفكر وأناقش: هل توجد علاقة بين وجود النهاية عندما تقترب س من س_1 ووجود صورة س_1 في الاقتران؟

نشاط (٣):

يوضح الشكل المجاور منحنى ق(س) = $\dfrac{\text{س}^2 - ٥\text{س} - ٦}{\text{س} - ٦}$ ، س $\neq$ ٦

$\text{ق(س)} = \dfrac{(\text{س} - ٦)\ (\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٦)}$ = س+١ ، س $\neq$ ٦



أكمل الجدول الآتي:

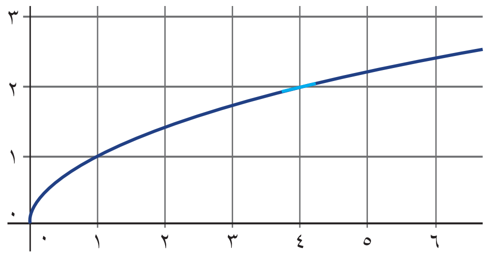
س	...	٦,١	٦,٠١	...	...	٦	...	٥,٩٩٩	...	...
ق(س)	...	٧,١	٧,٠١	...	...	غير معرفة	...	٦,٩٩٩	...	...

$\underset{\text{س} \leftarrow ٦^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ... ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٦^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ... أي أن $\underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ...

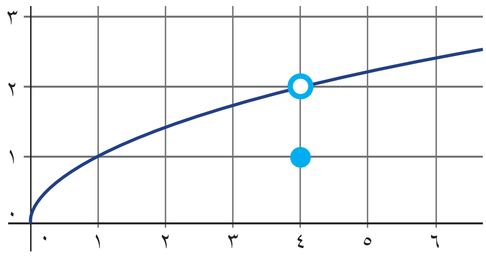
تمارين ومسائل (٢-١)

س١: بالاعتماد على منحنيات الاقترانات الآتية: ن(س) ، هـ(س) ، ك(س) ، م(س) أجد ما يأتي:

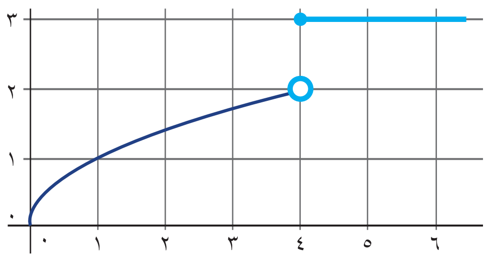
ن(س)



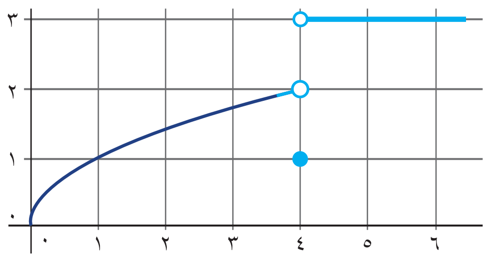
هـ(س)



ك(س)



م(س)



أ) ن(٤) = ...

ب) نهــا (س ← ٤) ن(س) = ...

ج) ك(٤) = ...

د) نهــا (س ← ٤) ك(س) = ...

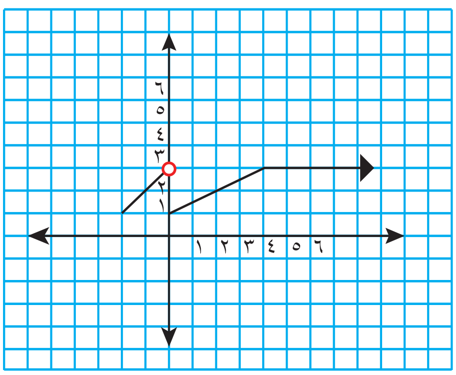
هـ) هـ(٤) = ...

و) نهــا (س ← ٤) هـ(س) = ...

ز) م(٤) = ...

ح) نهــا (س ← ٤) م(س) = ...

س٢: أعتمد الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ن(س) لإيجاد:



أ) نهــا (س ← ٤) ن(س)

ب) نهــا (س ← ٠^-) ن(س)

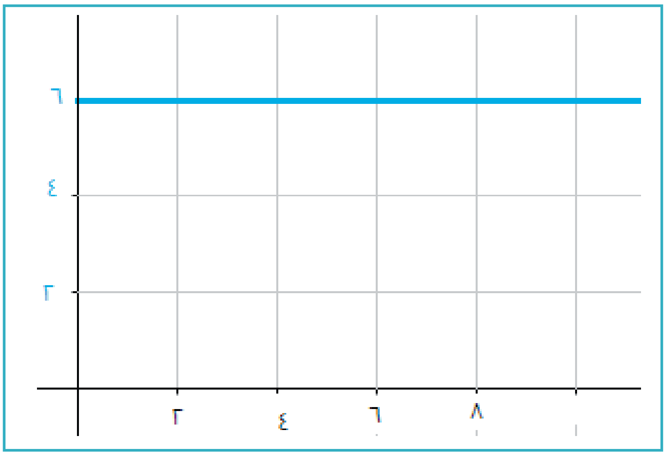
ج) نهــا (س ← ٠^+) ن(س)

د) نهــا (س ← ٠) ن(س)

٢-٢ قوانين النهايات Limits Rules

نشاط (١):

تعتبر البطاريات "الأعمدة الجافة" مصدراً من مصادر الطاقة الكهربائية، حيث تقوم بتزويد الدارة بالطاقة عن طريق المفتاح الكهربائي، عندما يكون المفتاح مغلقاً، ويسمى التيار الذي يسري في الدارة المغلقة تياراً مستمراً DC "Direct Current" وتبقى قيمة هذا النوع من التيار واتجاهه ثابتين مع مرور الزمن، فإذا استخدم طالب بطارية ذات مصدر جهد ثابت مقداره ٦ فولت، فإنه يمكن تمثيل الجهد مع مرور الزمن بالشكل المجاور:



الزمن	...	...	٢,٠١	٢,٠٠١ ←	٢	→ ١,٩٩٩	١,٩٩	...	...
الجهد	...	٦	...	...	...	...	٦	...	...

الجهد عندما يقترب الزمن من ثانيتين هو ٦

الجهد عندما يقترب الزمن من ٣ ثوانٍ هو ٦

الجهد عندما يقترب الزمن من ٤ ثوانٍ هو .....

الجهد عندما يقترب الزمن من ن ثانية هو .....

يمكن تمثيل الجهد بالاقتران ت(ن) = ...

استخدم الجدول في إيجاد $\lim_{ن \to ٢}$ ت(ن)

قواعد إيجاد النهايات:

- **قاعدة (١):** إذا كان ق(س) = جـ فإن $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = جـ حيث أ، جـ $\in$ ع

- **قاعدة (٢):** إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ل، $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ك وكان ك، ل، جـ أعداداً حقيقية، فإن:

١) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ (ق(س) $\pm$ هـ(س)) = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) $\pm$ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ل $\pm$ ك

٢) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ جـ ق(س) = جـ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = جـ $\times$ ل

٣) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ (ق(س) $\times$ هـ(س)) = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) $\times$ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ل $\times$ ك

٤) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \dfrac{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\text{ ق(س)}}{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\text{ هـ(س)}} = \dfrac{\text{ل}}{\text{ك}}$ ، ك $\neq$ ٠

٥) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق^{ن}(س) = ($\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س))^{ن} = (ل)^{ن} ، ن $\in$ ط* .

مثال (١): إذا كان $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٤ ، $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ⁻٣

١) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ (ق(س) + هـ(س)) = $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) + $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ٤ + ⁻٣ = ١

٢) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ (٢ق(س) − ٣هـ(س)) = ٢ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) − ٣ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ٨ − ⁻٩ = ١٧

٣) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ (ق(س) $\times$ ٢هـ(س)) = $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) $\times$ ٢ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ٤ $\times$ ٢ $\times$ ⁻٣ = ⁻٢٤

٤) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \dfrac{\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\text{ ق(س)}}{\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\text{ هـ(س)}} = \dfrac{٤}{⁻٣} = \dfrac{⁻٤}{٣}$

٥) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق^{٢}(س) = ($\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س))^{٢} = (٤)^{٢} = ١٦

أتذكّر: اقتران كثير الحدود هو اقتران يكون على الصورة:

ق(س) = أ$_{ن}$ س^{ن} + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + أ$_{ن-٢}$ س$^{ن-٢}$ + . . . + أ$_{٠}$ حيث ن $\in$ ط، أ$_{ن}$ $\in$ ع

- **قاعدة (٣):** إذا كان ق(س) كثير حدود، فإن $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ق(أ)

مثال (٢): إذا كان ق(س) = ٣س^{٢} + ٢ أجد $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)

الحل: بما أن ق(س) كثير حدود، فإن $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ق(٢) = ٣(٢)^{٢} + ٢ = ١٤

أتذكر: الاقتران النسبي هو اقتران يمكن كتابته على الصورة م(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، ق(س)،هـ(س) كثيرا حدود، هـ(س) ≠ صفر

لإيجاد نهاية الاقتران النسبي م(س) نلجأ إلى التعويض المباشر:

إذا كان التعويض المباشر يعطي $\frac{صفر}{صفر}$ فإن هذه الكمية غير معينة، وعندها نلجأ إلى التحليل، ثم الاختصار، ثم التعويض.

نشاط (٢):

إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢} - ٥س}$ ، س ≠ ٠،٥ ، جد:

أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)

ب) $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهــا}}$ ق(س)

الحل: أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ $\frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢} - ٥س}$ بالتعويض المباشر

= ....

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢٥}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}$

بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ وهي كمية غير معينة، لذا نلجأ للتحليل ثم الاختصار ثم التعويض.

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٥)}(\text{س} + ٥)}{\text{س}\cancel{(\text{س} - ٥)}}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(\text{س} + ٥)}{\text{س}}$$

= ....

نشاط (٣):

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٤ - \text{س}^{٢}}{\text{س} - ٢}$

عند التعويض المباشر، نحصل على: $\dfrac{٤ - ٤}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$ وهي كمية غير معينة.

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٤ - \text{س}^{٢}}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(٢ - \text{س})(٢ + \text{س})}{(\text{س} - ٢)} = \text{................} = -\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}(٢ + \text{س}) = \text{..............}$$

نشاط (٤):

جد $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٣} + ٢٧}{(\text{س} + ٣)}$

عند التعويض المباشر نحصل على ....

$$\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٣} + ٢٧}{(\text{س} + ٣)} = \text{......................} = \underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}}\text{.................}$$

تمارين ومسائل (٢-٢)

س١: إذا كان $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\ ق(س) = -٢$ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\ هـ(س) = ٣$. أجد النهايات الآتية:

أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(٢ق^{٢}(س) - هـ(س)\right)$

ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{٥ق(س)}{هـ^{٢}(س)+س}$

ج) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(٤ق(س) + س^{٢} - ٣\right)$

س٢: جد النهايات الآتية:

أ) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهــا}} \dfrac{٣س^{٢} - ١٢س}{س^{٢} - ١٦}$

ب) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{٣} - ١}{س^{٢} - ١}$

ج) $\underset{س \leftarrow \sqrt{٥}}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{٢} - ٥}{س - \sqrt{٥}}$

س٣: إذا كان $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{أ(س^{٢} - ٩)}{س - ٣} = ٢٤$ فما قيمة الثابت أ .

س٤: إذا كان $ق(س) = \dfrac{س^{٢} - ٢س}{س^{٢} + ٢س - ٨}$ ، $س \neq ٢$، $س \neq -٤$ ، أجد $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\ ق(س)$.

٢-٣ نهاية الاقتران متعدد القاعدة: Limit of Multi Rules Function

نشاط (١):

يعتبر انقطاع التيار الكهربائي عن المنازل في فصل الشتاء حدثاً كبيراً، فالكهرباء تنير البيوت وتزودها بالطاقة، وتستخدم شركة الكهرباء التيار المتناوب AC (Alternative Current) وهو متغير في القيمة والاتجاه دورياً بمرور الزمن، ولتقديم خدمة أفضل للمواطنين تسعى شركات الكهرباء إلى تشجيع المواطنين على تسديد المستحقات المترتبة عليهم، فإذا قدمت إحدى الشركات عرضاً يقضي بخصم ربع المستحقات عند التسديد إذا كانت هذه المستحقات مئة دينار أو أكثر، وخصم مبلغ ثابت قدره ٢٥ ديناراً إذا كانت هذه المستحقات بين ٨٠ و ١٠٠ دينار.

يمكن تمثيل العرض بالعلاقة الآتية، حيث تمثل س المبلغ المستحق:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢٥ & ، \ ٨٠ < \text{س} < ١٠٠ \\ \frac{١}{٤}\,\text{س} & ، \ \text{س} \geqslant ١٠٠ \end{cases}$$

قيمة الخصومات لشخص دفع مبلغ ٨٥ ديناراً هو ٢٥ديناراً.

قيمة الخصم لشخص دفع مبلغ ١٢٠ ديناراً هو ....

قيمة الخصم لشخص دفع مبلغ ٢٠٠ دينار هو ....

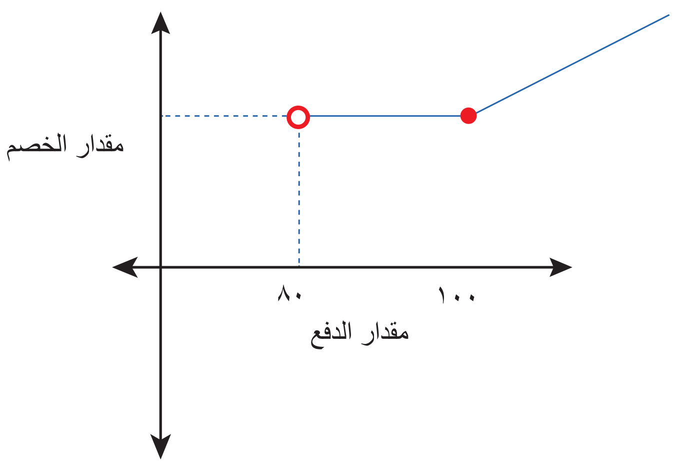
هل قيمة الخصم تساوي ٢٥ ديناراً عندما يقترب مبلغ المستحقات من ١٠٠ دينار؟

إذا مثلت علاقة الخصم بالشكل المجاور:

فإن $\underset{\text{س} \to ١٠٠^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} =$ ....

$\underset{\text{س} \to ١٠٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} =$ ....

$\underset{\text{س} \to ١٠٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} =$ ....



قاعدة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متعدد القاعدة، ويُغير من قاعدته عند س = أ، وكانت $\lim_{س \leftarrow أ^+}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow أ^-}$ ق(س) = ل

فإن $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) موجودة وتساوي ل.

مثال (١): إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س+١، & س > ٢ \\ س^٢+١، & س \leqslant ٢ \end{cases}$ ، جد:

١) $\lim_{س \leftarrow ٤}$ ق(س)   ٢) $\lim_{س \leftarrow ١}$ ق(س)   ٣) $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س)   ٤) $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س)   ٥) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س)

الحل: ١) $\lim_{س \leftarrow ٤}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٤}$ (٢س + ١) = ٩

٢) $\lim_{س \leftarrow ١}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ١}$ (س^٢ + ١) = ٢

٣) $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (٢س + ١) = ٥

٤) $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (س^٢ + ١) = ٥

٥) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ٥

مثال (٢):

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٥س + ٤}{س - ٤} & ، س \neq ٤ \\ ١- & ، س = ٤ \end{cases}$ فإن

١) $\lim_{س \leftarrow ٤}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٤}$ $\frac{س^٢ - ٥س + ٤}{س - ٤}$ = $\lim_{س \leftarrow ٤}$ $\frac{(س - ٤)(س - ١)}{س - ٤}$

= $\lim_{س \leftarrow ٤}$ س − ١

= ٣

٢) ق(٤) = $^-$١   (ماذا تلاحظ؟)

تمارين ومسائل (٢-٣)

س١: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س - ٢ & ، س < ٠ \\ س^{٢} - ٢ & ، س \geqslant ٠ \end{cases}$ ، أجد $\underset{س \leftarrow -١}{نهـا} ق(س)$، $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} ق(س)$، $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} ق(س)$، إن وُجدت.

س٢: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس^{٢} - ٩ & ، س \leqslant ١ \\ \dfrac{١ - س}{س - ١} & ، س > ١ \end{cases}$ ، أجد قيمة أ إذا علمت أن $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} ق(س)$ موجودة.

س٣: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ١٦}{س + ٤} & ، س \neq {}^{-}٤ \\ ب & ، س = {}^{-}٤ \end{cases}$ ، أجد قيمة ب إذا علمت أن $\underset{س \leftarrow -٤}{نهـا} ق(س) = ق({}^{-}٤)$.

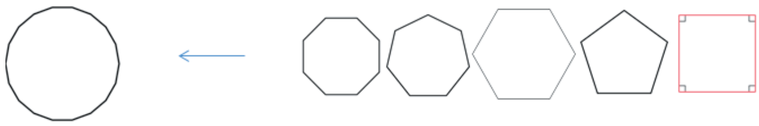
س٤: إذا علمت أن $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \dfrac{س^{٢} - أ^{٢}}{س - أ} = \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} (س + ٥)$، $س \neq أ$ ، أجد قيمة/قيم أ .

س٥: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٢ & ، س \leqslant ١ \\ ٤س - ١ & ، س > ١ \end{cases}$ ، أجد $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} ق(س)$، $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} ق(س)$، $\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} ق(س)$.

٢-٤ نهاية الاقتران عندما س ← ∞ Limit of afunction at Infinity

نشاط (١):

الرياضيات فن وجمال، وللهندسة حصة كبيرة فيها. يتميز الثوب الفلسطيني بمطرزات هي أشكال هندسية منتظمة وغير منتظمة، وضمن معرض فلسطين للعلوم والتكنولوجيا، وظّف خليل برنامج الأوتكاد في تصميم برنامج يساعد على تطريز الثوب وزيادة جماله، فأضاف ضلعاً إلى المربع ليصبح خماسياً، وأضاف ضلعاً للخماسي ليصبح سداسياً وهكذا ...



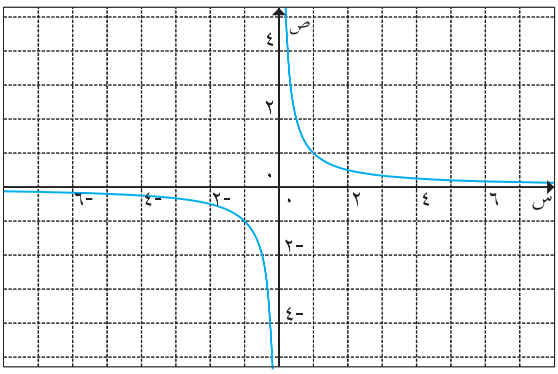
المتتالية التي تمثل عدد الأضلاع في كل شكل هي ٤ ، ٥ ، ... ، ... ، ..... ويمكن أن نستمر في النمط إلى مالانهاية. ويسمى الشكل عندها .... وإذا كان محيط أي شكل من الأشكال السابقة يساوي وحدة واحدة، عندها يمكننا إيجاد طول ضلع الشكل، باستخدام العلاقة:

طول الضلع = المحيط ÷ عدد الأضلاع.

طول ضلع المربع = $\frac{١}{٤}$ ، طول ضلع الخماسي المنتظم = $\frac{١}{٥}$ ، وهكذا...

المتتالية التي تمثل أطوال الأضلاع هي $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، .... ،

إذا رمزنا لعدد الأضلاع بالرمز س، يكون طول الضلع ممثلاً بالعلاقة ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، وكلما اقتربت س من ∞ اقترب $\frac{١}{س}$ من الصفر، نعبّر عن ذلك رياضياً $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{١}{س} = ٠$.



قاعدة (١):

إذا كان أ ، جـ عددين حقيقيين، ن عدداً صحيحاً موجباً، فإن:

١) $\lim\limits_{س \leftarrow \infty}$ جـ = جـ

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{أ}{س} = ٠$.

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow \infty}$ سⁿ = ∞

قاعدة (٢):

الصور غير المعينة: $\infty - \infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty \times ٠$.

$\infty \pm$ جـ $= \infty$ ، جـ عدد حقيقي.

$^-\infty \pm$ جـ $= {}^-\infty$ ، جـ عدد حقيقي.

$\infty \times$ جـ $=$ جـ $\times \infty = \infty$ ، جـ عدد حقيقي موجب.

$\infty \times$ جـ $=$ جـ $\times \infty = {}^-\infty$ ، جـ عدد حقيقي سالب.

مثال (١): أجد $\lim\limits_{س \to \infty} (٣س^٢ - ٥س + ١)$

الحل:

$\lim\limits_{س \to \infty} (٣س^٢ - ٥س + ١)$

$= \lim\limits_{س \to \infty} س^٢ \left(٣ - \frac{٥}{س} + \frac{١}{س^٢} \right)$ (لماذا؟)

$= \lim\limits_{س \to \infty} س^٢ \left(\lim\limits_{س \to \infty} ٣ - \lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥}{س} + \lim\limits_{س \to \infty} \frac{١}{س^٢} \right)$

$= \infty$

مثال (٢): أجد $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{٥س - ٢س^٢ + ١}{٣س^٢ + ٢} \right)$

الحل:

$\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{٥س - ٢س^٢ + ١}{٣س^٢ + ٢} \right)$

$= \lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^٢ \left(\frac{٥}{س} - ٢ + \frac{١}{س^٢} \right)}{س^٢ \left(٣ + \frac{٢}{س^٢} \right)}$ (لماذا؟)

$= \frac{^-٢}{٣}$ (لماذا؟)

مثال (٣): أجد $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{٥س + ١}{س^٢ + ٤}\right)$

الحل: $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{٥س + ١}{س^٢ + ٤}\right)$

$= \lim\limits_{س \to \infty} \frac{س\,(٥ + \frac{١}{س})}{س^٢(١ + \frac{٤}{س^٢})}$

$=$ صفر (لماذا؟)

ملاحظة:

إذا كان $ن$ ، $م \in ط$ ، $أ_ن \neq ٠$ ، $ب_م \neq ٠$ فإن $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ_ن س^ن + أ_{ن-١} س^{ن-١} + \ldots\ldots + أ}{ب_م س^م + ب_{م-١} س^{م-١} + \ldots\ldots + ب} =$

١. $\frac{أ_ن}{ب_م}$ إذا كان $ن = م$

٢. صفر إذا كان $ن < م$

٣. $\pm \infty$ إذا كان $ن > م$

تمارين ومسائل (٢-٤)

س١: أجد كلاً من النهايات الآتية:

أ) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}$ س^{٢} (-٥س + ٢)

ب) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٨س^{٣} + ١ - س^{٢} + ٤}{س^{٥} + ٣ + س^{٤} + ١} \right)$

جـ) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(س+٢)(٣س+١)}{(س+١)(س+٣)}$

س٢: إذا كان $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{ن}+٥}{٣س^{٢}+١} = \dfrac{١}{٣}$ جد قيمة ن .

س٣: إذا علمت أن ق(س) = أس + ٣ ، وأن هـ (س) = $\dfrac{٤س^{٣} - ٢س + ١}{س - س^{٣}}$ ، وكان $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}$ هـ (س)

جد قيمة أ .

س٤: أجد كلاً من النهايات الآتية:

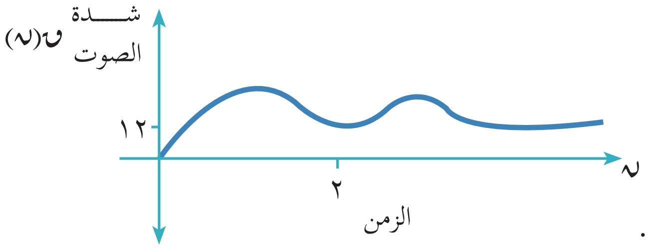
أ) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٥س}{س - ١} - \dfrac{٢س}{س + ١} \right)$

ب) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{س^{٥} - ٣س + ٢}{س^{٢} + ٦} \right)$

٢-٥ الاتصال Continuity

نشاط (١):

يعتبر مكبر الصوت (Amplifier) من الأدوات التكنولوجية المستخدمة بشكل كبير في حياتنا، حيث تلتقط موجات الصوت بواسطة الميكروفون، ثم يتم تحويلها إلى إشارة كهربائية، ويقوم مكبر الصوت بتضخيم هذه الإشارة التي تستقبلها السمّاعة، فتحولها إلى موجات صوتية بمستوى صوت أكبر بكثير من الموجات الصوتية الأصلية الملتقطة من الميكروفون. ولا تنتقل شدة الصوت لحظياً من درجة إلى أخرى، بل تمر بكل القيم التي بينها، ولو مثّلنا شدة الصوت بمنحنى، فسيكون منحنى سلساً ومتصلاً.



إذا كانت شدة الصوت ممثلة بالشكل المجاور، نلاحظ أنه يمكن رسم منحنى هذه العلاقة دون رفع القلم.

مثل هذه العلاقة تكون متصلة، لأنها ترسم دون رفع القلم.

$\underset{ن \leftarrow ^+٢}{\text{نهـا}}$ ق(ن) = ... ، $\underset{ن \leftarrow ^-٢}{\text{نهـا}}$ ق(ن) = ...

$\underset{ن \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(ن) = ... ، ق(٢) = ...

العلاقة بين $\underset{ن \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(ن)، ق(٢) ....

تعريف: الاتصال عند نقطة

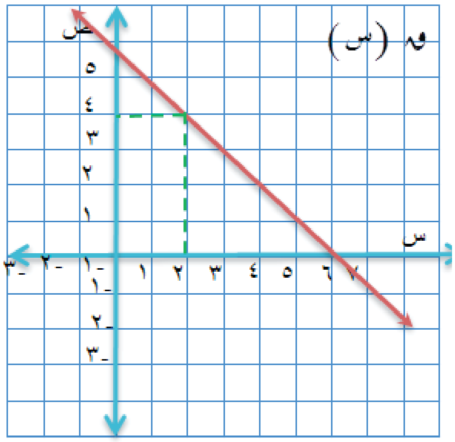
يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = أ ، إذا تحققت الشروط الآتية:

١. ق(أ) موجودة ومعرفة كعدد حقيقي.

٢. $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة.

٣. $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(أ).

نشاط (٢):



في الشكل المجاور:

ق(٢) = ٤

$\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ٤ .

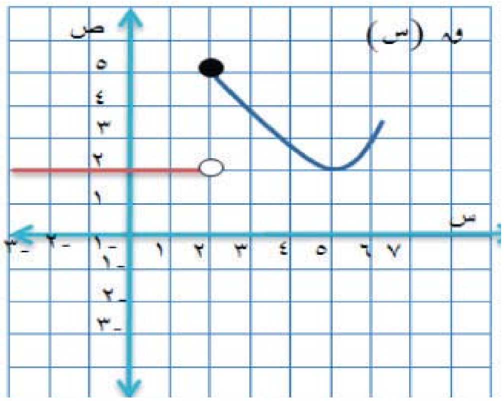
ق(٢) = $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ٤ .

نلاحظ أن الشكل يمثل منحنى الاقتران كثير الحدود ص = ٦ − س وهو متصل دائماً.

قاعدة:

الاقترانات كثيرة الحدود هي اقترانات متصلة في مجالها.

نشاط (٣):



في الشكل المجاور:

ق(٢) = ... ، $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ... لأن..........

هل ق(س) متصل عند س = ٢ ؟

نشاط (٤):

إذا كان ق(س) = ٣س + ١، هـ(س) = س^{٢} .

يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = ٢ لأنه اقتران كثير حدود.

يكون الاقتران هـ(س) متصلاً عند س = ٢ لأن ....

(ق + هـ)(س) متصل عند س = ٢ لأن مجموع اقترانين كثيري حدود يساوي اقتراناً كثير حدود.

(ق − هـ)(س) متصل عند س = ٢ لأن.................................

(ق × هـ)(س) متصل عند س = ٢ لأن ....

ناقش: هل $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$(س) متصلاً عند س = ٢، حيث هـ(س) ≠ ٠

قاعدة:

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = أ فإن:

١. (ق ± هـ)(س) يكون متصلاً عند س = أ .

٢. (ق × هـ)(س) يكون متصلاً عند س = أ .

٣. $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$ (س) يكون متصلاً عند س = أ، حيث هـ(أ) ≠ ٠ .

مثال (٢): إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س^{٢} - ٢ \quad ، \quad س < ٠ \\ س - ٢ \quad ، \quad س \geqslant ٠ \end{cases}$ ، ابحث اتصال الاقتران ق(س) عند س = صفر .

الحل: أبحث شروط الاتصال عند س = صفر لأن الاقتران ق(س) يغير قاعدته عندها.

١) ق(٠) = ٠ − ٢ = $^{-}$٢

٢) $\lim_{س \to ٠^{+}}$ ق(س) = $^{-}$٢ (لماذا؟)

$\lim_{س \to ٠^{-}}$ ق(س) = $^{-}$٢ (لماذا؟)

$\lim_{س \to ٠^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^{-}}$ ق(س) = $^{-}$٢

∴ $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = $^{-}$٢

٣) ق(٠) = $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = $^{-}$٢

∴ ق(س) متصل عند س = ٠

مثال (٣): إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} \quad ، \quad س \neq ١ \\ ٤ \quad ، \quad س = ١ \end{cases}$ ، ابحث اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١.

ابحث اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١.

الحل:

١) ق(١) = ٤

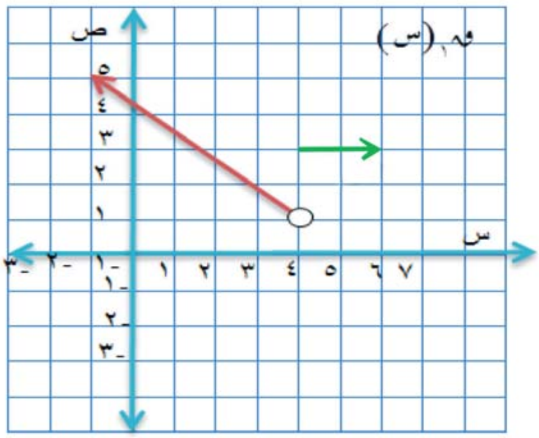
٢) $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٢ (لماذا؟)

٣) $\lim_{س \to ١}$ ق(س) ≠ ق(١)

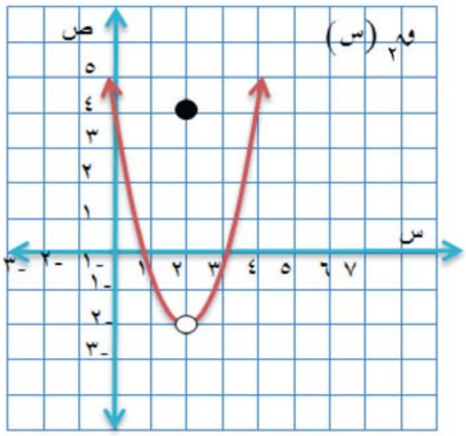
∴ ق(س) غير متصل عند س = ١ .

تمارين ومسائل (٢-٥)

س١: أبيّن سبب عدم اتصال الاقترانات الآتية، عند النقطة المبينة إزاء كل منها.



عند س = ٤



عند س = ٢

س٢: ابحث اتصال الاقترانات الآتية، عند قيم س المشار إليها في كل حالة مما يأتي:

أ) ق(س) = ٣ س − ٦ عند س = ١.

ب) $$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٢س}{س - ٢} &، \quad س \neq ٢ \\ ٧ &، \quad س = ٢ \end{cases}$$ عند س = ٢

س٣: إذا كان $$ق(س) = \begin{cases} ٣ - س &، \quad س < ١ \\ س^{٢} + ١ &، \quad س \geqslant ١ \end{cases}$$ ابحث اتصال الاقتران ق(س)، عند س = ١.

س٤: إذا كان $$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - أ &، \quad س \leqslant ٢ \\ ٣س - ٥ &، \quad س > ٢ \end{cases}$$ متصلاً عند س = ٢، أجد قيمة الثابت أ.

(٢ - ٦) تمارين عامة

س١: أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) ما قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} (\text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢ + ٦)$ ؟

أ) -٦ ب) ١٠ جـ) ٨ د) ٦

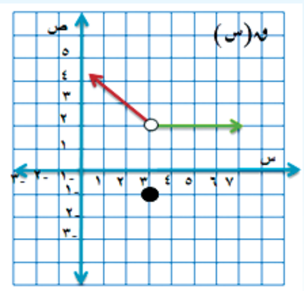
٢) إذا كان $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} ٣\text{ق}(\text{س}) = ٣$، $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \text{هـ}(\text{س}) = ٢$. ما قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} ٢\text{ق}(\text{س}) + \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \text{هـ}^٢(\text{س})$؟

أ) ٣ ب) ٥ جـ) ٦ د) ٨

٣) ما قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٦}$ ؟

أ) $\dfrac{١}{٦}$ ب) $\dfrac{١}{٧}$ جـ) $\dfrac{١}{٨}$ د) غير موجودة

٤) في الشكل المجاور ما قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$؟



أ) ٢ ب) غير موجودة جـ) صفر د) ٣

٥) إذا كان $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ - ٣\text{س}) = -٢$ ما قيمتا الثابت أ ؟

أ) ٢، ١ ب) -٢، -١ جـ) -٢، ١ د) ٢، -١

٦) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٦\text{س}^٤ + ٥\text{س}}{٣\text{س}^٤ + \text{س} + ٤}$. ما قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$؟

أ) -٣ ب) ٢ جـ) صفر د) ∞

٧) إذا كان ق(س) كثير حدود، وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = ٦$ ؛ فما قيمة ق(٥) ؟

أ) ٦ ب) ٥ جـ) ٣ د) ٢

٨) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أس} + ١ \text{ ، } \text{س} \leqslant -٢ \\ -٣ \text{ ، } \text{س} > -٢ \end{cases}$ متصلاً عند س = -٢ ؛ فما قيمة الثابت أ ؟

أ) -٤ ب) -٣ جـ) -٢ د) ٢

٩) إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً عند (س = ١)، وكانت $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ⁻٥ ؛ فما قيمة $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ (ق(١) + س^٢) ؟

أ) ٤ ب) ٣ جـ) ⁻٤ د) ⁻٥

س٢: أجد النهايات الآتية:

أ) $\underset{س \leftarrow ⁻٤}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢س}{س^٢ - ٤} - \frac{س^٢}{س^٢ - ٤} \right)$

ب) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{س}{س^٢ - ٧س}$

جـ) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ - ٢٧}{س^٢ - ٥س + ٦}$

د) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$

س٣: إذا كان $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ + ٢ب س^٢ + ١}{٤س^٢ + ١} = ١$ ، أجد قيمة الثابت ب .

س٤: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٥س - س^٢ & ، س \leqslant ٢ \\ س + ٤ & ، س > ٢ \end{cases}$ ، ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٢.

س٥: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ⁻٧س + أ & ، س < ⁻١ \\ ٣س^٢ + ٢ & ، س \geqslant ⁻١ \end{cases}$ ، متصلاً عند س = ⁻١ ، أجد قيمة الثابت أ.

س٦: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{٢س^٢ - ٦س}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٥ & ، س = ٣ \end{cases}$ ، ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٣.

س٧: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س + ١ & ، س < ٠ \\ ٥ - ٣س^٢ & ، س > ٠ \\ ٥ & ، س = ٠ \end{cases}$ ، أجد:

أ) $\underset{س \leftarrow ⁻٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) ب) $\underset{س \leftarrow ⁺٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) ج) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) د) هل ق متصل عند س = ٠؟

الوحدة ٣ التفاضل Differentiation

أناقش: كيف يمكن إنشاء مثل هذا الميدان بأقل تكاليف ممكنة؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاشتقاق في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إلى مفهوم متوسط التغير للاقتران وإيجاده.
٢. التعرف إلى مفهوم المشتقة الأولى للاقتران، وإيجادها باستخدام التعريف.
٣. التعرف على قواعد الاشتقاق، واستخدامها لإيجاد مشتقات بعض الاقترانات.
٤. إيجاد معادلة المماس، ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة تقع عليه.
٥. إيجاد المشتقة الأولى باستخدام قاعدة السلسلة.
٦. إيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران.
٧. حل مسائل عملية على القيم القصوى.

٣-١ متوسط التغير (Rate of Change):

نشاط:

تعتبر السُّمنة من أسباب كثير من الأمراض، لهذا يلجأ الكثير من الأشخاص إلى المحافظة على كتلهم أو التخفيف من هذه الكتل.

بيسان فتاة فلسطينية اتبعت برنامجاً غذائياً معيناً للتخفيف من كتلتها، حيث كانت كتلتها قبل البدء بهذا البرنامج ٨٠ كغم، وبعد عشرة أيام من اتباعها للبرنامج أصبحت كتلتها ٧٨ كغم، وبعد خمسة أيام أخرى أصبحت كتلتها ٧٧ كغم، ألاحظ التغير في كتلة بيسان في الأيام العشرة الأولى؟

التغير في كتلة بيسان في الأيام العشرة الأولى = ٧٨ − ٨٠ = $^-$٢ كغم، أي أن كتلة بيسان نقصت ٢ كغم.

التغير في كتلة بيسان في الأيام الخمسة التالية ....؟

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً، وتغيرت فيه س من $س_1$ إلى $س_2$ فإن Δ س = $س_2$ − $س_1$ تمثل التغير في س وتقرأ دلتا س.

وبناءً على التغير في س تتغير ص، حيث Δ ص = $ص_2$ − $ص_1$ = ق($س_2$) − ق($س_1$) تمثل التغير في ص.

مثال (١): إذا كان ص = ق(س) =٢س + ٣ جد Δس ، Δص ، عندما تتغير س من $س_1$ = ١ إلى $س_2$ = ٤ .

الحل: Δس = $س_2$ − $س_1$ = ٤ − ١ = ٣

Δص = $ص_2$ − $ص_1$ = ق($س_2$) − ق($س_1$) = ق(٤) − ق(١) = ١١ − ٥ = ٦

تعريف:

يسمى المقدار $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$ متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_1$ إلى $س_2$.

مثال (٢): إذا كان ص= ق(س)= ٢س^{٢} + ٤ ، س ∈ ح ، وتغيرت س من س$_{١}$ = ٢ إلى س$_{٢}$ = ٥، أجد متوسط التغير للاقتران ق(س).

الحل: متوسط التغير = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢}$

$= \frac{٥٤ - ١٢}{٥ - ٢}$

$= ١٤$

مثال (٣): إذا كان ص= ق(س) = ١ − ٣س ، س ∈ ح ، وزادت س من س$_{١}$= ٣ بمقدار ٢، أجد متوسط التغير للاقتران ق(س).

الحل: متوسط التغير = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

Δس = س$_{٢}$ − س$_{١}$

٢ = س$_{٢}$ − ٣ ومنها س$_{٢}$ = ٥

متوسط التغير = $\frac{ق(٥) - ق(٣)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{^-١٤ - ^-٨}{٥ - ٣}$

$= ^-٣$

مثال (٤): إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$= $^-٢$ إلى س$_{٢}$ = ٩ يساوي $^-٦$، أجد:

أ. التغير في ص ب. ق(٩) علماً بأن ق($^-٢$) = ٦

الحل: أ. التغير في س = Δس

= س$_{٢}$ − س$_{١}$

= ٩ − $^-٢$

= ١١

متوسط التغير = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\Delta \text{ص}}{١١} = {}^{-}٦$، ومنها Δص = $^{-}٦ \times ١١ = {}^{-}٦٦$

ب. $\Delta \text{ص} = \text{ص}_٢ - \text{ص}_١$

$= \text{ق}(٩) - \text{ق}({}^{-}٢)$

$^{-}٦٦ = \text{ق}(٩) - ٦$

$\text{ق}(٩) = {}^{-}٦٦ + ٦$

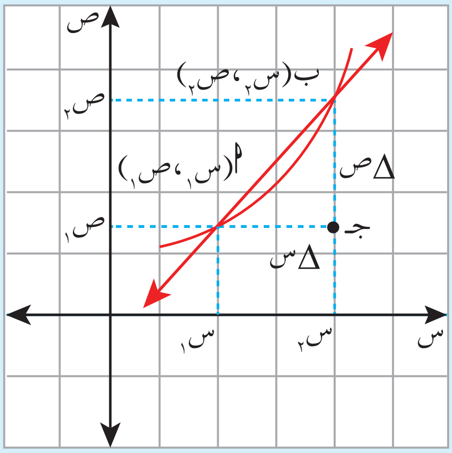
$= {}^{-}٦٠$

أتذكر:

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ص= ق(س)، والنقطتان أ(س$_١$، ص$_١$) ، ب(س$_٢$، ص$_٢$) واقعتين عليه، فإن ميل المستقيم القاطع أب = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$.

ومتوسط التغير للاقتران ص = ق(س) يساوي $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

أي أن متوسط التغير للاقتران يساوي ميل المستقيم القاطع أب.



مثال (٥): تقع النقطتان أ($^{-}١$، $^{-}٣$)، ب(٣، ٩) على منحنى الاقتران ص= ق(س)، أجد ميل المستقيم القاطع أب.

الحل: ميل المستقيم القاطع أب = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$= \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

$= \frac{٩ - {}^{-}٣}{٣ - {}^{-}١}$

$= ٣$

تمارين ومسائل (٣-١)

س١: إذا كان ص = ق(س) = ٥س − ١ جد Δس ، Δص عندما تتغير س:

أ. من $س_١$ = ٢ إلى $س_٢$ = ٣,٨

ب. من $س_١$ = ٤ إلى $س_٢$ = ⁻٢

س٢: أجد متوسط التغير للاقتران ص = ق(س) في الحالات الآتية:

أ. ق(س) = $\sqrt{س - ٣}$ ، عندما تتغير س من $س_١$ = ٧ إلى $س_٢$ = ٤

ب. ق(س) = $س^٢$ − ١ ، عندما $س_١$ = ٢ ، Δس = ٤

س٣: تقع النقطتان أ(-٢، ٥)، ب(٣،١٠) على منحنى الاقتران ص= ق(س)، أجد ميل المستقيم القاطع أب.

س٤: ليكن ص = ق(س) اقتراناً، وكان متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من $س_١$ = ١ إلى $س_٢$ = ٤ هو ١٣، أجد:

أ. التغير في ص.

ب. ق(٤) علما بأن ق(١) = ٦

٣-٢ مفهوم المشتقة الأولى (First Derivative):

نشاط (١):

في ملاعب كرة القدم الفلسطينية هناك هدّافون، ولكل هدّاف مهارات تختلف عن الآخر في تسديد الكرات الثابتة والمتحركة، ويقوم مدرب الفريق بتكليف أمهر هدّافيه بتسديد الكرة باتجاه المرمى حسب موقع خطأ الخصم. وكلما اقتربت المسافة بين مكان التسديد والمرمى، زادت فرصة تسجيل الهدف. لذلك تعتبر ضربة الجزاء هدفاً محققّاً عند كثير من الفرق الرياضية.

علامَ يعتمد الهدّاف في تسديد الكرة باتجاه المرمى؟ السرعة، ....؟

نشاط (٢):

إذا كان ق(س) = ٢س، س_1=٢ ، أكمل الجدول الآتي:

Δس	٣	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٣}$
ق(س_1+Δس)	١٠	......	٦	....	$\frac{١٤}{٣}$
$\frac{\text{ق}(\text{س}_1+\Delta\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\Delta\text{س}}$	٢	٢	....	٢	....

ما علاقة $\underset{\Delta\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_1+\Delta\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\Delta\text{س}}$ ، ومعامل س في ق(س)؟ ....

تعريف:

المشتقة الأولى للاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س_1، ق(س_1)) هي:

$\underset{\Delta\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_1+\Delta\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\Delta\text{س}}$ ويرمز لها بالرمز ق$'$(س_1) أو $\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=\text{س}_1}$ أو $\left.\text{ص}'\right|_{\text{س}=\text{س}_1}$ ،

وللتبسيط يمكن كتابة Δس = هـ ، فتكون ق$'$(س_1) = $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_1+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$

مثال (١): إذا كان ق(س) = ٥ ، أجد ق$^{/}$(٢) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

الحل: $\text{ق}^{/}(٢) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ق}(٢ + \text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{٥ - ٥}{\text{هـ}}$

= صفر.

مثال (٢): إذا كان ق(س) = ٣س، أجد ق$^{/}$(١) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

الحل: $\text{ق}^{/}(١) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ق}(١ + \text{هـ}) - \text{ق}(١)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣(١ + \text{هـ}) - ٣(١)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣ + ٣\text{هـ} - ٣}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\text{هـ}}{\text{هـ}}$

= ٣

نشاط (٣):

إذا كان ق(س) = ٥ − ٢س، أجد ق$^{/}$(٤) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

الحل: $\text{ق}^{/}(٤) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ق}(٤ + \text{هـ}) - \text{ق}(٤)}{\text{هـ}}$

= ....

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{٥ - ٨ - ٢\text{هـ} + ٣}{\text{هـ}}$

= ....

= $^{-}$٢

مثال (٣): إذا كان $\text{ق(س)} = \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{١}$ ، أجد $\text{ق}'\text{(٢)}$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

الحل: $\text{ق}'\text{(٢)} = \underset{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق(٢ + هـ)} - \text{ق(٢)}}{\text{هـ}}$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٣(٢ + هـ)}^{\text{٢}} + \text{١} - (\text{٣} \times \text{٢}^{\text{٢}} + \text{١})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٣(٤ + ٤هـ + هـ}^{\text{٢}}\text{)} + \text{١} - (\text{٣(٤)} + \text{١})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{١٣} + \text{١٢هـ} + \text{٣هـ}^{\text{٢}} - \text{١٣}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{١٢هـ} + \text{٣هـ}^{\text{٢}}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ (١٢} + \text{٣هـ)}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} (\text{١٢} + \text{٣هـ})$$

$$= \text{١٢} + \text{٣} \times \text{٠}$$

$$= \text{١٢}$$

مثال (٤): إذا كان $\text{ق(٢)} = \text{٨}$، $\text{ق}'\text{(٢)} = \text{٢}$، أجد $\underset{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق(٢)} - \text{ق(٢ + هـ)}}{\text{٥هـ}}$

الحل: $\underset{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق(٢)} - \text{ق(٢ + هـ)}}{\text{٥هـ}}$

$$= \dfrac{-\text{١}}{\text{٥}} \underset{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق(٢ + هـ)} - \text{ق(٢)}}{\text{هـ}}$$ (لماذا؟)

$$= \dfrac{-\text{١}}{\text{٥}} \text{ق}'\text{(٢)}$$ (لماذا؟)

$$= \dfrac{-\text{١}}{\text{٥}} \times \text{٢}$$

$$= \dfrac{-\text{٢}}{\text{٥}}$$

مثال (٥): إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير في الفترة [-٣، -٣ + هـ] يساوي $\dfrac{\text{هـ}^{٢} - \text{٥هـ}}{\text{هـ}}$

أجد ق$'$(٣).

الحل: $\text{متوسط التغير} = \dfrac{\text{ق}(٣ + \text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{\text{هـ}} = \dfrac{\text{هـ}^{٢} - \text{٥هـ}}{\text{هـ}}$

$$\text{ق}'(٣) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{ق}(٣ + \text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{هـ}^{٢} - \text{٥هـ}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{هـ}(\text{هـ} - ٥)}{\text{هـ}} = -٥$$

ألاحظ أن ق$'$(س$_١$) تساوي نهاية متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [س$_١$، س$_١$+ هـ] عندما تؤول هـ إلى الصفر.

نشاط (٤):

إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٣ ، أجد ق$'$(س) باستخدام تعريف المشتقة، ثم أجد ق$'$(٢).

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{(\text{س} + \text{هـ})^{٢} + ٣ - (\text{س}^{٢} + ٣)}{\text{هـ}} =$ ....

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{٢س هـ} + \text{هـ}^{٢} + ٣ - \text{س}^{٢} - ٣}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{٢س هـ} + \text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} =$$ ....

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} (\text{٢س} + \text{هـ})$$

$$= \text{٢س}$$

ومنها ق$'$(٢) = ٢ × ٢

= ٤

تمارين ومسائل (٣-٢)

س١: باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، أجد $ق'$(س) عند النقطة المعطاة في كل حالة:

أ. ق(س) = ٢س − ٧ ، س = $^-$٣

ب. ق(س) = ٣ − س ، س = ٢

جـ. ق(س) = س^٢ + س ، س = ٠

س٢: إذا كان $ق'$(٣) = ٨ ، أجد:

أ. $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣ + هـ) - ق(٣)}{هـ}$

ب. $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣ + هـ) - ق(٣)}{٢هـ}$

ج. $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣) - ق(٣ + هـ)}{هـ}$

س٣: إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) في الفترة [٣، ٣ + هـ] يساوي $\frac{٢}{(^-١ + هـ)}$ أجد $ق'$(٣).

س٤: إذا كانت Δص = $\frac{٧هـ - هـ^٢}{٤}$ هي التغير في الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_١$ = ٥ إلى س$_٢$ = ٥ + هـ ، أجد $ق'$(٥).

٣-٣ قواعد الاشتقاق (١): (Differentiation Rules)

نشاط (١):

شاهدت منى على طاولة والدها لوحة كما في الشكل المجاور، فسألت والدها: ما هذه اللعبة يا أبي؟ أجابها الأب: إنها لعبة الشطرنج. هل تسمح لي يا أبي أن العب معك هذه اللعبة؟ قال لها: يا بنيّتي لهذه اللعبة قواعد، يجب على اللاعب تعلمها لكي يحرك القطع المختلفة المكونة لهذه اللعبة. فمثلاً يتحرك الملك خطوة واحدة في كل الاتجاهات. إن تعلّم قواعد اللعبة، أو المهارة يسهّل تطبيقها وفهمها وإتقانها.

ومن أسماء القطع في لعبة الشطرنج :الفرس، والفيل. كيف تتحرك هذه القطع؟ ....

نشاط (٢):

حاول همّام إيجاد ق$^{/}$(٢) حيث ق(س) = ٢س^{٥} + س^{٣} − ٢س^{٢} باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، فبدأ بالحل بالطريقة التي تعلمها في الدرس السابق كما يأتي:

$$\text{ق}^{/}(\text{٢}) = \underset{\text{هـ} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{٢} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{٢})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}^{/}(\text{٢}) = \underset{\text{هـ} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢}(\text{٢} + \text{هـ})^{\text{٥}} + (\text{٢} + \text{هـ})^{\text{٣}} - \text{٢}(\text{٢} + \text{هـ})^{\text{٢}} - \text{٦٤}}{\text{هـ}}$$

فوجد صعوبة في إيجاد هذه النهاية، كيف سيجد همّام ق$^{/}$(٢) ؟

قاعدة (١):

إذا كان ق (س) = جـ حيث جـ عدد حقيقي، فإن ق$^{/}$(س) = صفر. ∀ س ∈ ح.

مثال (١): إذا كان ق (س) = ٣ ، أجد ق$^{/}$(س)، ق$^{/}$(٥).

الحل: ق$^{/}$(س) = صفر لجميع قيم س ∈ ح

ق$^{/}$(٥) = صفر

قاعدة (٢):

إذا كان $ق(س) = س^{ن}$ فإن $= ق^{/}(س) = ن س^{ن-١}$ ، $ن$ عدد حقيقي.

مثال (٢): أجد المشتقة الأولى $\frac{ءص}{ءس}$ في كل من الحالات الآتية:

أ) $ص = س^{٤}$

ب) $ص = س^{-٥}$ ، $س \neq ٠$

ج) $ص = \frac{١}{س^{٣}}$ $س \neq ٠$

د) $ص = \sqrt{س}$ ، $س \geqslant ٠$

الحل: أ) $ص = س^{٤}$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٤س^{٤-١} = ٤س^{٣} ، \forall س \in ح$$

ب) $ص = س^{-٥}$ ، $س \neq ٠$

$$\frac{ءص}{ءس} = -٥ س^{-٥-١} = -٥س^{-٦}$$

ج) $ص = \frac{١}{س^{٣}} = س^{-٣}$ ، $س \neq ٠$

$$\frac{ءص}{ءس} = -٣ \times س^{-٣-١} = -٣س^{-٤} = \frac{-٣}{س^{٤}}$$

د) $ص = \sqrt{س}$ ، $س \geqslant ٠$

$$= س^{\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}س^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢س^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}} ، س > ٠$$

قاعدة (٣):

إذا كان الاقترانان $ق(س)$، $هـ(س)$ قابلين للاشتقاق عند س، وكانت $أ \in ح$، وكان $هـ(س) = أق(س)$،

فإن $هـ^{/}(س) = أ ق^{/}(س)$.

مثال (٣): إذا كان ق(س) = ٢س^{٥} ، جد ق$^{/}$(س)، ق$^{/}$(-١).

الحل: ق(س) = ٢س^{٥}

ق$^{/}$(س) = ٢ × ٥س$^{٥-١}$ = ١٠س^{٤}

ق$^{/}$(-١) = ١٠ × (-١)^{٤}

= ١٠ × ١ = ١٠

قاعدة (٤):

إذا كان الاقترانان ك(س)، ع(س) قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = ك(س) + ع(س)، فإن ق$^{/}$(س) = ك$^{/}$(س) + ع$^{/}$(س)

مثال (٤): إذا كان ك(س) = س^{٢} ، ع(س) = ٢س، ق(س) = ك(س) + ع(س)، جد ق$^{/}$(س) ، ق$^{/}$(٠) ؟

الحل: ق$^{/}$(س) = ك$^{/}$(س) + ع$^{/}$(س)

= (٢س) + (٢)

= ٢س + ٢

ق$^{/}$(٠) = ٢ × ٠ + ٢ = ٢

قاعدة (٥):

إذا كان الاقترانان ك(س)، ع(س) قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = ك(س) − ع(س)، فإن ق$^{/}$(س) = ك$^{/}$(س) − ع$^{/}$(س)

ويمكن تعميم القاعدتين السابقتين لتشمل أكثر من اقترانين.

مثال (٥): إذا كان ق(س) = س^{٢} − ٥س + ٦ ، جد ق$^{/}$(س)، ق$^{/}$(٣)

الحل: ق(س) = س^{٢} − ٥س + ٦

ق$^{/}$(س) = ٢س − ٥ + صفر

ق$^{/}$(٣) = ٢ × ٣ − ٥

= ١

مثال (٦): إذا كان ك$^{/}$(١) = ٣، ع$^{/}$(١) = ٢ وكان ق(س) = ك(س) − ٢ع(س)، جد ق$^{/}$(١) ؟

الحل: ق$^{/}$(س) = ك$^{/}$(س) − ٢ ع$^{/}$(س)

ق$^{/}$(١) = ك$^{/}$(١) − ٢ ع$^{/}$(١)

= ٣ − ٢ × ٢

= $^{-}$١

مثال (٧): إذا كان ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ صفر ، أجد $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

الحل: $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} = ق^{/}(س)$

لكن ق(س) = $\frac{١}{س}$ = س$^{-١}$

ق$^{/}$(س) = $^{-}$١س$^{-٢}$

$= \frac{^{-}١}{س^{٢}}$

ومنها $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} = \frac{^{-}١}{س^{٢}}$

تمارين ومسائل (٣-٣)

س١: أجد $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(٢ + \text{هـ})}{\text{هـ}}$ علماً بأن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \text{س}$.

س٢: أجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ الاقترانات الآتية:

أ) $\text{ص} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

ب) $\text{ص} = ٥\text{س} + ٣\text{س}^{٢}$

جـ) $\text{ص} = \frac{٤}{\sqrt{\text{س}}}$ ، $\text{س} > \text{صفر}$

س٣: أجد $\text{ص}^{/} \Big|_{\text{س}=١}$ في كل حالة مما يأتي:

أ) $\text{ص} = \frac{٣}{\text{س}^{٢}} + ٥\text{س}$ ، $\text{س} \neq ٠$

ب) $\text{ص} = ٧\text{س}^{٢} + \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$

س٤: إذا كان $\text{ع}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٤} + \text{ب}\,\text{س}^{٢}$، وكانت $\text{ع}^{/}(١) = ٢٢$ ، أجد قيمة الثابت ب.

٣ - ٤ قواعد الاشتقاق (٢): (Differentiation Rules)

سبق وأن قدمنا في البند السابق قواعد اشتقاق جمع اقترانات وطرحها، وكذلك مشتقة اقتران مضروب في عدد ثابت، وسنتناول في هذا البند مشتقة ضرب اقترانين، ومشتقة قسمة اقترانين.

قاعدة (١):

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) **فإن**

ل$^/$(س) = ق(س) × هـ$^/$(س) + هـ(س) × ق$^/$(س) **وبالكلمات**

ل$^/$(س) = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

مثال (١): إذا كان ص = (س^٢ + ٣س + ٢)(٥س + ١) أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = ٢.

الحل: ص = (س^٢ + ٣س + ٢)(٥س + ١)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (س^٢ + ٣س + ٢) × ٥ + (٥س + ١) × (٢س + ٣)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س = ٢}}$ = (٤ + ٦ + ٢) × ٥ + (١٠ + ١) × (٤ + ٣)

= ٦٠ + ٧٧ = ١٣٧

أفكر وأناقش: هل هناك طريقة أخرى للحل؟

مثال (٢): إذا كان ك(٢) = ٥، ك$^/$(٢) = ٣، ع(٢) = ٤ ، ع$^/$ (٢) = ٦ وكان ق(س) = ك(س) × ع(س)،

أجد ق$^/$(٢).

الحل: ق$^/$(س) = ك(س) × ع$^/$(س) + ع(س) × ك$^/$(س)

ق$^/$(٢) = ك (٢) × ع$^/$(٢) + ع(٢) × ك$^/$(٢)

= ٥ × ٦ + ٤ × ٣

= ٣٠ + ١٢

= ٤٢

قاعدة (٢):

إذا كان الاقتران $ل(س) = \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، $ق(س)$، $هـ(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق $هـ(س) \neq ٠$ فإن:

$$ل^{/}(س) = \frac{هـ(س) \times ق^{/}(س) - ق(س) \times هـ^{/}(س)}{(هـ(س))^{٢}}$$

وبالكلمات $ل^{/}(س) = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

مثال (٣): إذا كان $ق(س) = \frac{٣س + ١}{٢س - ٥}$ ، $س \neq \frac{٥}{٢}$ ، أجد $ق^{/}(س)$.

الحل: $ق^{/}(س) = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

$$= \frac{(٢س - ٥) \times ٣ - (٣س + ١) \times ٢}{(٢س - ٥)^{٢}}$$

$$= \frac{(٦س - ١٥) - (٦س + ٢)}{(٢س - ٥)^{٢}} = \frac{^{-}١٧}{(٢س - ٥)^{٢}}$$

مثال (٤): إذا كان $ل(س) = \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، $هـ(س) \neq ٠$ ، وكان $ق^{/}(٢) = {}^{-}١$، $ق(٢) = ١$ ، $هـ(٢) = ٢$

$ل^{/}(٢) = {}^{-}٢$ جد $هـ^{/}(٢)$.

الحل: $ل^{/}(س) = \frac{هـ(س) \times ق^{/}(س) - ق(س) \times هـ^{/}(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

$$ل^{/}(٢) = \frac{هـ(٢) \times ق^{/}(٢) - ق(٢) \times هـ^{/}(٢)}{(هـ(٢))^{٢}}$$

$$^{-}٢ = \frac{٢ \times {}^{-}١ - ١ \times هـ^{/}(٢)}{(٢)^{٢}}$$

$^{-}٨ = {}^{-}٢ - هـ^{/}(٢)$ ومنها $هـ^{/}(٢) = ٦$

مثال (٥): إذا كان ق(س) = $\frac{\text{هـ(س)}}{\text{س}+١}$ ، س $\neq$ -١ ، أجد ق$'$(١) علما بأن هـ (١) = ٢ ، هـ$'$(١) = ٣

الحل: $$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س} + ١) \times \text{هـ}'(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}) \times ١}{(\text{س} + ١)^{٢}}$$

$$\text{ق}'(١) = \frac{(١ + ١) \times \text{هـ}'(١) - \text{هـ}(١)}{(٢)^{٢}}$$

$$= \frac{٢\text{هـ}'(١) - \text{هـ}(١)}{٤}$$

$$= \frac{٢ \times ٣ - ٢}{٤}$$

$$= \frac{٤}{٤}$$

$$= ١$$

تمارين ومسائل (٣-٤)

س١: أجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ. ص = (٢س + ٥) (٣ − س^٣^)

ب. ص = $\frac{س}{س + ٣}$ س ≠ ^−^٣ ، عندما س = ١

س٢: أجد ق/(٣) علماً بأن ق(س) = س^٢^ − س + ٥ .

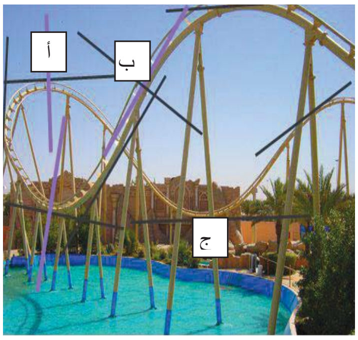
س٣: إذا كان ق(س) = س^٢^ + ٣س، وكان ل(س) = ق(س) + ٣هـ(س)، هـ(٢) = ٥، هـ/(٢) = ١، أجد ل/(٢).

س٤: إذا كان ق(س) = $\frac{٣س + ٢}{٤س + ١}$ ، س ≠ $\frac{^-^١}{٤}$ ، جد ق/(٢)؟

س٥: إذا كان ق(س) = س^٣^ ل(س) + هـ(س)، وكان ل(^−^١) = ٥، هـ/(^−^١) = ٧، ل/(^−^١) = ^−^٣، فما قيمة ق/(^−^١)؟

٣-٥ تطبيقات هندسية (المماس والعمودي): Tangent Line

نشاط:



غالبية المسارات التي تُركب في الملاهي هي متعرجات تصمم على شكل منحنيات، وذلك لإضفاء البهجة والسرور للمتنزهين. وتسير العربات في هذه المسارات المتعرجة بصورة مستقيمة، وتكون قوة دفع الأجسام عمودية على العربات، حيث تظهر قوة وهمية تؤثر على الأجسام، وتشعر الشخص بأنه على وشك السقوط، وتشعره بالخوف، والحقيقة غير ذلك. أي النقاط التي تكون فيها حركة العربة تمثل خطّاً مستقيماً على هذه المنحنيات (يمكن الاستعانة بالشكل المجاور)؟

النقاط: أ، ب، جـ ، ..... ، ......، ......، ...، هل يمكن حصر النقاط؟

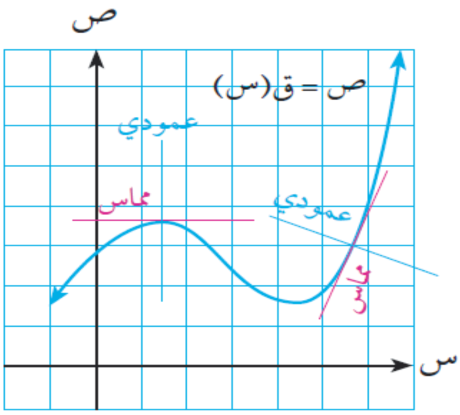
تعريف:

- ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س١، ص١) الواقعة عليه يساوي ق/(س١)، ومعادلة المماس هي: ص − ص١ = م(س − س١)، حيث م = ق/(س١)، ص١ = ق(س١).
- ميل العمودي على منحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س١، ص١) الواقعة عليه يساوي $\frac{-١}{م}$، م ≠ ٠.
ومعادلة العمودي على المنحنى هي: ص − ص١ = $\frac{-١}{م}$ (س − س١)، حيث م = ق/(س١)، ص١ = ق(س١).

ملاحظة:

عندما يكون المماس أفقياً فإن ميله يساوي صفراً، ويكون موازياً لمحور السينات.

المشتقة الأولى للاقتران ص = ق(س) عند س = س١ تمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة التي إحداثها السيني = س١ ، وبمعرفة نقطة التماس (س١، ص١) يمكننا إيجاد معادلة المماس لمنحنى الاقتران، ومعادلة العمودي عليه.



مثال (١): أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $\text{ق}(س) = س^٣ - س^٢ + ١$ عندما $س = ٣$.

الحل: ميل المماس عند $(س = ٣)$ هو $\text{ق}'(٣)$

$$\text{ق}'(س) = ٣س^٢ - ٢س$$

$$\text{ق}'(٣) = ٣ \times ٣^٢ - ٢ \times ٣$$

$$= ٢١$$

ميل المماس $= ٢١$

مثال (٢): أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $\text{ق}(س) = \frac{س^٣}{س^٢ + ١}$ عند النقطة $(١، \frac{١}{٢})$ الواقعة عليه.

الحل: معادلة المماس هي:

$$ص - ص_١ = م\,(س - س_١)$$

نقطة التماس هي $(س_١، ص_١) = (١، \frac{١}{٢})$

ميل المماس عند $(س_١، ص_١) = م = \text{ق}'(١)$

لكن $\text{ق}'(س) = \frac{((س^٢ + ١) \times ٣س^٢) - (س^٣ \times ٢س)}{(س^٢ + ١)^٢}$

$$\text{ق}'(١) = \frac{((١^٢ + ١) \times ٣ \times ١^٢) - ١^٣ \times ٢ \times ١}{(١^٢ + ١)^٢}$$

$$= \frac{٢ \times ٣ - ٢}{(٢)^٢}$$

$$= \frac{٦ - ٢}{٤}$$

$$= \frac{٤}{٤} = ١$$

أي أن معادلة المماس هي:

$$ص - \frac{١}{٢} = ١\,(س - ١)$$

$$ص - \frac{١}{٢} = س - ١$$

$$ص - س + \frac{١}{٢} = ٠$$

مثال (٣): أجد النقطة على المنحنى ص = ق(س) = س^{٢} − ٤س + ٥ ، والتي يكون عندها المماس أفقياً.

الحل: نقطة التماس هي (س$_{١}$، ص$_{١}$) = (س$_{١}$، ق(س$_{١}$))

بما أن المماس أفقي فإن ميل المماس = صفر

ق$^{/}$(س$_{١}$) = صفر

ق$^{/}$(س) = ٢س − ٤

ق$^{/}$(س$_{١}$) = ٢س$_{١}$ − ٤ = صفر

ومنها س$_{١}$ = ٢

نقطة التماس هي (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ١) (لماذا؟)

مثال (٤): أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = (س^{٢} + ١)(س + ١) عند النقطة (١، ٤) الواقعة عليه.

الحل: معادلة العمودي على المماس لمنحنى عند النقطة (١، ٤) هي:

ص − ص$_{١}$ = $\frac{-١}{م}$ (س − س$_{١}$) حيث (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) = (١، ٤)، م = ق$^{/}$(١)

ق$^{/}$(س$_{١}$) = (س^{٢} + ١) × ١ + (س + ١) × ٢س

= س^{٢} + ١ + ٢س^{٢} + ٢س

= ٣س^{٢} + ٢س + ١

ميل المماس = م = ق$^{/}$(١) = ٣ × (١)^{٢} + ٢ × ١ + ١

= ٦

ومنها ميل العمودي = $\frac{-١}{م}$ = - $\frac{١}{٦}$

معادلة العمودي هي ص − ٤ = - $\frac{١}{٦}$ (س − ١)

٦ص + س − ٢٥ = ٠ (لماذا؟)

تمارين ومسائل (٣-٥)

س١: أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^٢ + ٢}{س + ٣}$ س ≠ ⁻٣ ، عندما س = ⁻٢.

س٢: أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^٣ + ٢س^٢ − س + ١ عند النقطة (٠،١) الواقعة عليه.

س٣: أجد النقطة الواقعة على منحنى الاقتران ق(س) = س^٢ − ٣س + ٥ التي يكون المماس عندها أفقياً.

س٤: أجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (٠، ٧) الواقعة عليه، ويعامد المستقيم الذي ميله = - $\frac{١}{٣}$.

س٥: إذا كان ق(س) = أس^٢ + ٥س − ٢ ، وكان ميل المماس لمنحنى ق(س) عندما (س = ١) يساوي ١١، أجد قيمة الثابت أ.

٣-٦ قاعدة السلسلة (مشتقة الاقتران المركب) Chain Rule:

نشاط (١):

تشتهر فلسطين بزراعة شجرة الزيتون، وتعتبر هذه الشجرة رمزاً من رموز صمود الشعب الفلسطيني في أرضه، وتزرع في مناطق واسعة من محافظة نابلس، وقد أسهمت وفرة كميات إنتاج «زيت الزيتون» في توفير بيئة مناسبة لصناعة الصابون في نابلس. وتعتبر صناعة الصابون النابلسي المصنوع من زيت الزيتون من أشهر الصناعات الفلسطينية، ويمكن تمثيل ذلك:

شجرة الزيتون ⟵ بعصر الثمار .... ⟵ بالصناعة الصابون ....

نشاط (٢):

إذا كان ق(س)، هـ (س) اقترانيين بحيث مدى هـ (س) ⊆ مجال ق(س) فإننا نعرف الاقتران المركب

(ق∘هـ)(س) = ق(هـ(س)).

أكمل ما يلي: إذا كان ق(س) = س^٢ ، هـ (س) = ٢س − ١ فإن:

(ق∘هـ)(س) = ق(هـ(س))

= (.............)^٢

= ٤س^٢ − ٤س + ١ (لماذا؟)

(ق∘هـ)$^/$(س) = ٨س − ٤ ، هل يمكن إيجاد (ق∘هـ)$^/$(س) بطريقة أخرى؟

قاعدة السلسلة:

إذا كان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س، وكان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند هـ(س) فإن الاقتران المركب (ق∘هـ)(س) يكون قابلاً للاشتقاق عند س، ويكون (ق∘هـ)$^/$(س) = ق$^/$(هـ(س)) × هـ$^/$(س).

مثال (١): إذا كان ق(س) = س^{٢} − ١ ، هـ (س) = ٢س + ١ أجد (ق∘هـ)$'$(٤)، (هـ∘ق)$'$(٤).

الحل: (ق∘هـ)$'$(٤) = ق$'$(هـ(٤)) × هـ$'$(٤)

ق$'$(س) = ٢س ، هـ$'$(س) = ٢

هـ(٤) = ٩ ، هـ$'$(٤) = ٢

(ق∘هـ)$'$(٤) = ق$'$(٩) × ٢

= ١٨ × ٢

= ٣٦

(هـ∘ق)$'$(٤) = هـ$'$(ق(٤)) × ق$'$(٤) = هـ$'$(١٥) × ٨ (لماذا؟)

= ٢ × ٨ = ١٦ (لماذا؟)

مثال (٢): إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٢س + ٥ ، هـ(س) = س^{٢} + ١ ، أجد (ق∘هـ)$'$(س) ، ثم أجد (ق∘هـ)$'$(١).

الحل: (ق∘هـ)$'$(س) = ق$'$(هـ(س)) × هـ$'$(س).

لكن ق$'$(س) = ٣س^{٢} + ٢ ، هـ$'$(س) = ٢س

ومن ذلك (ق∘هـ)$'$(س) = ق$'$(س^{٢} + ١) × ٢س

= (٣(س^{٢} + ١)^{٢} + ٢) × ٢س ، (لماذا؟)

= ٦س^{٥} + ١٢س^{٣} + ١٠س ، (لماذا؟)

(ق∘هـ)$'$(١) = ٦ × ١ + ١٢ × ١ + ١٠ × ١ = ٢٨

نتيجة (١):

إذا كان ص = ق(ع)، ع = هـ(س)، اقترانين قابلين للاشتقاق، فإن ص = ق(هـ(س)) وبالتالي

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ق$'$(ع) × هـ$'$(س)

= $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

أي أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

مثال (٣): إذا كانت ص = $ع^{٢} + ع$ ، ع = ٣ − ٢س ، أجد $\frac{دص}{دس}$.

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ ، $\frac{دص}{دع} = ٢ع + ١$ ، $\frac{دع}{دس} = {}^{-}٢$

$= (٢ع + ١) \times {}^{-}٢$

$= (٢(٣ - ٢س) + ١) \times {}^{-}٢$

$= (٧ - ٤س) \times {}^{-}٢$

$= {}^{-}١٤ + ٨س$

مثال (٤): إذا كانت ص = $م^{٢} + ٢م$، م = $س^{٢} + س + ١$ ، أجد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٠ .

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دم} \times \frac{دم}{دس}$

$= (٢م + ٢)(٢س + ١)$ (لماذا؟)

عندما س = ٠ تكون م = ١ (لماذا؟)

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٠} = (٢ \times ١ + ٢)(٢ \times ٠ + ١) = ٤$

مثال (٥): إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن: $هـ^{/}(١) = ٤$، $ق^{/}(١) = -١$، $ق^{/}(٦) = -٢$ ، هـ(١) = ٦ ، أجد $(ق \circ هـ)^{/}(١)$.

الحل: $(ق \circ هـ)^{/}(١) = ق^{/}(هـ(١)) \times هـ^{/}(١)$

$= ق^{/}(٦) \times ٤$

$= -٢ \times ٤ = -٨$

نتيجة (٢):

إذا كانت ص = $(ق(س))^{ن}$، ن عدد نسبي وكان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:

$\frac{دص}{دس} = ن(ق(س))^{ن-١} \cdot ق^{/}(س)$

مثال (٦): إذا كانت ص = $(٤س + ٢)^{٣}$ أجد $\frac{دص}{دس}$.

الحل: $\frac{دص}{دس} = ٣(٤س + ٢)^{٢} \times ٤$

$= ١٢(٤س + ٢)^{٢}$

تمارين ومسائل (٣-٦)

س١: إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = س + ١ أجد (ق∘هـ)$'$(س).

س٢: إذا كانت ص = (٢س − ١)^{٢} ، أجد $\frac{دص}{دس}$.

س٣: إذا كان ص = ع^{٢} − ٥ع + ١، ع = ٢س + ٣ ، أجد $\frac{دص}{دس}$.

س٤: إذا كان م(س) = (س^{٢} − س)^{٤}، أجد م$'$(٢).

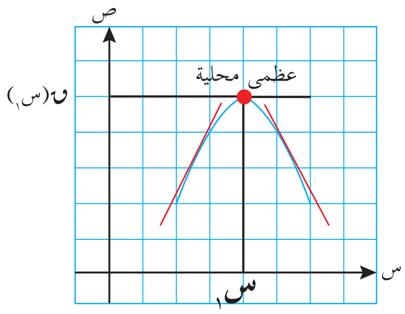
س٥: إذا كان ق(س) = هـ(٣س^{٢} + ١)، أجد ق$'$(١)، علماً بأن هـ$'$(١) = ٥، هـ$'$(٤) = ٢ .

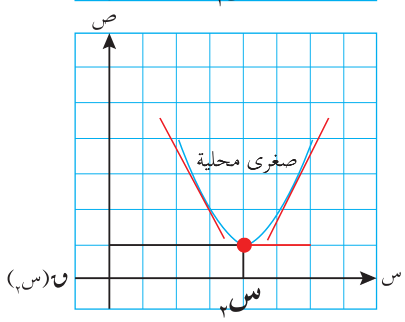
س٦: إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن: هـ$'$ (٢) = ٣، ق$'$(٢) = ٥، ق$'$(٤) = -٢، هـ(٢) = ٤، ق(٢) = ٣ ، هـ$'$ (٣) = ١ ، أجد (ق∘هـ)$'$(٢)، (هـ∘ق)$'$(٢).

٣-٧ القيم القصوى (Extreme Values):

نشاط:

مهنة صيد السمك في قطاع غزة من أكثر المهن التي تُدرّ دخلاً، لكن وبسبب استمرار الحصار على قطاع غزة باتت شريحة الصيادين هي الأفقر، فمساحة الصيد المسموحة لهم فقيرة بالأسماك، كما يتعرض الصيّادون لإطلاق نار مستمر من زوارق الاحتلال، لتضاف مهنة الصيد إلى عشرات المهن الأخرى التي تعاني البطالة في القطاع، يخاطر الصياد بحياته لتوفير قوته وقوت أسرته، ففي شهري آذار ونيسان يجمع الصيادون أكبر كمية ممكنة من سمك السردين، وتقل كمية هذا النوع من السمك في شهر أيلول، حيث تكون الكمية قليلة جداً، وتتفاوت الكمية في باقي أشهر السنة. أحاول مع زميلي رسم منحنى تقريبي يبين كميات السمك التي تجمع في أشهر السنة.





يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران ص = ق(س) المعرف على ح،

- نلاحظ أن قيمة الاقتران عند س = س$_1$ أكبر من قيمة الاقتران عند جميع س المجاورة لِـ جـ، لذلك يقال إن للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س$_1$ هي ق(س$_1$).

كما نلاحظ أن قيمة الاقتران عند س = س$_2$ أصغر من قيمة الاقتران عند جميع قيم س المجاورة لِـ جـ، أي أن للاقتران قيمة صغرى محلية عند س$_2$ هي ق(س$_2$).

- تسمى القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران قيماً قصوى له.

ملاحظة:

سنقتصر في دراستنا للقيم القصوى على الاقترانات كثيرة الحدود المعرفة على ح

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً وكانت س = جـ في مجال الاقتران، فإنه يقال أن ق(جـ):

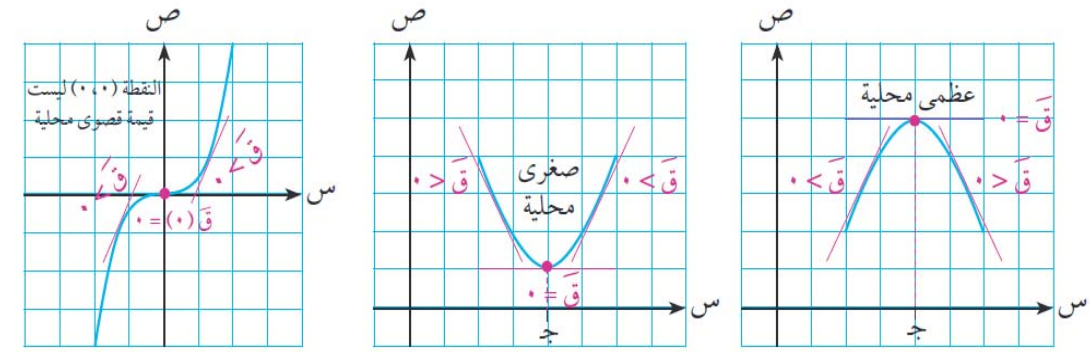
أ. قيمة عظمى محلية للاقتران، إذا كانت ق(جـ) $\geqslant$ ق(س) لجميع قيم س المجاورة لِـ جـ.

ب. قيمة صغرى محلية للاقتران، إذا كانت ق(جـ) $\leqslant$ ق(س) لجميع قيم س المجاورة لِـ جـ.

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحلية:

إن التمثيل البياني لأي اقتران على مجاله يساعد في تحديد نقط القيم القصوى المحلية للاقتران، ولكن: كيف تساعدنا المشتقة الأولى لهذا الاقتران في تعيين القيم القصوى المحلية له؟

أتأمل الأشكال الآتية، وألاحظ العلاقة بين إشارة قَ(س) والقيم القصوى للاقتران.



(أ) (ب) (جـ)

في الشكل (أ): ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)، قَ(جـ) = صفر، إشارة قَ(س) تغيرت من موجبة لقيم س < جـ إلى سالبة لقيم س > جـ.

في الشكل (ب): ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)، قَ(جـ) = صفر، إشارة قَ(س) تغيرت من سالبة لقيم س < جـ إلى موجبة لقيم س > جـ.

في الشكل(ج): قَ(جـ) = صفر، إشارة قَ(س) موجبة لقيم س < جـ وموجبة لقيم س > جـ . ق(جـ) ليست قيمة قصوى محلية للاقتران ق(س).

ماذا تستنتج؟

نتيجة:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكانت قَ(جـ) = صفراً، حيث جـ ∈ مجال ق(س)، فإن:

أ. إذا تغيرت إشارة قَ(س) من موجبة لقيم س < جـ إلى سالبة لقيم س > جـ فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

ب. إذا تغيرت إشارة قَ(س) من سالبة لقيم س < جـ إلى موجبة لقيم س > جـ فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

يسمى هذا باختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى.

مثال (١): أعيّن جميع القيم القصوى للاقتران $ق(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - ٣س^{٢} + ٨س + ٢$.

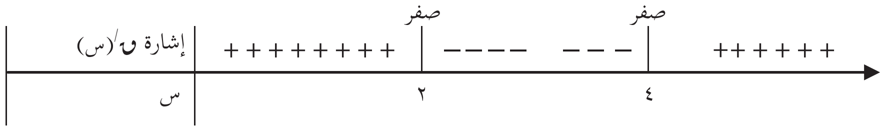
الحل: $ق^{/}(س) = س^{٢} - ٦س + ٨$

$ق^{/}(س) = ٠$

$س^{٢} - ٦س + ٨ = ٠$

$(س - ٢)\,(س - ٤) = ٠$

$س = ٢ ، ٤$



إشارة $ق^{/}(س)$ تغيرت من موجبة حيث $س < ٢$ إلى سالبة حيث $س > ٢$ ← $ق(٢)$ قيمة عظمى محلية للاقتران $ق(س)$.

إشارة $ق^{/}(س)$ تغيرت من سالبة حيث $س < ٤$ إلى موجبة حيث $س > ٤$ ← $ق(٤)$ قيمة صغرى محلية للاقتران $ق(س)$.

القيمة العظمى المحلية $= ق(٢) = \frac{٢٦}{٣}$

القيمة الصغرى المحلية $= ق(٤) = \frac{٢٢}{٣}$

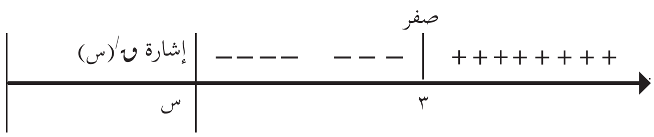
مثال (٢): أعيّن القيم القصوى للاقتران $= س^{٢} - ٦س + ٩$.

الحل: $ق^{/}(س) = ٢س - ٦$

$ق^{/}(س) = ٠$

$٢س - ٦ = ٠$

$س = ٣$



(لماذا؟)

إشارة $ق^{/}(س)$ تغيرت من سالبة حيث $س < ٣$ إلى موجبة حيث $س > ٣$ ← $ق(٣)$ قيمة صغرى محلية للاقتران $ق(س)$.

القيمة الصغرى المحلية $= ق(٣) = ٩ - ١٨ + ٩ = ٠$.

نشاط (٢):

إذا كان $ق(س) = س^{٣} - ١٢س - ٥$ ، س ∈ ح ، أجد قيم س التي عندها قيم قصوى للاقتران ق(س).

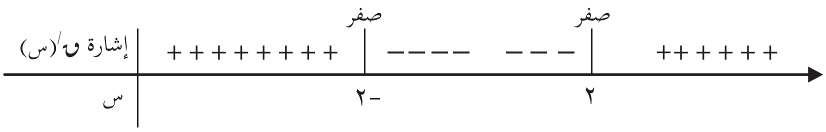
الحل: $ق^{/}(س) = ...$

نجعل $ق^{/}(س) = ...$

$٣س^{٢} - ١٢ = ٠$

$س^{٢} - ٤ = ٠$

$س = ...$



ألاحظ أن إشارة $ق^{/}(س)$ تغيرت من موجبة حيث س < ⁻٢ إلى سالبة حيث س > ⁻٢ ← عند (س = ⁻٢) يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

إشارة $ق^{/}(س)$ تغيرت من سالبة حيث س < ٢ إلى موجبة حيث س > ٢ حول (س = ٢) ← عند (س = ٢) يوجد قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

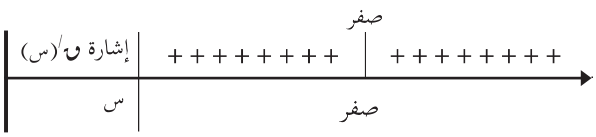
مثال (٣): أعيّن القيمة/القيم القصوى المحلية إن وجدت للاقتران $ق(س) = س^{٣}$ ، س ∈ ح.

الحل: $ق^{/}(س) = ٣س^{٢}$

$ق^{/}(س) = ٠$

$٣س^{٢} = ٠$

$س = ٠$



لم تتغير إشارة $ق^{/}(س)$ حول (س = ٠) ومنها لا توجد قيمة قصوى محلية للاقتران ق(س).

تمارين ومسائل (٣-٧)

س١: أعيّن القيمة/القيم القصوى المحلية إن وجدت لكل من الاقترانات الآتية:

أ. ق(س) = ٤س − ٢س^{٢} ، س ∈ ح

ب. ق(س) = س(س^{٢} − ١٢) ، س ∈ ح

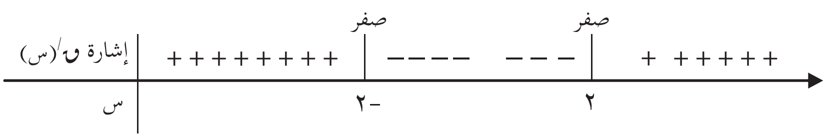
ج. ق(س) = س^{٣} − ٣س + ٢ ، س ∈ ح

د. ق(س) = -س^{٢} + ١٠س + ٥ ، س ∈ ح

س٢: إذا كان للاقتران ق(س) = $^{-}$س^{٢} + ب س − ٣ ، س ∈ ح قيمة عظمى محلية عند س = $^{-}$٢ فما قيمة ب؟

س٣: إذا كان ق(س) = س^{٣} − ٥ ، س ∈ ح، أبيّن أنه لا توجد للاقتران ق(س) أية قيم قصوى.

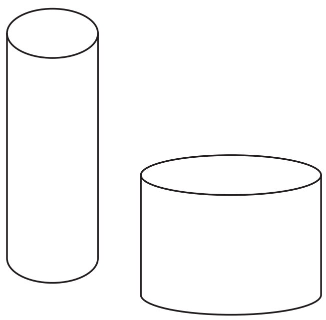
س٤: الشكل الآتي يبين إشارة ق$^{/}$(س)، جد قيم س التي عندها قيم قصوى للاقتران ق(س) وأبيّن نوعها، علماً بأن ق(س) كثير حدود، معرف على ح.



٣-٨ تطبيقات عملية على القيم القصوى: Applications

نشاط (١):

في إحدى حصص الرياضيات للصف الحادي عشر، أعطى المعلم ياسين كلاً من الطالبين حسام وبهاء ورقةً مستطيلة الشكل بعداها ٢٨سم، ١٤سم.



ثم طلب منهما تكوين أسطوانة مفتوحة من الجهتين عن طريق لف الورقة للحصول على أكبر حجم ممكن. قام حسام بلف الورقة، حيث جعل طول الورقة محيطاً لقاعدة الأسطوانة، وعرض الورقة ارتفاعاً لها، بينما قام بهاء بلف الورقة، وجعل عرض الورقة محيطاً لقاعدة الأسطوانة، وطول الورقة ارتفاعاً لها.

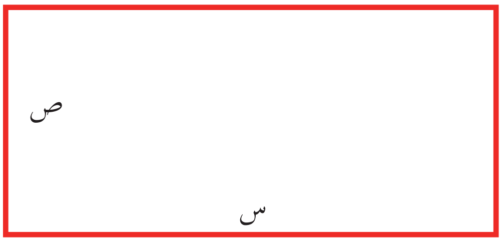
أيّ الطالبين حصل على أسطوانة ذات حجم أكبر؟ ولماذا؟

يمكن الاستفادة من وحدة التفاضل في حساب القيم القصوى للاقتران الذي نحن بصدده في مثل هذه التطبيقات، كما يتضح من الأمثلة الآتية:

مثال (١): قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها = ٦٠٠م، أجد بعديها لتكون مساحتها أكبر ما يمكن؟

الحل: نفرض أن طول قطعة الأرض = س

عرضها = ص



مساحة القطعة = طول القطعة × عرضها

م(س) = س ص

مساحة القطعة أكبر ما يمكن ← إيجاد س التي يوجد عندها قيمة عظمى محلية للاقتران م(س).

لكن محيط القطعة = ٦٠٠م

٢س + ٢ص = ٦٠٠

س + ص = ٣٠٠ ومنها ص = ٣٠٠ − س

م(س) = س (٣٠٠ − س)

م(س) = ٣٠٠س − س^{٢}

م′(س) = ٣٠٠ − ٢س

$م'(س) = ٠ \leftarrow ٣٠٠ - ٢س = ٠$

ومنها س = ١٥٠م

	صفر	
- - - - - - - -	+ + + + + + + +	إشارة م/(س)
	١٥٠	س

ألاحظ أن إشارة م/(س) تغيرت من موجبة حيث س < ١٥٠ إلى سالبة حيث س > ١٥٠ ← عند (س= ١٥٠) يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران م(س).

ص = ٣٠٠ − ١٥٠ = ١٥٠م

بعدا قطعة الأرض هما ١٥٠م ، ١٥٠م ، أي أن القطعة مربعة الشكل.

مثال (٢): ينتج مصنع أجهزة كهربائية أجهزة عددها س كل يوم بتكلفة ($\frac{١}{٤}$س^٢ + ٣٥س + ٥) ديناراً، ويبيع الجهاز الواحد منها بسعر (٥٠ − $\frac{١}{٢}$س) ديناراً، ما عدد الأجهزة التي يجب على المصنع إنتاجها يومياً حتى يكون ربحه أكبر ما يمكن؟

الحل: نفرض أن عدد الأجهزة = س

الربح = ثمن البيع − التكلفة

الربح = عدد الأجهزة × ثمن بيع الجهاز الواحد − التكلفة

$ر(س) = س (٥٠ - \frac{١}{٢}س) - (\frac{١}{٤}س^٢ + ٣٥س + ٥)$

$= ٥٠ س - \frac{١}{٢}س^٢ - \frac{١}{٤}س^٢ - ٣٥س - ٥$

$= ١٥س - \frac{٣}{٤}س^٢ - ٥$

$\frac{دس}{دس} = ١٥ - \frac{٦}{٤}س$

$١٥ - \frac{٦}{٤}س = $ صفر ومنها س = ١٠ (لماذا؟)

عندما س = ١٠ ، يكون للاقتران ر(س) قيمة عظمى محلية. (تحقق من ذلك)

ومنها يكون الربح أكبر ما يمكن عندما يكون عدد الأجهزة = ١٠

الربح = ر(١٠) = ١٥ × ١٠ − $\frac{٣}{٤}$ × ١٠٠ − ٥

= ٧٠ ديناراً.

مثال (٣): عددان طبيعيان مجموعهما ١٤، أجد العددين بحيث يكون ٦ أمثال مربع العدد الأول مضافاً إليه مربع العدد الثاني أقل ما يمكن؟

الحل: نفرض أن العددين هما س، ص.

س + ص = ١٤ ، ص= ١٤ − س

ح(س) = ٦س^٢ + ص^٢

= ٦س^٢ + (١٤ − س)^٢

= ٦س^٢ + ١٩٦ − ٢٨س + س^٢

= ٧س^٢ − ٢٨س + ١٩٦

المطلوب إيجاد قيمة س التي عندها قيمة صغرى محلية للاقتران ح(س)

ح$^/$(س) = ١٤س − ٢٨

ح$^/$(س) = ٠

١٤س − ٢٨ = ٠

ومنها س = ٢

عند س = ٢ يكون للاقتران ح(س) قيمة صغرى محلية. (لماذا؟)

ومنها العدد الأول س = ٢

العدد الثاني ص = ١٤ − س

= ١٤ − ٢ = ١٢

∴ العددان هما ٢ ، ١٢

تمارين ومسائل (٣-٨)

س١: حبل طوله ٢٠م، أجد مساحة أكبر مستطيل يمكن عمله باستخدام هذا الحبل.

س٢: عددان طبيعيان مجموعهما ٢٠، أجد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

س٣: قطعة أرض مستطيلة الشكل، محيطها ٦٠٠ م، أجد بعديها لتكون مساحتها أكبر ما يمكن.

س٤: عددان طبيعيان مجموعهما ١٤، أجد العددين بحيث يكون ٦ أمثال العدد الأول مضافاً إليه مربع الثاني أقل ما يمكن.

س٥: صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها ٦٠سم، يراد صنع صندوق بلا غطاء من هذه الصفيحة، وذلك بقص مربعات متساوية من زوايا الصفيحة، وثني الأجزاء البارزة من الجهات الأربع، أجد طول ضلع كل من هذه المربعات ليكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن؟

تمارين عامة (٣ - ٩)

س١: أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [$^-$٤ ، ٢] يساوي ٣ ، ق($^-$٤) =٢ ما قيمة ق(٢)؟

أ) ٢٠ ب) ٢٦ جـ) ١٦ د) ١٨

٢) ما ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) في النقطتين أ (١، ٣) ، ب (٣، ٩)؟

أ) $^-$٣ ب) ٣ جـ) ٢ د) ٦

٣) إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ما قيمة ق$'$(٤)؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) -$\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٤}$ د) ٢

٤) ما ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٥}{\text{س}^٢ - ١}$ عند س = ٢؟

أ) $\frac{٤}{٩}$ ب) -$\frac{٢٠}{٩}$ جـ) ١٥ د) $\frac{٥}{٣}$

٥) إذا كانت ص = (س – ١)^٥ ما قيمة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = $^-$١؟

أ) ٥ ب) ٢٥ جـ) صفر د) ٨٠

٦) إذا كان ق(س) = س^٢،هـ(س) = س – ٢ ما قيمة (قOهـ)$'$(١)؟

أ) $^-$٢ ب) ٢ جـ) صفر د) ٤

٧) إذا كان ق(س) = ٦س^٢ – $\frac{١}{٣}$س^٦ + ١٠، ما قيمة ق$'$(١)؟

أ) ٦ ب) ١٦ جـ) ٢٠ د) ١٠

٨) إذا كان ق(س) = س^٢، هـ(س) = س + ١ فما قيمة (هـOق)$'$(صفر)؟

أ) ٣ ب) ١ جـ) صفر د) ٢

٩) إذا كانت ص = (١ – ٢س)^٢ ما قيمة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ٣؟

أ) $^-$٢٠ ب) ٢٠ جـ) $^-$١٠ د) ١٠

١٠) إذا كان $ق(س) = هـ(٣س^٢ + ١)$ فما قيمة $ق^/(س)$ ؟

أ) $٣س^٢هـ^/(٣س^٢ + ١)$ ب) $٣هـ^/(٣س^٢ + ١)$ جـ) $٦س هـ^/(٣س^٢ + ١)$ د) $٣س هـ^/(٣س^٢ + ١)$

س٢: إذا كان متوسط تغير الاقتران $ق(س)$ عندما تتغير س من $س_١ = ٢$ إلى $س_٢ = ٥$ هو ١٠، أجد $ق(٥)$ علماً بأن $ق(٢) = ٦$؟

س٣: إذا كان متوسط التغير للاقتران $ق(س) = س^٢ + ٣$ عندما تتغير س من ٢ إلى أ يساوي ٦ فما قيمة الثابت أ ؟

س٤: إذا كان $ق(س) = س^٢ + ١$، أجد $ق^/(٣)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

س٥: إذا كان $ق(س) = (س^٢ + ٢)(٣س + ٤)$ أجد $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{٢هـ}$

س٦: إذا كان $م(س) = س^٢ \times ق(س)$ جد $م^/(٣)$ علما بأن $ق(٣) = {}^-٢$ ، $ق^/(٣) = ٥$.

س٧: أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى $ق(س) = س^٣ + ٥س^٢ - ٣$ عند النقطة التي إحداثيها السيني = ١.

س٨: أجد قيمة الثابت أ التي تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران $ص = أس^٢ + ٣س + ١$ مساوياً ٤ عندما $س = ١$.

س٩: أجد القيم القصوى للاقتران $ق(س) = س^٣ + ٣س^٢ + ٧$.

س١٠: عددان طبيعيان مجموعهما ٢٠، أجد العددين ليكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

س١١: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
أجد متوسط التغير			
أستخدم القواعد في ايجاد المشتقات			
أجد مشتقات الاقترانات واحل مسائل منوعة عليها			

الوحدة ٤ التكامل Integration

أناقش: كيف أجد مساحة المناطق المحصورة بين بعض الأقواس والمحور الأفقي في الصورة؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التكامل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إلى مفهوم التكامل غير المحدود.
٢. إيجاد التكامل غير المحدود.
٣. التعرف إلى قواعد التكامل غير المحدود وتوظيفها في إيجاده.
٤. التعرف إلى التكامل المحدود، وحسابه.
٥. التعرف إلى خواص التكامل المحدود وتوظيفها في حسابه.
٦. استخدام طريقة التعويض في إيجاد بعض التكاملات.
٧. توظيف التكامل غير المحدود في تطبيقات هندسية.
٨. توظيف التكامل المحدود في إيجاد بعض المساحات.

٤-١ التكامل غير المحدود Indefinite Integral

نشاط:

كان علي في رحلة ليلية قمرية مع صديق له على شاطئ البحر، عندما شاهدا معاً ظاهرة طبيعية وهي المد والجزر، وتحدثا معاً على وجود كثير من الظواهر الطبيعية المتعاكسة في الحياة الطبيعية، مثل: التجمد والانصهار، والتجاذب والتنافر، والتأكسد والاختزال، وفي الرياضيات هناك عمليتا الجمع والطرح، وعملية إيجاد مربع عدد حقيقي موجب، هي عكس عملية إيجاد الجذر التربيعي لهذا المربع.

إذا كان ق(س) = س^{٣} فإن ق$^{/}$(س) = ٣س^{٣}، إذا كان ق$^{/}$(س) = ٢س ، فإن ق(س) = ...؟

إن عملية إيجاد الاقتران الذي عُلِمت مشتقته الأولى هي عملية عكسية لعملية الاشتقاق التي تعلمتها في الوحدة السابقة.

مثال (١): أكتب ثلاثة اقترانات مشتقتها الأولى هي ٤س^{٣}؟

الحل: ق(س) = س^{٤}، ل(س) = س^{٤} + ١٣، هـ(س) = س^{٤} − π، جميعها مشتقتها هي ٤س^{٣}.

ألاحظ أن ق(س) − هـ(س) = س^{٤} − (س^{٤} + ١٣) = ١٣ وكذلك الاقتران ل(س) − هـ(س) = (س^{٤} + ١٣) − (س^{٤} − π) = ١٣ + π،

أي أن الفرق بين أي اقترانين لهما نفس المشتقة هو عدد ثابت، لذلك فإن الاقتران الذي مشتقته ٤س^{٣} سيكون على الصورة ق(س) = س^{٤} + جـ، أي أن التكامل عملية عكسية للتفاضل.

تعريف:

إذا كان الاقتران ق$^{/}$(س) هو المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، فإن الاقتران ق(س) + جـ يمثل مجموعة الاقترانات التي مشتقتها الأولى ق$^{/}$(س)، ويسمى بالتكامل غير المحدود للاقتران ق$^{/}$(س)، أو يسمى بالاقتران الأصلي الذي مشتقته ق$^{/}$(س).

وبالرموز يكتب: $\int$ ق$^{/}$(س) ءس = ق(س) + جـ ، جـ ∈ ح، الرمز $\int$ هو إشارة التكامل، ءس تشير أن الاقتران بدلالة المتغير س ، جـ يسمى ثابت التكامل.

مثال (٢): أجد $\int$ ٢ءس ؟

الحل: $\int$ ٢ءس = ق(س) ، حيث ق$^{/}$(س) = ٢

ق(س) = ٢س + جـ

$\int$ ٢ءس = ٢س + جـ (الاقتران الأصلي).

مثال (٣): أجد $\int$ ٣س^{٢} ءس ؟

الحل: $\int$ ٣س^{٢} ءس = ك(س)، حيث ك$^{/}$(س) = ٣س^{٢}

ك(س) = س^{٣} + جـ

$\therefore$ $\int$ ٣س^{٢} ءس = س^{٣} + جـ (الاقتران الأصلي).

مثال (٤): أي من الاقترانين ق(س) = ٢س^{٣} + ٤س^{٢} + ٤س + جـ

هـ(س) = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ

يمكن اعتباره اقتراناً أصلياً للمشتقة (٦س^{٢} + ١٠س + ٤) ؟

الحل: ق$^{/}$(س) = ٦س^{٢} + ٨س + ٤

هـ$^{/}$(س) = ٦س^{٢} + ١٠س + ٤

هـ(س) = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ هو الاقتران الأصلي للمشتقة

وبالرموز $\int$(٦س^{٢} + ١٠س + ٤) ءس = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ

مثال(٥): إذا كان ق(س) = $\int$(س^{٢} + س)(س − ٢) ءس ، أجد ق$^{/}$(س) ؟

الحل: ق$^{/}$(س) = مشتقة $\int$(س^{٢} + س)(س − ٢) ءس، وبما أن الاشتقاق عملية عكسية للتكامل،

فإن ق$^{/}$(س) = (س^{٢} + س)(س − ٢).

تمارين ومسائل (٤-١)

س١: أكمل الجدول الآتي:

	المشتقة $ق'(س)$	الاقتران الأصلي $ق(س)$ + جـ
١.	$٤س^{٣}$	
٢.		$س^{٤} + س^{٣} + ٢س + جـ$
٣.	$٢س + ١$	
٤.		$\int (٤س^{٣} + ٣)\ ءس$

س٢: أضع إشارة ✓ أمام العبارة الصائبة وإشارة ✗ أمام العبارة الخاطئة:

أ. $\int (٥س + ٤)\ ءس = \frac{٥س^{٢}}{٢} + ٤س$

ب. $\int (٦س^{٥} + ٣س^{٢})\ ءس = س^{٦} + س^{٣} + جـ$

جـ. $\int (٢س^{٣} + ٣س)\ ءس = ٦س + ٣$

د. $\int \frac{-٥}{س^{٢}}\ ءس = \frac{٥}{س} + جـ$

هـ. $\int ٢ن\ ءس = ن^{٢} + جـ$

و. $\int ٢ن\ ءن = ن^{٢} + جـ$

س٣. إذا كان $ق(س) = \int \frac{س^{٢} + ٣}{س + ١}\ ءس$، أجد $ق'(س)$.

٤-٢ قواعد التكامل غير المحدود (Rules of Indefinite Integral)

نشاط:

الميراث شرعة الله سبحانه وتعالى في كتابه العزيز، ورغم هذا التشريع إلا أن بعض المشاكل بين الناس تحدث بسبب عدم رجوع الناس إلى الأنظمة والتشريعات والقوانين التي تخص توزيع هذا الميراث، حيث إن الاعتماد على هذه القوانين أو القواعد، يساعد في عملية توزيع الميراث بسهولة.

وللعلوم الأخرى في الحياة قوانين وقواعد تسهّل فهم المسائل والمشكلات العملية والعلمية، وتعمل على تحليلها وحلّها.

إذا كان الاقتران الأصلي للمشتقة ق$'$(س) = ٣س^{٢} هو س^{٣} + جـ، فكيف يمكن إيجاد الاقتران الأصلي للمشتقة ق$'$(س) = ٤س^{٣} + ٣س^{٢} − ٣ ؟ هل يوجد قواعد لإيجاد الاقتران الأصلي؟

الاقتران الأصلي لِ ٤س^{٣} هو س^{٤} + جـ

الاقتران الأصلي لِ ٣س^{٢} هو س^{٣} + جـ

الاقتران الأصلي لِ ٣- هو ....

الاقتران الأصلي لِ ٤س^{٣} + ٣س^{٢} − ٣ هو ....

مثال (١): أجد $\int$ ٣ءس ؟

الحل: المطلوب هو إيجاد الاقتران الأصلي ق(س) الذي مشتقته الأولى ق$'$(س) = ٣.

من معلوماتنا في التفاضل، ألاحظ أن الاقترانات ق$_{١}$(س) = ٣س

ق$_{٢}$(س) = ٣س + ٥

ق$_{٣}$(س) = ٣س − $\sqrt{٢}$

ق$_{٤}$(س) = ٣س + ثابت

هي اقترانات مشتقتها الأولى ق$'$(س) = ٣، وألاحظ أن الفرق بين هذه الاقترانات هو في الحد الثابت فقط، ولذلك فإن الاقتران الأصلي ق(س) الذي مشتقته ق$'$(س) = ٣ هو ق(س) = ٣س + جـ.

أي أن $\int$ ٣ءس = ٣س + جـ

قاعدة (١):

$\int$ أءس = أس + جـ ،   أ ، جـ عددان حقيقيان.

مثال (٢): أجد التكاملات الآتية:

١) $\int -٥\,\text{ءس}$ ٢) $\int \sqrt{٣}\,\text{ءص}$ ٣) $\int \frac{١}{٢}\,\text{ءع}$.

الحل: ١) $\int -٥\,\text{ءس} = -٥\text{س} + \text{جـ}$، الاقتران بدلالة المتغير س.

٢) $\int \sqrt{٣}\,\text{ءص} = \sqrt{٣}\,\text{ص} + \text{جـ}$، الاقتران بدلالة المتغير ص.

٣) $\int \frac{١}{٢}\,\text{ءع} = \frac{١}{٢}\,\text{ع} + \text{جـ}$، الاقتران بدلالة المتغير ع.

مثال (٣): أتأمل الجدول الآتي، وأجيب عن الأسئلة اللاحقة:

ق(س)	$\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$	$\frac{\text{س}^{٤}}{٤} + ٧$	$\frac{\text{س}^{٥}}{٥}$	$\frac{\text{س}^{٦}}{٦} + ٢$
ق/(س)	$\text{س}^{٢}$	$\text{س}^{٣}$	$\text{س}^{٤}$	$\text{س}^{٥}$

١. ما العلاقة بين درجة ق/(س) و درجة ق(س)؟

٢. ما العلاقة بين معامل الحد الذي يحتوي على س في ق(س) ودرجة ق(س) ؟

الحل: ١. درجة الاقتران ق(س) تزيد ١ عن درجة ق/(س).

معامل الحد الذي يحتوي على س يساوي مقلوب درجة الاقتران.

قاعدة (٢):

$\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن} + ١} + \text{جـ}$، جـ عدد حقيقي، ن $\neq$ -١.

مثال (٤): أجد كلاً من التكاملات الآتية:

أ. $\int \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$ ب. $\int \text{س}^{-٣}\,\text{ءس}$ ج. $\int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$ د. $\int \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

الحل: أ. $\int \text{س}^{٢}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{٢+١}}{٢ + ١} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

ب. $\int \text{س}^{-٣}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{-٣+١}}{-٣ + ١} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{-٢}}{-٢} + \text{جـ} = \frac{-\text{س}^{-٢}}{٢} + \text{جـ}$

ج. $\int \text{س}^{\frac{1}{2}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{جـ} = \frac{2\text{س}^{\frac{3}{2}}}{3} + \text{جـ}$

د. $\int \sqrt[3]{\text{س}^2}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{2}{3}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \text{جـ} = \frac{3\text{س}^{\frac{5}{3}}}{5} + \text{جـ} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\text{س}^5} + \text{جـ}$

قاعدة (٣):

إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل، فإن $\int \text{أ}\,\text{ق(س)}\,\text{ءس} = \text{أ}\int \text{ق(س)}\,\text{ءس}$ ، أ $\in$ ح

مثال (٥): أجد التكاملات الآتية:

أ. $\int 2\text{س}^3\,\text{ءس}$ ب. $\int \frac{3}{5}\text{س}^4\,\text{ءس}$ ج. $\int \sqrt{2}\,\text{ل}^7\,\text{ءل}$

الحل: أ. $\int 2\text{س}^3\,\text{ءس} = 2\int \text{س}^3\,\text{ءس} = \frac{2\text{س}^4}{4} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^4}{2} + \text{جـ}$

ب. $\int \frac{3}{5}\text{س}^4\,\text{ءس} = \frac{3}{5}\int \text{س}^4\,\text{ءس} = \frac{3}{5} \times \frac{\text{س}^5}{5} + \text{جـ} = \frac{3\text{س}^5}{25} + \text{جـ}$

ج. $\int \sqrt{2}\,\text{ل}^7\,\text{ءل} = \sqrt{2}\int \text{ل}^7\,\text{ءل} = \sqrt{2}\,\frac{\text{ل}^8}{8} + \text{جـ}$

قاعدة (٤):

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل، فإن:

١. $\int (\text{ق} + \text{هـ})(\text{س})\,\text{ءس} = \int \text{ق(س)}\,\text{ءس} + \int \text{هـ(س)}\,\text{ءس}$

٢. $\int (\text{ق} - \text{هـ})(\text{س})\,\text{ءس} = \int \text{ق(س)}\,\text{ءس} - \int \text{هـ(س)}\,\text{ءس}$

مثال (٦): أجد $\int (3\text{س}^2 + 4\text{س})\,\text{ءس}$

الحل: $\int (3\text{س}^2 + 4\text{س})\,\text{ءس} = 3\int \text{س}^2\,\text{ءس} + 4\int \text{س}\,\text{ءس}$

$= \text{س}^3 + 2\text{س}^2 + \text{جـ}$ (لماذا؟)

مثال (٧): أجد $\int (\frac{١}{٢}س^{٣} - \frac{٥}{س^{٢}})\, ءس$

الحل: $\int (\frac{١}{٢}س^{٣} - \frac{٥}{س^{٢}})\, ءس = \int \frac{١}{٢}س^{٣}\, ءس - \int \frac{٥}{س^{٢}}\, ءس$

$= \frac{١}{٢}\int س^{٣}\, ءس - ٥\int س^{-٢}\, ءس$

$= \frac{س^{٤}}{٨} + \frac{٥}{س} + جـ$ (لماذا؟)

يمكن تعميم القاعدة (٤) لأكثر من اقترانين.

مثال (٨): أجد $\int (س + ٣)^{٢}\, ءس$

الحل: $(س + ٣)^{٢} = (س + ٣)(س + ٣) = س^{٢} + ٦س + ٩$

$\int (س + ٣)^{٢}\, ءس = \int (س^{٢} + ٦س + ٩)\, ءس = \int س^{٢}\, ءس + \int ٦س\, ءس + \int ٩\, ءس$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + ٦\frac{س^{٢}}{٢} + ٩س + جـ$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + ٣س^{٢} + ٩س + جـ$

مثال (٩): جد $\int \frac{ع^{٢} - ٩}{ع + ٣}\, ءع$ ، $ع \neq -٣$

الحل: $\int \frac{ع^{٢} - ٩}{ع + ٣}\, ءع = \int \frac{\cancel{(ع + ٣)}(ع - ٣)}{\cancel{(ع + ٣)}}\, ءع = \int (ع - ٣)\, ءع = \frac{ع^{٢}}{٢} - ٣ع + جـ$

مثال (١٠): إذا كان $ص = \int (٥س^{٢} + ٣س)\, ءس$ ، أجد $\frac{ءص}{ءس}$ ؟

الحل: $ص = \int (٥س^{٢} + ٣س)\, ءس = \frac{٥س^{٣}}{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} + جـ$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٥ \times ٣س^{٢}}{٣} + \frac{٣ \times ٢س}{٢} + صفر$

$= ٥س^{٢} + ٣س$ (ماذا نلاحظ؟)

هل يمكن الحل بطريقة أخرى؟ (وضح ذلك.)

تمارين ومسائل (٤-٢)

س١: أجد التكاملات الآتية:

أ. $\int \frac{٢}{٣}$ ءس   ب. $\int \pi$ ءع   ج. $\int \sqrt{٥}$ س ءس

د. $\int (٢س^{٢} + ٣)$ ءس   هـ. $\int (٧س^{٣} - \frac{٢}{س^{٢}} + ١)$ ءس   و. $\int ك^{٢}$ءس ، ك ثابت ≠ ٠

س٢: أجد $\int (٢ص - ٥)(ص + ٣)$ ءص

س٣: أجد $\int \frac{ل^{٢} - ٥ل + ٦}{ل - ٢}$ ءل ، ل ≠ ٢

س٤: أجد $\int (٢س + ١)(س^{٣} + س^{٢} - ٣س + ٤)$ ءس

س٥: إذا كان ق(س) = $\int (٣س^{٣} + ٥س^{٢} - ٢س + ٤)$ ءس، أجد ق/(س).

س٦: إذا كان ص = $\int (٢س + ٢)(س^{٢} + ٢س)^{٥}$ ءس، أجد $\frac{ءص}{ءس}$.

٤-٣ تطبيقات هندسية على التكامل غير المحدود
Geometric Applications for Indefinite Integral

نشاط:

ذهب بلال في رحلة مدرسية إلى مدينة حيفا وزار مدينة الألعاب فيها، ركب بلال في لعبة القطار الذي يسير في مسار متعرج، وبعدها سأل بلال معلمه عن كيفية تصميم هذه الألعاب وتركيبها، بما يضمن سلامة المتنزهين، أجابه المعلم: بأن تصميم الألعاب يعتمد على إيجاد قاعدة رياضية لمنحنى مسار القطار، وهذه مهمة المهندسين.

كيف يمكن معرفة قاعدة الاقتران إذا علم ميل هذا المنحنى عند أي نقطة؟ وهل هناك مشكلة في إيجاد قيمة الثابت جـ؟

لتكن ق$'$(س) = ٢س تمثل ميل منحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه، أجد قاعدة الاقتران ق(س)؟

حسب قاعدة التكامل غير المحدود $\int$ ق$'$(س) ءس = ق(س) + جـ

قاعدة الاقتران ق(س) = $\int$ ٢س ءس = س^{٢} + جـ ألاحظ أنه لا يمكن إيجاد صورة عنصر معين في ق(س) إلا بمعرفة قيمة جـ.

لكن إذا كان منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٣) فإنه يمكن إيجاد قاعدة الاقتران، وإيجاد صورة أي عنصر في هذا الاقتران؟

مثال:

إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالقاعدة ق$'$(س) = ٣س − ١، أجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٧).

الحل: ق(س) = $\int$ ق$'$(س) ءس = $\int$ (٣س − ١) ءس = $\frac{٣س^{٢}}{٢}$ − س + جـ

منحنى الاقتران يمر بالنقطة (٠ ، ٧) ومنها ق(٠) = ٧

ومنها جـ = ٧

ومنها ق(س) = $\frac{٣س^{٢}}{٢}$ − س + ٧

تمارين ومسائل (٤-٣)

س١: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة ق/(س) = ٥، أجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٢ ، ٣).

س٢: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة هـ/(س) = س + ٣، أجد قاعدة الاقتران هـ(س) علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٢ ، ٧).

س٣: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ك(س) عند أي نقطة عليه تعطى بالعلاقة ك/(س) = (س+١)٣، أجد ك(٢) علماً بأن منحنى ك(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٢).

س٤: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ع(س) عند أي نقطة عليه هو (٢س − ٥)، أجد معادلة المماس لمنحنى ع(س) عندما س = ٢ ، علماً بأن منحنى ع(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٣) .

٤-٤ التكامل المحدود (Definite Integral):

نشاط (١):

بلغت كمية الأمطار التراكمية التي هطلت على محافظة الخليل لموسم ٢٠١٧م حسب الأرقام التي أوردتها وزارة الزراعة ٤١٦ ملم. حيث يتم قياس هذه الكمية بمقياس كمية الأمطار الموجود في منطقة محددة، وذلك لصعوبة جمع الأمطار في منطقة غير محددة.

وكذلك المماس يمكن أن يكون مماساً لعدد غير محدود من المنحنيات، لكن إذا علمت نقطة التماس فيمكن تحديد الاقتران الخاص لهذا المماس.

نشاط (٢):

إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) هو ق$'$(س) = ٢س + ٣، كيف يمكن حساب التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_١$ = ٢ إلى س$_٢$ = ٥؟

لحساب هذا التغير يلزمنا ق(س)، حيث:

ق(س) = $\int$ ق$'$(س) ءس

= $\int$ (......) ءس

= س^٢ + ٣س + جـ

التغير في الاقتران = ق(٥) − ق(٢) =

= (٢٥ + ١٥ + جـ) − (   )

= ٣٠

هل نحن بحاجة لمعرفة قيمة الثابت جـ لحساب هذا التغير؟

تعريف:

إذا كانت ق$'$(س) هي المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، وكان ق$'$(س) قابلاً للتكامل،

فإن $\int_{أ}^{ب}$ ق$'$(س)ءس = ق(ب) − ق(أ)، أ،ب عددان حقيقيان. وهذا التكامل يسمى تكاملاً محدوداً،

حدّه العلوي = ب، وحدّه السفلي= أ، وقيمته = عدداً ثابتاً.

مثال (١): أحسب قيمة التكامل $\int_{١}^{٢} (\text{س} - ٣)\, \text{ءس}$ ؟

الحل: $\text{ق(س)} = \int (\text{س} - ٣)\, \text{ءس}$

$$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٣\text{س} + \text{جـ}$$

$$\int_{١}^{٢} (\text{س} - ٣)\, \text{ءس} = \text{ق}(٢) - \text{ق}(١)$$

$$= (٢ - ٦ + \text{جـ}) - (\frac{١}{٢} - ٣ + \text{جـ})$$

$$= \frac{-٣}{٢} + \text{جـ} - \text{جـ} = \frac{-٣}{٢}$$

يمكن حل المثال بطريقة أخرى

$$\int_{١}^{٢} (\text{س} - ٣)\text{ءس} = (\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٣\text{س}) \Big|_{١}^{٢}$$

أعوض الحد العلوي، ثم أطرح منه ناتج تعويض الحد السفلي.

$$= (٢ - ٦) - (\frac{١}{٢} - ٣) = \frac{-٣}{٢}$$

مثال (٢): أجد $\int_{-١}^{٢} (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)\, \text{ءس}$

الحل: $\int_{-١}^{٢} (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)\, \text{ءس} = (\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + \text{س}) \Big|_{-١}^{٢}$

$$= (٨ - ٤ + ٢) - (-١ - ١ - ١)$$

$$= ٩$$

مثال (٣): إذا كان $\int_{٢}^{٤} (\text{ب س} - ٧)\, \text{ءس} = ٣٤$، أجد قيمة الثابت ب.

الحل: $\int_{٢}^{٤} (\text{ب س} - ٧)\, \text{ءس} = (\frac{\text{ب س}^{٢}}{٢} - ٧\text{س}) \Big|_{٢}^{٤} = ٣٤$

$$= (٨\text{ب} - ٢٨) - (٢\text{ب} - ١٤) = ٣٤$$

$$٦\text{ب} - ١٤ = ٣٤$$

$$٦\text{ب} = ٤٨$$

$$\text{ب} = ٨$$

مثال (٤): إذا كان $\int_{٥}^{ب} ٦س \, ءس = {}^{-}٦٣$، أجد قيمة/قيم الثابت ب.

الحل: $\int_{٥}^{ب} ٦س ءس = ٣س^{٢} \Big|_{٥}^{ب} = {}^{-}٦٣$

$٣ب^{٢} - ٧٥ = {}^{-}٦٣$

$ب^{٢} = ٤$ (لماذا؟)

$ب = \pm ٢$

نشاط (٣):

جد ق$'$(س) في كل مما يأتي:

١. $ق(س) = \int_{٢}^{٣} (٣س^{٢} + ٢س) \, ءس$

٢. $ق(س) = \int_{{}^{-}١}^{٧} (٧س^{٥} - ٣س)^{٩} \, ءس$

أتعلم: مشتقة التكامل المحدود تساوي صفراً.

تمارين ومسائل (٤-٤)

س١: أحسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{-١}^{٢} ٦\pi \, ءس$

ب) $\int_{٠}^{٢} (٥ - ٣س^{٢}) \, ءس$

ج) $\int_{١}^{٣} \left(\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٣}}\right) ءس$

د) $\int_{١}^{٨} \sqrt[٣]{س} \, ءس$

س٢: إذا كان $\int_{٣}^{٥} ب^{٢} ءس = ٣٢$ فما قيمة/ قيم الثابت ب؟

س٣: إذا كان $\int_{-٢}^{أ} (٣ - ٢س) \, ءس =$ صفراً، فما قيمة/ قيم الثابت أ.

س٤: أحسب $\int_{٠}^{٢} (٢س - ١)^{٢} ءس$.

س٥: أجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

أ) $ص = \int (٤س^{٣} + ٢س - ٥) \, ءس$

ب) $ص = \int_{٢}^{٧} (٤س^{٣} + ٢س - ٥) \, ءس$

٤-٥ خصائص التكامل المحدود Definite Integral Properties

نشاط (١):

ماجد طالب مجتهد، يذهب صباحاً إلى مدرسته التي تبعد عن منزله ٣كم، وبعد المدرسة يذهب إلى دكّان والده الذي يبعد عن المدرسة ٢كم، وفي المساء يعود من الطريق نفسه، ويقوم بواجباته المدرسية. فإذا كانت المدرسة تقع بين منزله ودكان والده، وجميعها على استقامة واحدة:

المنزل ــــــــــــــــ ٣كم ــــــــــــــــ المدرسة ــــــــــــــــ ٢كم ــــــــــــــــ الدكان

١) يسير ماجد في ذهابه من المنزل إلى المدرسة في اليوم الواحد مسافة ....

٢) يسير ماجد في ذهابه من المدرسة إلى الدكّان في اليوم الواحد مسافة ....

٣) يسير ماجد في ذهابه من المنزل إلى الدكّان في اليوم الواحد مسافة ....

٤) يسير ماجد في ذهابه من المنزل إلى الدكّان في ٤ مسافات ....

٥) عندما يخرج من المنزل في الصباح، ثم يعود إليه مساءً، تكون إزاحته = صفراً (لماذا؟)

٦) إذا اعتبرنا أن إزاحته من المنزل إلى الدكّان ٥كم باتجاه الدكّان، فإن إزاحته من الدكّان إلى المنزل ....

نشاط (٢):

١. $\int_{٢}^{٢} ٧\, دس = ٧س \Big|_{٢}^{٢} = ٧\,(٢ - ٢) = ٠$

٢. $\int_{٥}^{٥} (٢س + ٣)\, دس = (.........) \Big|_{٥}^{٥} = ٠$ (لماذا؟)

خاصية (١): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل فإن $\int_{أ}^{أ} ق(س)\, دس = ٠$ لكل أ $\in$ ح

فمثلاً: أ) $\int_{١}^{١} (٢س^{٢} + ٣س + ٢)\, دس = ٠$ حسب الخاصية (١)

ب) $\int_{٢}^{٢} (\sqrt{س} + ٥)\, دس = ٠$ حسب الخاصية (١)

نشاط (٣):

أكمل الجدول الآتي:

التكامل	قيمته	التكامل	قيمته
$\int_{١}^{٢} (\text{س} + ١)\, \text{ءس}$	$\frac{٥}{٢}$	$\int_{٢}^{١} (\text{س} + ١)\, \text{ءس}$	$\frac{-٥}{٢}$
$\int_{٣}^{٥} ٧\, \text{ءس}$	١٤	$\int_{٥}^{٣} ٧\, \text{ءس}$	
$\int_{٠}^{١} \text{س}^{٥}\, \text{ءس}$		$\int_{١}^{٠} \text{س}^{٥}\, \text{ءس}$	$-\frac{١}{٦}$

من الجدول ماذا نلاحظ ؟

خاصية (٢): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، فإن: $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = - \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$

مثال (١): إذا علمت أن $\int_{١}^{٢} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = ٨$، أحسب $\int_{٢}^{١} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$ ؟

الحل: $\int_{٢}^{١} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = - \int_{١}^{٢} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = ٨^{-}$ حسب الخاصية (٢)

مثال (٢): إذا كان $\int_{٢}^{٣} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = ٣^{-}$ ، جد $\int_{٣}^{٢} ٢^{-}\text{ق(س)}\, \text{ءس}$ ؟

الحل: $\int_{٣}^{٢} ٢^{-}\text{ق(س)}\, \text{ءس} = ٢^{-} \int_{٣}^{٢} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$

$= ٢ \int_{٢}^{٣} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$ لماذا؟

$= ٢\, (٣^{-}) = ٦^{-}$

نشاط (٤):

أكمل الجدول الآتي:

التكامل	(١) قيمته	التكامل	(٢) قيمته	التكامل	(٣) قيمته	أكتب علاقة بين (١)،(٢)،(٣)
$\int_{١}^{٢} ٥\,ءس$	٥	$\int_{٢}^{٥} ٥\,ءس$	١٥	$\int_{١}^{٥} ٥\,ءس$	٢٠	٥ + ١٥ = ٢٠
$\int_{٠}^{٢} س^٢\,ءس$	$\frac{٨}{٣}$	$\int_{٢}^{٤} س^٢\,ءس$		$\int_{٠}^{٤} س^٢\,ءس$	$\frac{٦٤}{٣}$	
$\int_{١}^{٢} (س - ٣)\,ءس$		$\int_{٢}^{٣} (س - ٣)\,ءس$	$-\frac{١}{٢}$	$\int_{١}^{٣} (س - ٣)\,ءس$		

من الجدول أعلاه، ماذا نلاحظ؟

خاصية (٣): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، على [أ ، جـ] ، ب ∈ [أ ، جـ] فإن

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\,ءس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,ءس$$ (خاصية الإضافة)

مثال (٣): إذا علمت أن $\int_{١}^{٢} ق(س)\,ءس = ٣$ ، $\int_{٢}^{٤} ق(س)\,ءس = -٩$ أجد $\int_{١}^{٤} ق(س)\,ءس$ ؟

الحل: $\int_{١}^{٤} ق(س)\,ءس = \int_{١}^{٢} ق(س)\,ءس + \int_{٢}^{٤} ق(س)\,ءس$ حسب الخاصية (٣)

$= (٣) + (-٩) = -٦$

مثال (٤): إذا علمت أن $\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = ٢$ ، $\int_{٤}^{٣} ٥\text{ق(س)}\,\text{ءس} = ١٥$ ، أجد $\int_{١}^{٤} -٢\text{ق(س)}\ \text{ءس}$ ؟

الحل: $\int_{١}^{٤} -٢\text{ق(س)}\ \text{ءس} = -٢ \int_{١}^{٤} \text{ق(س)}\ \text{ءس}$

$$\int_{١}^{٤} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = \int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\ \text{ءس} + \int_{٣}^{٤} \text{ق(س)}\ \text{ءس}$$

لكن $\int_{٣}^{٤} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = -\int_{٤}^{٣} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = -٣$ لماذا؟

$\int_{١}^{٤} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = ٢ + (-٣) = -١$ لماذا؟

$\therefore \int_{١}^{٤} -٢\text{ق(س)}\ \text{ءس} = -٢(-١) = ٢$

خاصية (٤): إذا كان الاقترانان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] فإن

$$\int_{أ}^{ب} \left(\text{ق(س)} \pm \text{هـ(س)}\right) \text{ءس} = \int_{أ}^{ب} \text{ق(س)}\ \text{ءس} \pm \int_{أ}^{ب} \text{هـ(س)}\ \text{ءس}$$

مثال (٥): إذا كان $\int_{-١}^{٢} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = -٥$ ، أجد $\int_{-١}^{٢} (٣\text{ق(س)} + \text{س} + ٢)\ \text{ءس}$ ؟

الحل: $\int_{-١}^{٢} (٣\text{ق(س)} + \text{س} + ٢)\ \text{ءس} = \int_{-١}^{٢} ٣\text{ق(س)}\ \text{ءس} + \int_{-١}^{٢} (\text{س} + ٢)\ \text{ءس}$

$$= ٣\int_{-١}^{٢} \text{ق(س)}\ \text{ءس} + \left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\text{س}\right)\Bigg|_{-١}^{٢}$$

$$= ٣(-٥) + \left[\left(\frac{٤}{٢} + ٤\right) - \left(\frac{١}{٢} + ٢(-١)\right)\right]$$

$$= -١٥ + \left(٦ + \frac{٣}{٢}\right) = \frac{-١٥}{٢}$$

تمارين ومسائل (٤-٥)

س١: أحسب $\int_{٢}^{٢} (س^{٢} - ٦س)\, ءس$

س٢: أحسب التكاملات الآتية:

أ. $\int_{٢}^{٣} (س - ٦)\, ءس$ ب. $\int_{٢}^{٥} (س - ٦)\, ءس$ ج. $\int_{٣}^{٥} (س - ٦)\, ءس$

س٣: إذا كان $\int_{-١}^{٢} ق(س)\, ءس = -٣$ ، $\int_{٠}^{٢} ٢ق(س)\, ءس = ٤$، أجد قيمة الآتي:

أ. $\int_{٠}^{٢} -٣ق(س)\, ءس$ ب. $\int_{-١}^{٠} ق(س)\, ءس$ ج. $\int_{-١}^{٢} (٣ق(س) + س)\, ءس$

س٤: إذا كان $\int_{٢}^{٣} ٣ق(س)\, ءس = ١٢$ ، $\int_{٢}^{٣} -٢هـ(س)\, ءس = ٦$ ، أجد قيمة:

$\int_{٢}^{٣} (٥هـ(س) - ٣ق(س))\, ءس$

٤-٦ التكامل بالتعويض: Integration by Substitution

نشاط (١):

ذهبت إيمان إلى السوق واشترت ٣كغم من التفاح، و٢كغم من البندورة، و٢كغم من الموز، و٣كغم من الخيار، وكيلوغرام واحد من الفجل، ووضعتها في أكياس، ولما همّت بحمل هذه الأغراض، وجدت صعوبةً في حملها؛ لذلك اقترح عليها صاحب المحل أن تضع جميع هذه الأكياس في كيس واحد كبير؛ لتسهيل حملها والتنقل بها.

بعض الاقترانات لايمكن تكاملها باستخدام القواعد التي درستها، وهذه الاقترانات يمكن تكاملها بطرق متعددة ومتنوعة.

سنتعرف في دراستنا لهذه الوحدة طريقة التكامل بالتعويض على أنواع معينة من الاقترانات.

نشاط (٢):

أجد $\int (\text{س} - ٣)^{٢}\, \text{ءس}$

الحل: $\int (\text{س} - ٣)^{٢}\, \text{ءس} = \int (\qquad\qquad)\, \text{ءس}$ (لماذا؟)

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + \text{جـ}$

وبالطريقة نفسها جد $\int (٤\text{س} - ٩)^{٣}\, \text{ءس}$

لكن هل يمكن أن أجد $\int (٤\text{س} - ٩)^{١٠}\, \text{ءس}$ بسهولة بالطريقة نفسها ؟

يمكن إيجاد $\int (\text{س} - ٣)^{٢}\, \text{ءس}$ بطريقة أخرى، تسمى طريقة التكامل بالتعويض.

الحل: أفرض أن ص = (س − ٣) ومنها $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$ ومنها ءس = ءص بالتعويض في التكامل

$$\int (\text{س} - ٣)^{٢}\, \text{ءس} = \int \text{ص}^{٢}\, \text{ءص} = \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ} = \frac{(\text{س} - ٣)^{٣}}{٣} + \text{جـ}$$

مثال (١): أجد $\int (٣\text{س} + ١)^{٩}\, \text{ءس}$

الحل: أفرض أن ص = ٣س + ١ ومنها $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣$ ومنها $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٣}$

أعوض في التكامل $\int (٣\text{س} + ١)^{٩}\, \text{ءس} = \int \text{ص}^{٩} \frac{\text{ءص}}{٣} = \frac{١}{٣} \int \text{ص}^{٩}\, \text{ءص}$

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{\text{ص}^{١٠}}{١٠} + \text{جـ} = \frac{\text{ص}^{١٠}}{٣٠} + \text{جـ}$$

$$= \frac{(٣\text{س} + ١)^{١٠}}{٣٠} + \text{جـ}$$

مثال (٢): أجد $\int_{٠}^{١} س(٣س^{٢} - ١)^{٣} ءس$

الحل: أفرض أن ص = $(٣س^{٢} - ١)$ ومنها $\frac{ءص}{ءس} = ٦س$ ومنها $ءس = \frac{ءص}{٦س}$

أعوض في التكامل

$$\int س(٣س^{٢} - ١)^{٣} ءس = \int س ص^{٣} \frac{ءص}{٦س} = \frac{١}{٦} \int ص^{٣} ءص$$

$$= \frac{١}{٦} \times \frac{ص^{٤}}{٤} + ج = \frac{(٣س^{٢} - ١)^{٤}}{٢٤} + ج$$

$$\int_{٠}^{١} س(٣س^{٢} - ١)^{٣} ءس = \left. \frac{(٣س^{٢} - ١)^{٤}}{٢٤} \right|_{٠}^{١}$$

$$\frac{(٣ \times ١ - ١)^{٤}}{٢٤} - \frac{(٣ \times ٠ - ١)^{٤}}{٢٤} = \frac{١٥}{٢٤}$$

مثال (٣): أجد $\int (٢س + ١)(س^{٢} + س - ٥)^{٣} ءس$

الحل: أفرض أن ص = $(س^{٢} + س - ٥)$ ومنها $\frac{ءص}{ءس} = (٢س + ١)$ ومنها $ءس = \frac{ءص}{(٢س + ١)}$

أعوض في التكامل

$$\int (٢س + ١)(س^{٢} + س - ٥)^{٣} ءس = \int (٢س + ١)(ص)^{٣} \frac{ءص}{(٢س + ١)}$$

$$= \int ص^{٣} ءص = \frac{ص^{٤}}{٤} + ج$$

$$= \frac{(س^{٢} + س - ٥)^{٤}}{٤} + ج$$

تمارين ومسائل (٤-٦)

أجد التكاملات الآتية:

س١: $\int (٢ - ٣س)^{٣} \, ءس$

س٢: $\int \frac{٣}{(س - ١)^{٥}} \, ءس$

س٣: $\int (أس + ب)^{٤} \, ءس$ ، أ ، ب ثوابت

س٤: $\int س^{٢}(س^{٣} + ١)^{٤} \, ءس$

س٥: $\int_{١}^{٢} (٢س - ١)^{٢} \, ءس$

س٦: $\int_{٠}^{١} (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢} \, ءس$

س٧: $\int \sqrt{٣س - ١} \, ءس$

س٨: $\int (س + ٢) \sqrt[٣]{س^{٢} + ٤س + ٥} \, ءس$

٤-٧ تطبيقات على التكامل المحدود (إيجاد المساحات)
Definite Integral Applications(Areas)

نشاط:

تعمل دائرة تسجيل الأراضي في فلسطين على تسجيل الأراضي بأسماء مالكيها الحقيقيين، ومن متطلبات هذا التسجيل معرفة مساحة كل قطعة من هذه الأراضي.

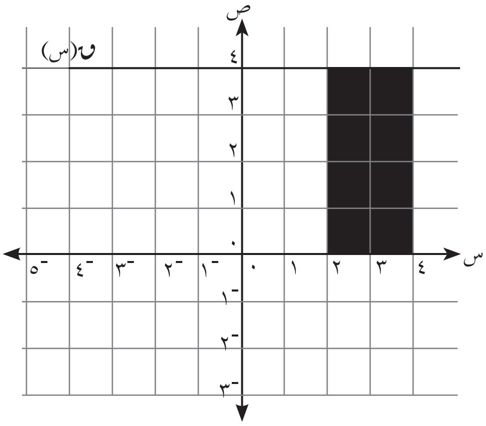
بعض من هذه القطع أشكالها هندسية مستوية منتظمة كالمثلث والمستطيل وشبه المنحرف، إضافةً إلى الأشكال التي يمكن تركيبها من هذه الأشكال، وبعضها الآخر ذات أشكال غير منتظمة، لا يمكن حساب مساحتها باستخدام قوانين المساحات. كيف يمكن إيجاد مساحة مثل هذه القطع؟

سنستخدم التكامل المحدود لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات في فترة معينة، علماً بأن ق(س) ممثل بيانياً ويقع منحناه فوق محور السينات.

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً موجباً (فوق محور السينات)، فإن مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب تساوي $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس

مثال (١): أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = ٤ ومحور السينات والمستقيمين س = ٢، س = ٤ كما في الشكل المجاور.

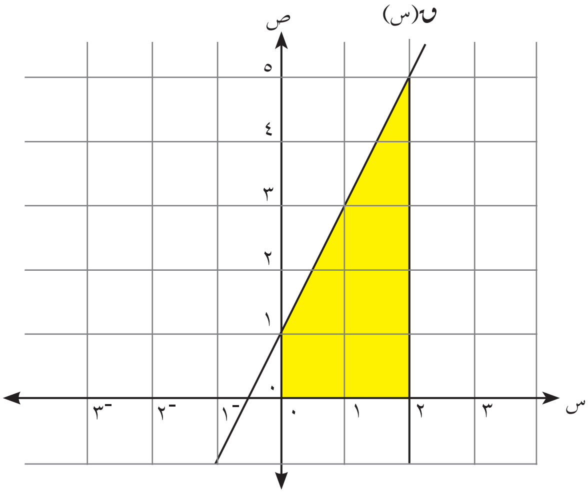


الحل: $\int_{٢}^{٤}$ ٤ ءس = ٤س $\Big|_{٢}^{٤}$ = ٤ × ٤ − ٤ × ٢ = ٨ وحدات مربعة.

ألاحظ أن المنطقة المحصورة هي مستطيلة الشكل.

مساحة المستطيل = الطول × العرض = ٤ × ٢ = ٨ وحدات مربعة.

مثال (٢): أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + ١$ ومحور السينات، والمستقيمين $\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ٢$ ، ألاحظ الشكل المرسوم.



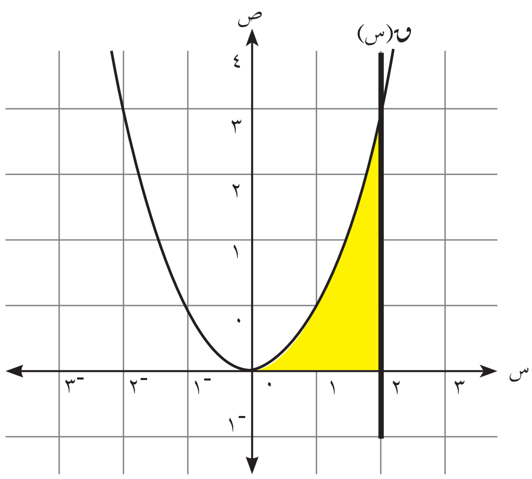
الحل: المساحة (م) المظللة في الشكل تساوي

$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} (٢\text{س} + ١)\, \text{ءس} = (\text{س}^{٢} + \text{س}) \Big|_{٠}^{٢}$$

$$= (٤ + ٢) - (٠) = ٦ \text{ وحدات مربعة}$$

هل يمكن إيجاد المساحة بطريقة أخرى؟

مثال (٣): أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$ ومحور السينات والمستقيمين $\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ٢$ ، ألاحظ الشكل المرسوم.



الحل: المساحة (م) المظللة في الشكل تساوي

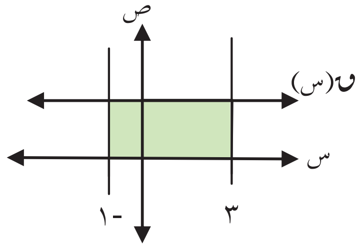
$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} \text{س}^{٢}\, \text{ءس} = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} \Big|_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{٨}{٣} - \frac{٠}{٣} = \frac{٨}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

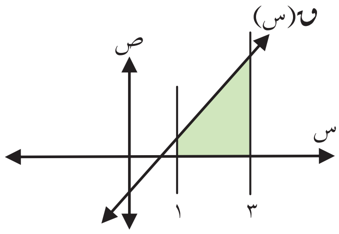
هل يمكن حساب المساحة بطريقة أخرى؟

تمارين ومسائل (٤-٧)

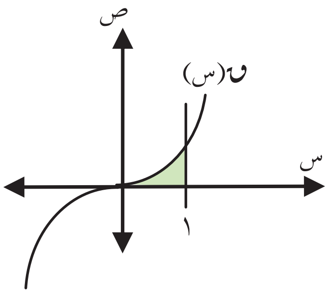
س١: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٣، ومحور السينات والمستقيمين س = ⁻١ ، س = ٣



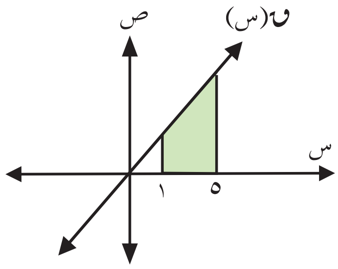
س٢: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٣س − ٢ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣



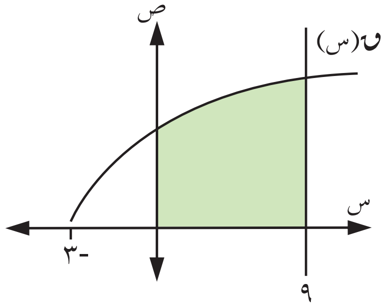
س٣: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س^{٣}، ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ١



س٤: إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = أس ومحور السينات والمستقيمين س = ١، س = ٥ تساوي ٨ فما قيمة الثابت أ ، أ > ٠



س٥: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ل(س) = $\sqrt{\text{٣س + ٩}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = صفر ، س = ٩.



٤ – ٨ تمارين عامة

س١: أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) إذا كان ق(س) = $\int$ (٢س + ١) دس فما قيمة ق$'$(٢)؟

أ) صفر   ب) ٢   ج) ٥   د) ٦

٢) ما الاقتران الذي يمثل اقتراناً أصلياً للمشتقة ق$'$(س) = ٤س^{٢} + ٦س + ٢ ؟

أ) ق(س) = $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢س + ١   ب) ق(س) = $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + ٦س^{٢} + ٢س + ١

جـ) ق(س) = ٨س + ٦   د) ق(س) = $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢

٣) إذا كان $\int$ ق$'$(س) دس = ٣س − ٤س^{٢} + ٢، ما قيمة ق$'$(١) ؟

أ) -٨   ب) -٥   ج) ١   د) صفر

٤) ما هو $\int$ س $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ دس؟

أ) س$^{\frac{٥}{٣}}$ + جـ   ب) $\frac{٣}{٥}$س$^{\frac{٥}{٣}}$ + جـ   ج) س$^{\frac{٨}{٣}}$ + جـ   د) $\frac{٣}{٨}$س$^{\frac{٨}{٣}}$ + جـ

٥) إذا كان $\int_{٢}^{٥}$ ق$'$(س) دس = ١٢، وكان ق(٥) = ٢ق(٢)، ما قيمة ق(٢) ؟

أ) ١٢   ب) ٥   ج) ٤   د) ٢

٦) إذا كان هـ(س) = $\int_{٠}^{٣}$ (٢س + ٣س^{٢} + ١) دس، ما قيمة هـ$'$(٢)؟

أ) صفر   ب) ٣   ج) ٨   د) ١٥

٧) إذا كان $\int_{١}^{ب}$ بدس = ٢، ما قيمة/ قيم الثابت ب ؟

أ) ١ ، ٢   ب) ١ ، -٢   ج) -١، ٢   د) -١ ، -٢

٨) إذا كان $\int_{٢}^{٧}$ ٣ق(س)دس = ٩، $\int_{٧}^{٥}$ ق(س)دس = -٢، ما قيمة $\int_{٢}^{٥}$ ق(س)دس ؟

أ) ٧   ب) ١١   ج) ٥   د) ١

٩) ما قيمة $\int_{١}^{١} (س^{٢} + ٢س + ١)^{٥} \, ءس$

أ) صفر　　ب) $(٤)^{٦}$　　ج) $(٤)^{٥}$　　د) $\frac{(س^{٢} + ٢س + ١)^{٦}}{٦} + جـ$

١٠) $\int (٢س + ٣)^{٧} \, ءس =$

أ) $(٢س+٣)^{٨} + جـ$　　ب) $\frac{(٢س + ٣)^{٨}}{٨} + جـ$

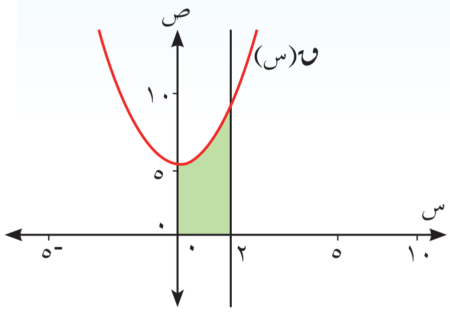
ج) $\frac{(٢س + ٣)^{٨}}{١٦} + جـ$　　د) $\frac{(٢س + ٣)^{٨}}{٤} + جـ$

س٢: إذا علمت أن $ق'(س) = ٤س^{٣} + س^{٢} - ٢س$، $ق(٠) = ٣$ أجد $ق(١)$.

س٣: إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $ق'(س) = ٣ - ٢س$، ما قاعدة الاقتران $ق(س)$ علماً بأن منحنى $ق(س)$ يمر بالنقطة $(١، ٦)$.

س٤: إذا كان $\int_{١}^{٣} ق(س) \, ءس = ٧$ ، $\int_{١}^{٣} هـ(س) \, ءس = -٤$، ما قيمة $\int_{١}^{٣} (٢ق(س) - ٥هـ(س) + ٢) \, ءس$؟

س٥: أجد $\int (٢س + ١) \sqrt[٣]{(س^{٢} + س + ٤)^{٢}} \, ءس$.



س٦: أجد المساحة المحصورة بين منحنى $ق(س) = س^{٢} + ٥$، ومحور السينات والمستقيمين $س = ٠$ ، $س = ٢$.

س٧: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
أجد تكامل اقترانات غير محدودة			
أوظف قواعد التكامل في حل مسائل منتمية			
أكامل اقترانات باستخدام التعويض			
حل مشكلات وتطبيقات على التكامل المحدود			

الوحدة ٥

الأعداد المركبة Complex Numbers

طلبت شركة للاتصالات من مكتب للإعلانات تصميم لوحة إعلانية مستطيلة الشكل محيطها ٨م ومساحتها ٨م^{٢}، رفض المكتب ذلك. (لماذا؟)

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الأعداد المركبة في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إلى مجموعة الأعداد المركبة.
٢. إيجاد ناتج: الجمع، والطرح، والضرب على الأعداد المركبة.
٣. التعرف إلى خصائص العمليات على الأعداد المركبة.
٤. التعرف إلى مقياس العدد المركب، ومرافقه، وخصائصهما.
٥. إيجاد ناتج قسمة عددين مركبين.
٦. تمثيل العدد المركب بيانياً (بنقطة ومتجه).
٧. كتابة العدد المركب بالصورة القطبية.

٥-١ الأعداد المركبة (Complex Numbers)

نشاط (١):

أراد أبو محمود شراء قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها (س^{٢} − ٥س +٨)م^{٢} وأحد أبعادها (س + ٣)م. لم يقبل محمود فكرة أبيه وقال له هذه القطعة ليست مستطيلة الشكل، كيف عرف محمود ذلك؟

درست في السنوات السابقة مجموعة الأعداد الطبيعية، ثم الأعداد الصحيحة، إلى أن تعرفت أخيراً إلى مجموعة الأعداد الحقيقية، وقد لاحظت وجود قصور في نظام الأعداد الحقيقية، حيث إننا لا نستطيع إيجاد حلول للمعادلات كافةً باستخدام هذا النظام، وخاصةً المعادلة التربيعية التي مميزها سالب، فمن أجل وجود حلول للمعادلة التربيعية في نظام الأعداد الحقيقية، لا بد أن يكون المميز غير سالب؛ لأن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف في هذا النظام.

في القرن السادس عشر قام العالم كاردانو (Gerolamo Cardano) بتعريف نظام جديد في محاولته لإيجاد حلول للمعادلة التربيعية بشكل عام، فقام بتعريف عدد جديد هو ت = $\sqrt{-١}$ ثم قام بتعريف نظام جديد للأعداد أسماه الأعداد المركبة (ك) والتي لها تطبيقات مهمة في مختلف العلوم، مثل: الهندسة، والفيزياء وغيرها...

نشاط (٢):

ما مجموعة حل المعادلة س^{٣} + س = ٠ في ك ؟

الحل: س^{٣} + س = ٠ ومنها س(س^{٢} + ١) = ٠ وينتج أن س = ٠، (س^{٢} + ١) = ٠

أكمل: س^{٢} = ...، س = ± ..... ومنها س = ± ت

مجموعة الحل = { ٠ ، ..... ، ..... }

تعريف:

(١) العدد المركب هو مقدار جبري على الشكل ع = س + ص ت حيث س ، ص ∈ ح، ت = $\sqrt{-١}$
ويسمى س الجزء الحقيقي للعدد المركب، ويسمى ص الجزء التخيلي له.

(٢) مجموعة الأعداد المركبة = { س + ص ت، س، ص ∈ ح، ت = $\sqrt{-١}$ } ، ويرمز لها بالرمز ك .

مثال (١): جد الجزء الحقيقي، والجزء التخيلي لكل من:

١) ع = ٤ − ت

٢) ع = $\frac{ت + \sqrt{٢}}{٤}$

الحل: ١) الجزء الحقيقي للعدد ع = ٤ − ت هو ٤ ، بينما الجزء التخيلي هو $^{-}$١

٢) الجزء الحقيقي للعدد ع = $\frac{ت + \sqrt{٢}}{٤}$ هو $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ بينما الجزء التخيلي هو $\frac{١}{٤}$

ملاحظة:

يكون العدد المركب ع = س + ص ت

» عدداً حقيقياً إذا كانت ص = ٠

» عدداً تخيلياً إذا كانت س = ٠

» صفراً إذا كانت س = ٠ ، ص = ٠

نشاط (٣):

أكمل الجدول الآتي:

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$\frac{١}{٢}$		٠
٢ت		
$\frac{٢ - ٣ت}{٢}$	١	
$\sqrt{-١٢}$		
٣ + ت	٣	

نشاط (٤):

أوجد كل من أشرف وخالد قيمة المقدار $\sqrt{-٤} \times \sqrt{-٩}$

كانت إجابة أشرف كما يلي:

$\sqrt{-٤} \times \sqrt{-٩}$

$= \sqrt{-٤ \times -٩}$

$= \sqrt{٣٦}$

$= ٦$

أما إجابة خالد فكانت كما يلي:

$\sqrt{-٤} \times \sqrt{-٩}$

$= \sqrt{٤ \times -١} \times \sqrt{٩ \times -١}$

$= \sqrt{٤} \times \sqrt{-١} \times \sqrt{٩} \times \sqrt{-١}$

$=$ ٢ت × ٣ت

$=$ ٦ت^{٢} = ‎-٦

أناقش: أيهما كانت إجابته صحيحة؟

ملاحظة:

إذا كان س ، ص $\in$ ح$^-$ فإن $\sqrt{س} \times \sqrt{ص} \neq \sqrt{س \times ص}$

تعلم من التعريف أن ت = $\sqrt{-١}$ ومنها ت^٢ = ت × ت = $\sqrt{^-١} \times \sqrt{^-١} = (\sqrt{^-١})^٢ = {}^-١$

وكذلك فإن (ت)^٣ = $^-$ت ، ت^٤ = ١ .... (لماذا؟)

وبشكل عام إذا كانت ن $\in$ ص$^+$ فإن ت^ن = ت^م حيث م هي باقي قسمة ن على ٤ ، ٠ $\leqslant$ م $<$ ٤

مثال (٢): أجد قيمة (أ) ت^{٩٩} ، (ب) $\frac{١}{ت^{٢٢}}$

الحل: أ) لاحظ أن باقي قسمة ٩٩ على ٤ يساوي ٣، ومنها فإن ت^{٩٩} = ت^٣ = $^-$ت

ب) $\frac{١}{ت^{٢٢}} = \frac{١}{ت^٢} = {}^-١$ (لماذا؟)

مثال (٣): أجد قيمة ١ + ت + ت^٢ + ت^٣.

الحل: ١ + ت + ت^٢ + ت^٣

= ١ + ت + $^-$١ + $^-$ت = ٠

طريقة أخرى للحل: باستخدام التحليل للعوامل:

(١ + ت + ت^٢ + ت^٣)

= (١ + ت) + ت^٢ (١ + ت)

= (١ + ت) (١ + ت^٢) = ٠ (لماذا؟)

تمارين ومسائل (٥-١)

س١: اكتب ما يلي على الصورة س + ص ت:

أ) $٢ + \sqrt{-٢}$

ب) $\sqrt{-٤} + \sqrt{-٩}$

ج) $\sqrt{-٨} \times \sqrt{-٢}$

س٢: أحدد الجزء الحقيقي، والجزء التخيلي لكل مما يأتي:

أ) $\frac{٢}{٥}$ ت − ٣

ب) $\sqrt{-٩}$

ج) $١ - \sqrt{-١}$

د) $\sqrt{٩ \times -٤}$

هـ) −٢ت

و) $\frac{١}{٣}$

س٣: أبيّن أن $(١ + ت - ت^٢)^٣ (١ - ت - ت^٢)^٣ = ١٢٥$

س٤: اكتب كلاً مما يأتي بأبسط صورة:

أ) $ت^{٤٣}$

ب) $\frac{١}{ت^{٦٥}}$

ج) $ت^{٢٧} + \frac{١}{ت^{٢٧}}$

س٥: أثبت أن $\frac{١ + ٢ت^٢ + ت^٣ + ٢ت}{ت^٣ + ت^٤} = -١$

٥-٢ العمليات على الأعداد المركبة:
Operations on Complex numbers

نشاط (١):

يستخدم الفيزيائيون الأعداد المركبة في الدارات الكهربائية ذات التيار المتردد لحساب الجهد حيث أن:
فرق الجهد يعرف بالقانون جـ = م ت ، حيث م هي المقاومة، ت هي شدة التيار.
ما فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد في الحالات الآتية:
أ) شدة التيار = ٣ أمبير ، المقاومة = ٧ أوم.
ب) شدة التيار = ٢ + ٢ت أمبير، المقاومة = ٩ − ٣ت أوم.
أ) جـ = م ت
= ٧ × ٣
= ٢١ فولت.
ب) جـ = (٩ − ٣ت) × (٢ + ٢ت)
= ....

بما أن العدد المركب هو مقدار جبري يُكتب على الصورة س + ص ت فإنه يمكن تعريف الجمع والضرب على الأعداد المركبة، من خلال عملية جمع وضرب مقدارين جبريين، ويكون لهما نفس خصائص عمليتي الجمع والضرب للمقادير الجبرية، مع مراعاة خصائص قوى ت.

تساوي عددين مركبين:

تعريف:
يتساوى العددان المركبان $ع_١ = س_١ + ص_١ت$ ، $ع_٢ = س_٢ + ص_٢ت$ إذا وفقط إذا كان لهما الجزء الحقيقي نفسه، والجزء التخيلي نفسه، أي أن $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$

مثال (١): إذا كان ٢س + ٣ت = (ص + س) + ص ت، أجد كلاً من س،ص في ح

الحل: بما أن العددين متساويان، فإن: ٢س = س + ص ——— (١)
٣ = ص ———— (٢)
بالتعويض في ١ ينتج أن س = ٣

جمع الأعداد المركبة، وطرحها:

تعريف:
إذا كان $ع_١ = س_١ + ص_١ت$ ، $ع_٢ = س_٢ + ص_٢ت$ فإن $ع_١ \pm ع_٢ = (س_١ \pm س_٢) + (ص_١ \pm ص_٢)$ ت

مثال (٢): أجد ناتج (٢ − ٣ت) + (٣ − ٤ت)

الحل: (٢ − ٣ت) + (٣ − ٤ت)

= (٢ + ٣) + (-٣ − ٤)ت

= ٥ − ٧ت

مثال (٣): إذا كان $ع_١$ = ٣ − ت، $ع_٢$ = ١ + ٢ت، $ع_٣$ = -٥ت، أجد: أ) ($ع_١$ − $ع_٢$)

ب) ($ع_١$ + $ع_٢$) − $ع_٣$

الحل: أ) $ع_١$ − $ع_٢$ = (٣ − ت) − (١ + ٢ت)

= (٣ − ١) + (-١ − ٢) ت

= ٢ − ٣ت

ب) ($ع_١$ + $ع_٢$) − $ع_٣$

= ((٣ − ت) + (١ + ٢ت)) − (-٥ت)

= ٤ + ٦ت

خصائص عملية الجمع على الأعداد المركبة:

١) عملية الجمع على الأعداد المركبة عملية مغلقة أي أنه ∀ $ع_١$ ، $ع_٢$ ∈ ك فإن $ع_١$ + $ع_٢$ ∈ ك

٢) عملية الجمع على الأعداد المركبة عملية تجميعية

أي أنه ∀$ع_١$ ، $ع_٢$، $ع_٣$∈ك فإن ($ع_١$ + $ع_٢$) + $ع_٣$ = $ع_١$ + ($ع_٢$ + $ع_٣$)

٣) يوجد عنصر محايد بالنسبة لعملية الجمع على الأعداد المركبة هو الصفر

إذا كان ∀ ع ∈ ك ، فإن ٠ + ع = ع + ٠ = ع .

٤) يوجد لكل عنصر نظير جمعي: إذا كان ع ∈ ك فإن -ع ∈ ك

فإن ع + (-ع) = (-ع) + ع = ٠ ويسمى -ع النظير الجمعي للعدد ع.

٥) عملية الجمع عملية تبديلية: ∀$ع_١$ ، $ع_٢$ ∈ ك ، فإن $ع_١$ + $ع_٢$ = $ع_٢$ + $ع_١$

ضرب الأعداد المركبة:

تعريف:

إذا كان $ع_١$ = $س_١$ + $ص_١$ت ، $ع_٢$ = $س_٢$ + $ص_٢$ت فإن $ع_١$ $ع_٢$ = ($س_١$ $س_٢$ − $ص_١$ $ص_٢$) + ($س_١$ $ص_٢$ + $س_٢$ $ص_١$)ت

نتيجة: إذا كانت جـ ∈ ح فإن جـ (س + ص ت) = جـ س + جـ ص ت

مثال (٤): أجد ناتج أ) (٣ + ت)(٢ − ٥ت)   ب) ت(ت + ٥)(٣ − ت^{٥})

الحل: أ) (٣ + ت)(٢ − ٥ت)

= (٣ × ٢ − ١ × ⁻٥) + (٣ × ⁻٥ + ١ × ٢)ت

= ١١ − ١٣ت   (من تعريف عملية الضرب)

ب) ت(ت + ٥)(٣ − ت^{٥})

(⁻١ + ٥ت)(٣ − ت)

= ٢ + ١٦ت   (لماذا؟)

مثال (٥): ليكن ع$_{١}$ = ٣ + ٥ت ، ع$_{٢}$ = ٦ − ٥ت فأجد قيمة كل مما يأتي:

أ) ٥ع$_{١}$ ب) ٣ع$_{٢}$ + ٥ع$_{١}$ − ٢ت   ج) م حيث ٤ − ت ع$_{١}$ = م(ت − ٣)، حيث م ∈ ح

الحل: أ) ٥ع$_{١}$ = ٥(٣ + ٥ت)

= ١٥ + ٢٥ت

ب) ٣ع$_{٢}$ + ٥ع$_{١}$ − ٢ت

= ٣(٦ − ٥ت) + ٥(٣ + ٥ت) − ٢ت

= ٣٣ + ٨ت

ج) ٤ − ت ع$_{١}$ = م(ت − ٣)

٤ − ت ع$_{١}$ = ٤ − ت(٣ + ٥ت)

= ٤ − ٣ت − ٥ت^{٢}

= ٤ − ٣ت + ٥ = ٩ − ٣ت

أي أن ٩ − ٣ت = م(ت − ٣)

⁻٣ت + ٩ = م(ت − ٣)

⁻٣(ت − ٣) = م(ت − ٣)

ومنها م = ⁻٣

خصائص عملية الضرب على الأعداد المركبة:

١) **عملية الضرب مغلقة:** $\forall$ ع$_١$ ، ع$_٢$ $\in$ ك فإن ع$_١$ × ع$_٢$ $\in$ ك

٢) **عملية الضرب تجميعية:** $\forall$ ع$_١$ ، ع$_٢$، ع$_٣$ $\in$ ك فإن (ع$_١$ × ع$_٢$) × ع$_٣$ = ع$_١$ × (ع$_٢$ × ع$_٣$)

٣) **العنصر المحايد لعملية الضرب:** العدد ١ هو العنصر المحايد لعملية الضرب حيث $\forall$ ع $\in$ ك

فإن ١ × ع = ع × ١ = ع

٤) **النظير الضربي:** $\forall$ ع $\in$ ك ، ع $\neq$ ٠ يوجد $\frac{١}{ع}$ $\in$ ك بحيث $\frac{١}{ع}$ × ع = ع × $\frac{١}{ع}$ = ١

ويسمى $\frac{١}{ع}$ النظير الضربي للعدد ع ونرمز له بالرمز ع$^{-١}$

٥) عملية الضرب تبديلية: $\forall$ ع$_١$ ، ع$_٢$ $\in$ ك فإن ع$_١$ × ع$_٢$ = ع$_٢$ × ع$_١$

نشاط (١):

أجد النظير الضربي ع$^{-١}$ للعدد المركب ع = ٣ + ٤ت

الحل: باستخدام التعريف نفرض ع$^{-١}$ = س + ص ت فيكون ع$^{-١}$ × ع = ١

أي أن (س + ص ت)(٣ + ٤ت) = ١

ومنها ٣س − ٤ص = ١ ، ٤س + ٣ص = ...

وبحل المعادلتين، ينتج أن ص = ... س = ...،

ومنها النظير الضربي ع$^{-١}$ ....

ملاحظة:

النظير الضربي للعدد المركب (س + ص ت) هو $\frac{س}{س^٢ + ص^٢}$ + $\frac{-ص}{س^٢ + ص^٢}$ ت

مثال (٦): جد النظير الضربي للعدد ع = ١ + ٢$\sqrt{٢}$ ت

الحل: باستخدام القاعدة السابقة، حيث س = ١ ، ص = ٢$\sqrt{٢}$ ، وينتج أن:

ع$^{-١}$ = $\frac{س}{س^٢ + ص^٢}$ + $\frac{-ص}{س^٢ + ص^٢}$ ت

= $\frac{١}{٩}$ − $\frac{٢\sqrt{٢}}{٩}$ ت (تحقق من ذلك)

تمارين ومسائل (٥-٢)

س١: أكتب كلاً مما يأتي على الصورة ﻫ + ب ت

أ) ٤(٢ + ٤ت) + ٥(٣ − ٢ت)

ب) (٣ + ٤ت)(٣ − ٥ت)

ج) (٣ + ٤ت)^{٣}

د) ٤ت(١ − ٥ت)^{٢}

هـ) (١ − ت)^{٦}

س٢: إذا كانت س = ﻫ + ب ت ، فما قيم س التي تحقق المعادلة س + ٢ س ت = $^{-}$٥(س − ٤ت)

س٣: أجد قيم س،ص ∈ ح والتي تحقق المعادلة س − ص − ٢ = ص^{٢} ت − س ت

س٤: أبيّن أن ع = ت تحقق المعادلة ع^{٥} + ع^{٢} = ع − ١ .

س٥: أبيّن أن ع = $^{-}$١ + ت تحقق المعادلة ع^{٢} + ٢ ع + ٢ = ٠ .

س٦: إذا كان $\frac{\text{ت}}{\text{ت} + ٣} = \frac{١ + ٣\text{ت}}{ﻫ}$ أجد قيمة الثابت ﻫ حيث ﻫ ∈ ح.

س٧: أجد ع$^{-١}$ لكل مما يأتي، واكتبه على الصورة ﻫ + ب ت:

أ) ٢ + $\sqrt{١٢}$ت   ب) $\frac{\text{ت}}{\text{ت} − ٣}$ ج) (١ + ت)^{١٣}

س٨: أحل النظام الآتي:

ع$_{١}$ + ٣ع$_{٢}$ = $^{-}\sqrt{٨}$ ت

٢ع$_{١}$ − ٣ع$_{٢}$ = $\sqrt{٥٠}$ ت

حيث ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ∈ ک

٥-٣ قسمة الأعداد المركبة: Division Of Complex Numbers

نشاط (١):

رسم محمد لوحة مستطيلة الشكل مستخدماً الألوان الزيتية أبعادها (٢٨ + ١٤$\sqrt{٥}$)سم، $\frac{١٤}{\sqrt{٥} - ٢}$. وعندما رآها معلم الرياضيات قال أنها مربعة الشكل. ما رأيك؟

أنطق المقام للمقدار $\frac{١}{١ - \sqrt{٢}}$

الحل: تعلم أن مرافق العدد ١ − $\sqrt{٢}$ هو١ + $\sqrt{٢}$

ولإنطاق المقام، نضرب كلاً من البسط والمقام بمرافق المقام

أي أن $\frac{١}{١ - \sqrt{٢}} = \frac{١}{١ - \sqrt{٢}} \times \frac{١ + \sqrt{٢}}{١ + \sqrt{٢}} =$ .... (أكمل)

تعتبر عملية القسمة في الأعداد المركبة مشابهة إلى حد كبير لعملية إنطاق المقام، وذلك بكتابة $\frac{ع_١}{ع_٢}$ على الصورة ع = س + ص ت

تعريف:

إذا كان ع = س + ص ت

١) نسمي المقدار $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ مقياس العدد المركب ع (القيمة المطلقة) ويرمز له |ع|

أي أن |ع| = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

٢) ونسمي العدد س − ص ت مرافق (conjugate) العدد المركب ع = س + ص ت ويرمز له $\overline{ع}$

أي أن $\overline{ع}$ = س − ص ت

مثال (١): إذا كان ع = ٣ + ٤ت أجد:

أ) $\overline{ع}$ ب) |ع| ج) |$\overline{ع}$|

الحل: أ) $\overline{ع}$ = ٣ − ٤ت

ب) |ع| = |٣ + ٤ت| = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥

ج) |$\overline{ع}$| = |٣ − ٤ت| = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥ ماذا تلاحظ؟

نشاط (٢):

إذا كان $ع_١ = ٢ + ت$، $ع_٢ = ١ - ٣ت$ فإن:

١) $|ع_١| = \sqrt{٥}$

٢) $|ع_٢| = $ ....

٣) $|ع_١ ع_٢| = $ .... ماذا تلاحظ؟

٤) $|{}^{-}٢ ع_١| = ٢\sqrt{٥}$

٥) ${}^{-}٢|ع_١| = $ .... ماذا تلاحظ؟

نشاط (٣):

أكمل ما يأتي:

١) $\overline{١ + ت} = $ ....

٢) $\overline{١ - ت} = ١ + ت$

٣) $\overline{٥} = ٥$

٤) $\overline{{}^{-}٣} = $ ....

٥) $\overline{ت} = $ ....

٦) $\overline{٢ت + \sqrt{٢}\, ت} = $ ....

خصائص المقياس، والعدد المرافق:

إذا كان $ع \in ك$ فإن:

١) $(\overline{\overline{ع}}) = ع$

٢) $ع \overline{ع} = \overline{ع}\, ع = |ع|^٢$

٣) $|ع| = |\overline{ع}|$

٤) $|جـ ع| = |جـ|\,|ع|$ ، $جـ \in ح$

٥) إذا كان $ع = أ + ب ت$ فإن $ع + \overline{ع} = ٢أ$ ، $ع - \overline{ع} = ٢ب ت$

٦) إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢ \in ك$، فإن $|ع_١ ع_٢| = |ع_١|\,|ع_٢|$

٧) إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢ \in ك$، $ع_٢ \neq ٠$ فإن $\left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right| = \frac{|ع_١|}{|ع_٢|}$

نشاط (٤):

أكمل الجدول الآتي:

العدد المركب ع	المرافق $\bar{ع}$	المقياس $|ع|$	النظير الضربي $ع^{-١}$
ت + ٢		$\sqrt{٥}$	
$\sqrt{٣}$ − ت	$\sqrt{٣}$ + ت		
٢ت			$\frac{-١}{٢}$ ت

تعريف:

إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ ∈ ك ، $ع_٢ \neq ٠$ ، فإن $ع_١ \div ع_٢ = \frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ع_١\bar{ع}_٢}{ع_٢\bar{ع}_٢} = \frac{ع_١\bar{ع}_٢}{|ع_٢|^٢}$

ملاحظة:

إذا كان $ع \neq ٠$ ، فإن $ع^{-١} = \frac{١}{ع} = \frac{\bar{ع}}{ع\,\bar{ع}} = \frac{\bar{ع}}{|ع|^٢}$

مثال (٢): اكتب المقدار $\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ٤ت}$ على الصورة س + ص ت:

الحل: **أولاً: باستخدام الضرب بالمرافق:**

$$\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ٤ت} = \frac{(٢ - ٣ت)(٣ - ٤ت)}{(٣ + ٤ت)(٣ - ٤ت)} = \frac{(٦ - ٨ت - ٩ت - ١٢)}{(٩ + ١٦)}$$

$$= \frac{-٦ - ١٧ت}{٢٥} = \frac{-٦}{٢٥} + \frac{-١٧}{٢٥}ت$$

ثانياً: باستخدام النظير الضربي:

النظير الضربي للعدد هو ٣ + ٤ت هو $\frac{٣}{٢٥} - \frac{٤}{٢٥}$ت

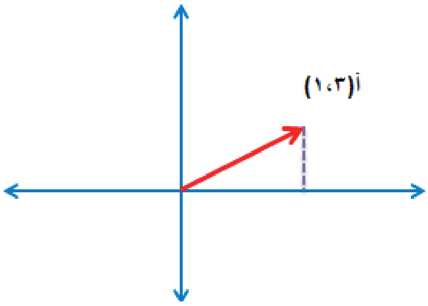
إذن: $\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ٤ت} = (٢ - ٣ت)(\frac{٣}{٢٥} - \frac{٤}{٢٥}ت)$ (ماذا تلاحظ؟)

$$= \frac{-٦}{٢٥} + \frac{-١٧}{٢٥}ت$$

التمثيل البياني والتمثيل القطبي للأعداد المركبة Cartesian and Polar Representation

أولاً: التمثيل البياني للأعداد المركبة:

يمكن تمثيل العدد المركب ع = س + ص ت بيانياً في المستوى الديكارتي بالنقطة أ (ب ، جـ)، فالعدد المركب (٣ + ت) يمثل بالنقطة أ(٣،١) في المستوى كما في الشكل المجاور.



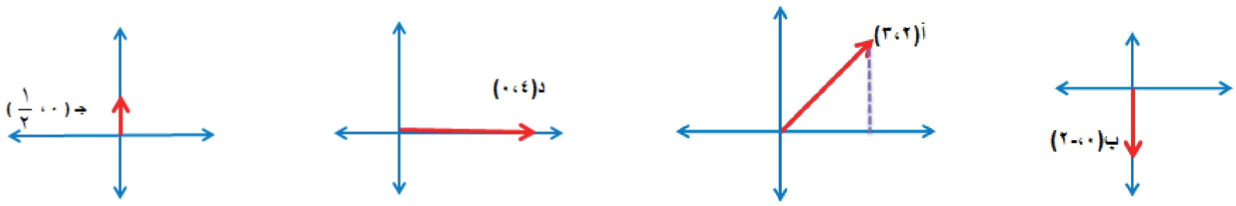
يسمى هذا المستوى الإحداثي بالمستوى المركب (مستوى أرجاند).

أفكر، وأناقش: ماذا يمثل كل من المحور الأفقي والمحور الرأسي في المستوى المركب؟

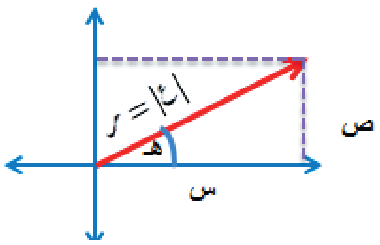
مثال (٣): أمثّل بيانياً كلاً من الأعداد الآتية بنقطة في المستوى المركب:

-٢ت ، ٢ + ٣ت ، ٤ ، $\sqrt{-\frac{١}{٤}}$

الحل:



ثانياً: التمثيل القطبي للأعداد المركبة



كما أشرنا أعلاه، بأنه يمكن تمثيل العدد المركب ع = س + ص ت بيانياً في مستوى الأعداد المركبة بالنقطة، أو الزوج المرتب (س،ص) وتتذكر أيضاً أن كل زوج مرتب، يمكن تمثيله بمتجه قياسي بدايته النقطة (٠،٠) ونهايته النقطة (س،ص) ويصنع زاوية قياسها هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (المحور الأفقي) وتسمى هـ السعة الأساسية للعدد المركب، حيث ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ ، ٠ ≤ هـ < ٢π كما في الشكل ويكون طول المتجه = ر ، ويساوي مقياس العدد المركب ع = س + ص ت حيث ر = |ع| = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$.

نلاحظ من الشكل أعلاه أن س = ر جتاهـ ، ص = ر جاهـ وبذلك فإن العدد ع = س + ص ت يمكن كتابته على الصورة ع = ر(جتاهـ + ت جاهـ) ويسمى هذا التمثيل بالتمثيل القطبي للعدد المركب.

تعريف:

الصورة القطبية للعدد المركب:

الصورة القطبية للعدد المركب ع=س+ص ت ، ع ≠ ٠ هو ع = ر(جتاهـ + ت جاهـ)

حيث ر = |ع| = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ، ظاهـ = $\frac{ص}{س}$

مثال (٤): اكتب العدد ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت بالصورة القطبية.

الحل: ر = |ع| = $\sqrt{١^٢ + (\sqrt{٣})^٢}$ = ٢ ، جاهـ = $\frac{ص}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتاهـ = $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ومنها هـ = $\frac{\pi}{٣}$،

الصورة القطبية للعدد ع = ٢(جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$).

مثال (٥): أحوّل العدد المركب ع = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$) من الصورة القطبية إلى الصورة أ + ب ت

الحل: ع = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$) = $\sqrt{٢}$ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{ت}{\sqrt{٢}}$) = ١ + ت

نشاط (٥):

إذا كان ع = ٤ − ٣ت ، فإن $\bar{ع}$ = ...

أمثّل كلاً من ع ، $\bar{ع}$ هندسياً في المستوى المركب، ماذا تلاحظ؟

تمارين ومسائل (٥-٣)

س١: أجد $|\,١ + \sqrt{-٤}\,|$

س٢: إذا كان $ع_١ = ١ + ت$، $ع_٢ = ١ - ت$ أجد ما يلي:

أ) $|\,-٣ع_١\,|$ ب) $|\,\frac{١}{٢}ع_١\overline{ع_٢}\,|$ ج) $|\,\frac{ع_٢}{ع_١}\,|$ د) $|\,٢ع_١ع_٢\,|$

س٣: إذا كان $ع = \frac{٣}{٥} + \frac{-٤}{٥}ت$ ، أجد:

أ) $(ع)^{-١}$ ب) $(٣ع)^{-١}$ ج) $|\,(ع)^{-١}|$ د) $|\,\frac{\overline{ع}}{٥}\,|$

س٤: اكتب المقادير الآتية على صورة أ + ب ت

أ) $\frac{-١ + \sqrt{٢}\,ت}{٢ + ت}$ ب) $\frac{٣ + ٤ت}{٣ - ٥ت} + \frac{٢ + ٣ت}{٢ - ٣ت}$

س٥: أثبت أن $|\,ع - ١\,| = |\,\overline{ع} - ١\,|$ حيث $ع \in ك$

س٦: مثّل الأعداد الآتية في المستوى المركب:

أ) $ت^{٤٣}$ ب) $٢ + \sqrt{-٢}$ ج) $\sqrt{-٤} + \sqrt{-٩}$ د) $\frac{١}{ت^{٦٥}}$

س٧: إذا كان $ع^٢ = (\overline{ع})^٢$ فأثبت أن ع إمّا أن تكون عدداً حقيقياً، أو أنها عدد تخيلي.

س٨: أكتب ما يأتي على الصورة القطبية $ع = ر\,(جتاهـ + ت جاهـ)$:

أ) $ع = -١ + ت$ ب) $ع = \frac{-١}{٢}$ ج) $ع = \frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$

س٩: اكتب ما يأتي على الصورة أ + ب ت:

أ) $ع = ٧(جتا\frac{٣\pi}{٤} + ت جا\frac{٣\pi}{٤})$ ب) $ع = ٣(جتا\frac{-\pi}{٦} + ت جا\frac{-\pi}{٦})$

ج) $ع = ٢(جتا\frac{\pi}{٤} - ت جا\frac{\pi}{٤})$ د) $|\,ع\,| = ٣$ ، $هـ = \frac{\pi}{٣}$

تمارين عامة:

س١: اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١) ما قيمة $(\text{ت})^{\text{٥٧}}$ ؟

أ) ١ ب) $^{-}$١ ج) ت د) $^{-}$ت

٢) ما قيمة $(\sqrt{\text{٢}} - \text{ت}) - \text{ت}\,(\text{١} - \sqrt{\text{٢}}\,\text{ت})$ ؟

أ) $^{-}$٢ ب) ٢ت ج) -٢ت د) ت

٣) ما قيمة $\frac{\text{٤ + ت}}{\text{٢ − ٣ت}}$ ؟

أ) $\frac{\text{٥ − ١٤ت}}{\text{١٣}}$ ب) $\frac{^{-}\text{٥ − ١٤ت}}{\text{٣}}$ ج) $\frac{^{-}\text{٥ − ١٤ت}}{\text{٥}}$ د) $\frac{\text{٥ + ١٤ت}}{\text{١٣}}$

٤) ما قيمة $\frac{\text{١ + ٢ت}}{\text{٣ − ٤ت}} + \frac{\text{٢ − ت}}{\text{٥ت}}$ ؟

أ) $\frac{^{-}\text{٢}}{\text{٥}}$ ب) $\frac{^{-}\text{٢ت}}{\text{٥}}$ ج) $\frac{^{-}\text{٢ − ٢ت}}{\text{٥}}$ د) $\frac{\text{٢}}{\text{٥}}$

٥) ما قيمة $\overline{\text{ع + ت}}$ ؟

أ) ع + ت ب) ع − ت ج) $\bar{\text{ع}}$ + ت د) $\bar{\text{ع}}$ − ت

٦) ما الصورة القطبية للعدد ع = ٢ + ٢ت ؟

أ) $\text{٢}\sqrt{\text{٢}}\,(\text{جتا}\frac{\pi}{\text{٤}} - \text{ت جا}\frac{\pi}{\text{٤}})$ ب) $\text{٢}\sqrt{\text{٢}}\,(\text{جتا}\frac{\pi}{\text{٤}} + \text{ت جا}\frac{\pi}{\text{٤}})$

ج) $\text{٢}\sqrt{\text{٢}}\,(^{-}\text{جتا}\frac{\pi}{\text{٤}} - \text{ت جا}\frac{\pi}{\text{٤}})$ د) $\text{٢}\sqrt{\text{٢}}\,(^{-}\text{جتا}\frac{\pi}{\text{٤}} + \text{ت جا}\frac{\pi}{\text{٤}})$

٧) ما سعة العدد المركب $(\text{٢ + ٢ت})^{\text{٢}}$ ؟

أ) ٠ ب) $\frac{\pi}{\text{٣}}$ ج) $\frac{\pi}{\text{٤}}$ د) $\frac{\pi}{\text{٢}}$

س٢: إذا كان $ع_١ = ١ + ٢ت$، $ع_٢ = ٢ - ت$ ، جد ناتج ما يلي:

أ) $|ع_١|$ ب) $|ع_٢|$ ج) $|ع_١ + ع_٢|$ د) $|ع_١| + |ع_٢|$ (ماذا تلاحظ؟)

س٣: جد س،ص $\in$ ح بحيث $س^٢ + س + (ص - ١)ت = ت - س^٢$.

س٤: إذا كان $ل = \frac{٥(٣ - ت)}{٣ + ت}$ ، $م = \frac{١١ت - ٢}{١ + ٢ت}$

أ) بيّن أن ل ، م مترافقان. ب) احسب ل + م ، ل م ، ثم جد قيمة $ل^٢ + م^٢$

س٥: احسب قيمة $\left(\frac{\sqrt{٣} - ت}{١ + \sqrt{٣}\,ت}\right)^٧$.

س٦: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
اجري عمليات حسابية على الاعداد المركبة			
احل المعادلات واجد الجذور للاعداد المركبة			
انحرى دقة ومعقولية الحل			

حلول الوحدة الأولى (الإحصاء)

حلول تمارين ومسائل (١-١)

- س١: ١,٥- ، ٠,٥- ، ٠,٥ ، ١,٥ ، صفر
- س٢: في اللغة العربية
- س٣ : ٢٣م ، ١١,٦م
- س٤: ٠,٣ ، σ = ١
- س٥: $^-$١

حلول تمارين ومسائل (١-٢)

- س١: أ) ٠,٩١٦٢ ب) ٠,١٨٤١ ج) ٠,٨٦٦٤
- س٢: أ) ١,٠٦ ب) $^-$٠,٧٥ ج) ٠,٨٤
- س٣ : ٠,٨٦٦٤ ، ٤٣٣
- س٤: أ) ٦٦,٧٨٪ ب) ٤٠
- س٥: ٨١٩ موظفاً

حلول تمارين عامة (١-٣)

س١:

الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
الإجابة	جـ	جـ	د	أ	ب	ب	د	أ

- س٢: ٥٩ ، ٦
- س٣: أ) ٠,٨٤١٣ ب) ٠,٦٦٨٧
- س٤: أ) ١٣٦٥٢ ب) ٤٥٦ جـ) ٨١,٨٥٪
- س٥: أ) ٩ ب) ٢٧٣

حلول الوحدة الثانية (النهايات)

حلول تمارين ومسائل (٢-١)

- س١: أ) ٢ ب) ٢ ج) ٣ د) غير موجودة
  هـ) ١ و) ٢ ز) ١ ح) غير موجودة
- س٢: أ) ٣ ب) ٣ ج) ١ د) غير موجودة

حلول تمارين ومسائل (٢-٢)

- س١: أ) ٥ ب) $\frac{^-١٠}{١١}$ ج) $^-$٧
- س٢: أ) $\frac{١٢}{٨}$ ب) $\frac{٣}{٢}$ ج) $٢\sqrt{٥}$
- س٣: ٤
- س٤: $\frac{٢}{٦}$

حلول تمارين ومسائل (٢-٣)

- س١: $^-$٣ ، $^-$١ ، $^-$٢
- س٢: ٨
- س٣: $^-$٨
- س٤: ٤
- س٥: ٢ ، ٣ ، ١٩

حلول تمارين ومسائل (٢-٤)

- س١: أ) $^-\infty$ ب) صفر ج) ٣
- س٢: ٢
- س٣: $\frac{^-٧}{٢}$
- س٤: أ) ٣ ب) ∞

حلول تمارين ومسائل (٢-٥)

- س١: $\lim_{س \to ٤}$ ق١(س) غير موجودة ، $\lim_{س \to ٤}$ ق٢(س) ≠ ق٢(٢)
- س٢: أ) متصل   ب) غير متصل
- س٣: متصل
- س٤: ٩ = ٣

حلول تمارين ومسائل (٢-٦)

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الإجابة	د	جـ	ب	أ	أ	ب	أ	د	أ

- س٢: أ) -٢   ب) $\frac{-١}{٧}$ ج) ٢٧   د) $\frac{١}{٤}$
- س٣: ١
- س٤: متصل عند س = ٢
- س٥: -٢
- س٦: غير متصل عند س = ٣
- س٧: أ) ١ ب) ٥ ج) غير موجودة د) غير متصل عند س = ٠

حلول الوحدة الثالثة (التفاضل)

حلول تمارين ومسائل (٣-١)

- س١: أ) = ١,٨ ، ٩   ب) = -٦ ، -٣٠
- س٢: أ) $\frac{١}{٣}$ ب) ٨
- س٣: ١
- س٤: أ) ٣٩   ب) ٤٥

حلول تمارين ومسائل (٣-٢)

- س١: أ) ٢   ب) -١   جـ) ١
- س٢: أ) ٨   ب) ٤   جـ) -٨
- س٣: -٢
- س٤: $\frac{٧}{٤}$

حلول تمارين ومسائل (٣-٣)

- س١: ١١
- س٢: أ) صفر   ب) ٥ + ٦س   جـ) $\frac{-٢}{\sqrt{س^{٣}}}$
- س٣: أ) -١   ب) $\frac{٤٤}{٣}$
- س٤: ٥

حلول تمارين ومسائل (٣-٤)

- س١: أ) -٨س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٦   ب) $\frac{٣}{١٦}$
- س٢: ٥
- س٣: ١٠
- س٤: $\frac{-٥}{٨١}$
- س٥: ٢٥

حلول تمارين ومسائل (٣-٥)

- س١: -١٠
- س٢: ص − س − ١ = صفر
- س٣: ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١١}{٤}$)
- س٤: ص − ٣س − ٧ = ٠
- س٥: ٣

حلول تمارين ومسائل (٣-٦)

- س١: ٢س + ٢
- س٢: ٨س − ٤
- س٣: ٨س + ٢
- س٤: ٩٦
- س٥: ١٢
- س٦: -٦ ، ٥

حلول تمارين ومسائل (٣-٧)

س١: أ) ق(١) = ٢ قيمة عظمى محلية

ب) ق(⁻٢) = ١٦ قيمة عظمى محلية، ق(٢) = ⁻١٦ قيمة صغرى محلية

جـ) ق(⁻١) = ٤ قيمة عظمى محلية، ق(١) = ٠ قيمة صغرى محلية

د) ق(٥) = ٣٠ قيمة عظمى محلية

س٢: ب = ⁻٤

س٣: ق'(س) موجبة لكل س ∋ ح*.

س٤: عند (س= -٢) يوجد قيمة عظمى محلية، عند (س= ٢) يوجد قيمة صغرى محلية.

حلول تمارين ومسائل (٣-٨)

س١: ٢٥م²

س٢: ١٠ ، ١٠

س٣: ١٥٠ م ، ١٥٠ م

س٤: ٢ ، ١٢

س٥: ١٠

حلول تمارين عامة (٣-٩)

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	أ	ب	جـ	ب	د	أ	د	جـ	ب	جـ

س٢: ٣٦

س٣: ٤

س٤: ٦

س٥: ٢٩

س٦: ٣٣

س٧: ١٣ص + س − ٤٠ = ٠

س٨: $أ = \frac{١}{٢}$

س٩: ق(⁻٢) = ١١ قيمة عظمى محلية، ق(٠) = ٧ قيمة صغرى محلية.

س١٠: ١٠ ، ١٠

حلول الوحدة الرابعة (التكامل)

حلول تمارين ومسائل (٤-١)

س١:

	المشتقة ق'(س)	الاقتران الأصلي ق(س) +جـ
-١	٤س³	س⁴ +جـ
-٢	٤س³ + ٣س² + ٢	س⁴ + س³ + ٢س + جـ
-٣	٢س + ١	س² + س + جـ
-٤	٤س³ + ٣	∫(٤س³ + ٣) ءس

س٢:

العبارة	أ	ب	جـ	د	هـ	و
الإجابة	✗	✓	✗	✓	✗	✓

س٣: $ق'(س) = \frac{س^٢ + ٣}{س + ١}$

حلول تمارين ومسائل (٤-٢)

س١: أ) $\frac{٢}{٣}س + جـ$ ب) $\pi ٤ + جـ$ جـ) $\frac{\sqrt{٥}\, س^٢}{٢} + جـ$

د) $\frac{٢س^٣}{٣} + ٣س + جـ$ هـ) $\frac{٧س^٤}{٤} + \frac{٢}{س} + س + جـ$ و) ك س² + جـ

س٢: $\frac{٢ص^٣}{٣} + \frac{ص^٢}{٢} - ١٥ص + جـ$

س٣: $\frac{ل^٢}{٢} - ٣ل + جـ$

س٤: $\frac{٢س^٥}{٥} + \frac{٣س^٤}{٤} - \frac{٥س^٢}{٣} + \frac{٥}{٢}س^٢ + ٤س + جـ$

س٥: ٣س³ + ٥س² − ٢س + ٤

س٦: (٢س + ٢)(س² + ٢س)°

حلول تمارين ومسائل (٤-٣)

س١: $\text{ق(س)} = \text{٥س} - \text{٧}$

س٢: $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \text{٣س} - \text{١}$

س٣: ٢٢

س٤: $\text{ص} + \text{س} + \text{١} = \text{٠}$

حلول تمارين ومسائل (٤-٤)

س١: أ) $\text{١٨}\pi$ ب) ٢ جـ) $\frac{\text{٢}}{\text{٩}}$ د) $\frac{\text{٤٥}}{\text{٤}}$

س٢: $\text{ب} = \pm\text{٤}$

س٣: $\text{أ} = \text{٥} ، \text{-٢}$

س٤: $\frac{\text{١٤}}{\text{٣}}$

س٥: أ) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٤س}^{\text{٣}} + \text{٢س} - \text{٥}$ ب) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

حلول تمارين ومسائل (٤-٥)

س١: صفر

س٢: أ) $\frac{\text{-٧}}{\text{٢}}$ ب) $\frac{\text{-١٥}}{\text{٢}}$ جـ) -٤

س٣: أ) -٦ ب) -٥ جـ) $\frac{\text{-١٥}}{\text{٢}}$

س٤: -٢٧

حلول تمارين ومسائل (٤-٦)

س١: $\frac{-(\text{٢} - \text{٣س})^{\text{٤}}}{\text{١٢}} + \text{جـ}$

س٢: $\frac{\text{-٣}}{\text{٤(س} - \text{١)}^{\text{٤}}} + \text{جـ}$

س٣: $\frac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{٥}}}{\text{٥أ}} + \text{جـ}$

س٤: $\frac{(\text{س}^{\text{٣}} + \text{١})^{\text{٥}}}{\text{١٥}} + \text{جـ}$

س٥: $\frac{\text{١٣}}{\text{٣}}$

س٦: $\frac{\text{-٤}}{\text{٢١}}$

س٧: $\frac{\text{٢(٣س} - \text{١)}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\text{٩}} + \text{جـ}$

س٨: $\frac{\text{٣(س}^{\text{٢}} + \text{٤س} + \text{٥)}^{\frac{\text{٤}}{\text{٣}}}}{\text{٨}} + \text{جـ}$

حلول تمارين ومسائل (٤-٧)

س١: ١٢ وحدة مساحة.

س٢: ٨ وحدات مساحة.

س٣: $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ وحدة مساحة.

س٤: $\text{أ} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

س٥: ٤٢ وحدة مساحة

حلول تمارين عامة (٤-٨)

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	ج	أ	ب	د	أ	أ	ج	د	أ	ج

س٢: $\frac{\text{١٠}}{\text{٣}}$

س٣: $\text{ق(س)} = \text{٣س} - \text{س}^{\text{٢}} + \text{٤}$

س٤: ٣٨

س٥: $\frac{\text{٣(س}^{\text{٢}} + \text{س} + \text{٤)}^{\frac{\text{٥}}{\text{٣}}}}{\text{٥}} + \text{جـ}$

س٦: $\frac{\text{٣٨}}{\text{٣}}$ وحدة مساحة.

حلول الوحدة الخامسة (الأعداد المركبة)

حلول تمارين ومسائل (٥-١)

س١: أ) ٢ + ٢$\sqrt{٢}$ ت   ب) ٠ + ٥ت   جـ) -٤ + ٠ت

س٢: أ) -٣ ، $\frac{٢}{٥}$ ب) ٠ ، ٣   جـ) ١ ، -١   د) ٠ ، ٦   هـ) ٠ ، -٢   و) $\frac{١}{٣}$ ، ٠

س٣: (٤ − ت^{٢})^{٣} = ١٢٥ المقدار

س٤: أ) -ت   ب) -ت   جـ) صفر

س٥: المقدار = $\frac{-١ + ت}{-ت + ١}$ = -١

حلول تمارين ومسائل (٥-٢)

س١: أ) ٢٣ + ٦ت   ب) ٢٩ − ٣ت   جـ) -١١٧ + ٤٤ت   د) ٤٠ − ٩٦ت   هـ) ٨ت

س٢: س = ١ + ٣ت

س٣: (ص = ٢ ، س = ٤) ، (ص = -١ ، س = ١)

س٤: الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ت − ١

س٥: الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = صفر

س٦: أ = ١٠

س٧: أ) $\frac{١}{٨}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٨}$ ت   ب) ١ + ٣ت   جـ) $\frac{-١}{١٢٨}$ + $\frac{١}{١٢٨}$ت

س٨: ع$_{١}$ = $\sqrt{٢}$ ت ، ع$_{٢}$ = -$\sqrt{٢}$ ت

حلول تمارين ومسائل (٥-٣)

س١: $\sqrt{٥}$

س٢: أ) $\sqrt{١٨}$ ب) ١ جـ) ١ د) ٤

س٣: أ) $\frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}$ت ب) $\frac{١}{٣}$ ع$^{-١}$ جـ) ١ د) $\frac{١}{٥}$

س٤: أ) $\frac{-٢ + \sqrt{٢}}{٥} + \frac{١ + ٢\sqrt{٢}}{٥}$ ت ب) $\frac{-٣١٣}{٤٤٢} + \frac{٧٥٩}{٤٤٢}$ ت

س٥: بفرض ع = أ + ب ت ينتج أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = $\sqrt{(أ - ١)^{٢} + ب^{٢}}$

س٦: أ) (٠ ، -١) ب) (٢ ، $\sqrt{٢}$) جـ) (٠ ، ٥) د) (٠ ، -١)

س٧: بفرض ع = أ + ب ت ، إما أ = ٠ ⟵ ع = ب ت

أو ب = ٠ ⟵ ع = أ

س٨: أ) ع = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$) ب) $\frac{١}{٢}$ (جتاπ + ت جاπ) جـ) ع = (جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٣}$)

س٩: أ) $\frac{-٧}{\sqrt{٢}} + \frac{٧}{\sqrt{٢}}$ ت ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٣}{٢}$ ت جـ) $\sqrt{٢} - \sqrt{٢}$ ت د) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢} + \frac{٣}{٢}$ ت

حلول تمارين عامة (٥-٤)

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الإجابة	جـ	جـ	د	أ	ب	ب	د

س٢: أ) $\sqrt{٥}$ ب) $\sqrt{٥}$ جـ) $\sqrt{١٠}$ د) $\sqrt{٢٠}$ ، نلاحظ أن |ع$_{١}$ + ع$_{٢}$| ≠ |ع$_{١}$|+|ع$_{٢}$|

س٣: إما س = ٠ ⟵ ص = ١ أو س = -١ ⟵ ص = ٠

س٤: أ) ل = ٤ - ٣ت ، م = ٤ + ٣ت ⟵ م = $\overline{ل}$ ب) ٨، ٢٥ ، ١٤

س٥: ت

أفكار ريادية

* تصميم اداة لقياس اثر استخدام مواقع التواصل الاجتماعي على تحصيل الطلبة.
* اعداد دراسة لمشروع عن كيفية تشجيع طلبة المدارس للتوجه للتخصصات المهنية.
* إعداد رحلات معرفية (Web quest) عن وحدة التكامل.

المراجع

الخطيب، روحي إبراهيم (٢٠١٢): التفاضل والتكامل ج١، دار المسيرة، عمان.

الخطيب، روحي إبراهيم (٢٠١٢): التفاضل والتكامل ج٢، دار المسيرة، عمان.

بسيوني، جابر أحمد (٢٠١٤): الإحصاء العام، دار الوفاء لدنيا الطباعة، الإسكندرية.

عدنان عوض، أحمد علاونة ، مفيد عزام، (١٩٩٠) –دار الفكر – عمان – الأردن

حنيف ، عاصم (١٩٩٩): حساب التفاضل والتكامل ، دار المعارف القاهرة

خليفة عبد السميع (١٩٩٤)، تدريس الرياضيات في المدرسة الثانوية: الطبعة الثالثة، كلية التربية، جامعة القاهرة

فريدريك بل (١٩٨٦): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الأول (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع.

فريدريك بل (١٩٨٦): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الثاني (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع

ابو أسعد، صلاح عبد اللطيف (٢٠١٠): أساليب تدريس الرياضيات، الطبعة الاولى. دار الشروق للنشر والتوزيع

حسين فرج، عبد اللطيف (٢٠٠٥): طرق التدريس في القرن الواحد والعشرين، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة/ عمان

Bostock&Perkins(1989): Advanced Mathematics, volume1

Bell,E,T (1937):Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Lanl B.Boyer(1989): History of Mathematics Wiley,N.Y

Bostock&Perkins(1989): Advanced Mathematics, volume2

المشروع

شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع.
ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

ميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينفّذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفّر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومترابطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلّب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطّط له مسبقاً.

ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخّل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.
٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.
٣. تحديد خطوات سير المشروع.
٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، **(شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).**
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلّي.

ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلّاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلّم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

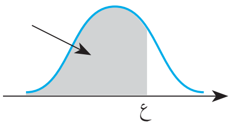
١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. **الأهداف** التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.
٢. **الخطة** من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحّدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.
٣. **الأنشطة** التي قام بها الطلبة من حيث، تنوّعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.
٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

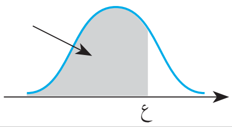
يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التي استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.



ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

ع	٠٫٠٠	٠٫٠١	٠٫٠٢	٠٫٠٣	٠٫٠٤	٠٫٠٥	٠٫٠٦	٠٫٠٧	٠٫٠٨	٠٫٠٩
-٣٫٧	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١
-٣٫٦	٠٫٠٠٠٢	٠٫٠٠٠٢	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠١
-٣٫٥	٠٫٠٠٠٢	٠٫٠٠٠٢	٠٫٠٠٠٢	٠٫٠٠٠٢	٠٫٠٠٠٢	٠٫٠٠٠٢	٠٫٠٠٠٢	٠٫٠٠٠٢	٠٫٠٠٠٢	٠٫٠٠٠٢
-٣٫٤	٠٫٠٠٠٣	٠٫٠٠٠٣	٠٫٠٠٠٣	٠٫٠٠٠٣	٠٫٠٠٠٣	٠٫٠٠٠٣	٠٫٠٠٠٣	٠٫٠٠٠٣	٠٫٠٠٠٣	٠٫٠٠٠٢
-٣٫٣	٠٫٠٠٠٥	٠٫٠٠٠٥	٠٫٠٠٠٥	٠٫٠٠٠٤	٠٫٠٠٠٤	٠٫٠٠٠٤	٠٫٠٠٠٤	٠٫٠٠٠٤	٠٫٠٠٠٤	٠٫٠٠٠٣
-٣٫٢	٠٫٠٠٠٧	٠٫٠٠٠٧	٠٫٠٠٠٦	٠٫٠٠٠٦	٠٫٠٠٠٦	٠٫٠٠٠٦	٠٫٠٠٠٦	٠٫٠٠٠٥	٠٫٠٠٠٥	٠٫٠٠٠٥
-٣٫١	٠٫٠٠١٠	٠٫٠٠٠٩	٠٫٠٠٠٩	٠٫٠٠٠٩	٠٫٠٠٠٨	٠٫٠٠٠٨	٠٫٠٠٠٨	٠٫٠٠٠٨	٠٫٠٠٠٧	٠٫٠٠٠٧
-٣٫٠	٠٫٠٠١٣	٠٫٠٠١٣	٠٫٠٠١٣	٠٫٠٠١٢	٠٫٠٠١٢	٠٫٠٠١١	٠٫٠٠١١	٠٫٠٠١١	٠٫٠٠١٠	٠٫٠٠١٠
-٢٫٩	٠٫٠٠١٩	٠٫٠٠١٨	٠٫٠٠١٨	٠٫٠٠١٧	٠٫٠٠١٦	٠٫٠٠١٦	٠٫٠٠١٥	٠٫٠٠١٥	٠٫٠٠١٤	٠٫٠٠١٤
-٢٫٨	٠٫٠٠٢٦	٠٫٠٠٢٥	٠٫٠٠٢٤	٠٫٠٠٢٣	٠٫٠٠٢٣	٠٫٠٠٢٢	٠٫٠٠٢١	٠٫٠٠٢١	٠٫٠٠٢٠	٠٫٠٠١٩
-٢٫٧	٠٫٠٠٣٥	٠٫٠٠٣٤	٠٫٠٠٣٣	٠٫٠٠٣٢	٠٫٠٠٣١	٠٫٠٠٣٠	٠٫٠٠٢٩	٠٫٠٠٢٨	٠٫٠٠٢٧	٠٫٠٠٢٦
-٢٫٦	٠٫٠٠٤٧	٠٫٠٠٤٥	٠٫٠٠٤٤	٠٫٠٠٤٣	٠٫٠٠٤١	٠٫٠٠٤٠	٠٫٠٠٣٩	٠٫٠٠٣٨	٠٫٠٠٣٧	٠٫٠٠٣٦
-٢٫٥	٠٫٠٠٦٢	٠٫٠٠٦٠	٠٫٠٠٥٩	٠٫٠٠٥٧	٠٫٠٠٥٥	٠٫٠٠٥٤	٠٫٠٠٥٢	٠٫٠٠٥١	٠٫٠٠٤٩	٠٫٠٠٤٨
-٢٫٤	٠٫٠٠٨٢	٠٫٠٠٨٠	٠٫٠٠٧٨	٠٫٠٠٧٥	٠٫٠٠٧٣	٠٫٠٠٧١	٠٫٠٠٦٩	٠٫٠٠٦٨	٠٫٠٠٦٦	٠٫٠٠٦٤
-٢٫٣	٠٫٠١٠٧	٠٫٠١٠٤	٠٫٠١٠٢	٠٫٠٠٩٩	٠٫٠٠٩٦	٠٫٠٠٩٤	٠٫٠٠٩١	٠٫٠٠٨٩	٠٫٠٠٨٧	٠٫٠٠٨٤
-٢٫٢	٠٫٠١٣٩	٠٫٠١٣٦	٠٫٠١٣٢	٠٫٠١٢٩	٠٫٠١٢٥	٠٫٠١٢٢	٠٫٠١١٩	٠٫٠١١٦	٠٫٠١١٣	٠٫٠١١٠
-٢٫١	٠٫٠١٧٩	٠٫٠١٧٤	٠٫٠١٧٠	٠٫٠١٦٦	٠٫٠١٦٢	٠٫٠١٥٨	٠٫٠١٥٤	٠٫٠١٥٠	٠٫٠١٤٦	٠٫٠١٤٣
-٢٫٠	٠٫٠٢٢٨	٠٫٠٢٢٢	٠٫٠٢١٧	٠٫٠٢١٢	٠٫٠٢٠٧	٠٫٠٢٠٢	٠٫٠١٩٧	٠٫٠١٩٢	٠٫٠١٨٨	٠٫٠١٨٣
-١٫٩	٠٫٠٢٨٧	٠٫٠٢٨١	٠٫٠٢٧٤	٠٫٠٢٦٨	٠٫٠٢٦٢	٠٫٠٢٥٦	٠٫٠٢٥٠	٠٫٠٢٤٤	٠٫٠٢٣٩	٠٫٠٢٣٣
-١٫٨	٠٫٠٣٥٩	٠٫٠٣٥١	٠٫٠٣٤٤	٠٫٠٣٣٦	٠٫٠٣٢٩	٠٫٠٣٢٢	٠٫٠٣١٤	٠٫٠٣٠٧	٠٫٠٣٠١	٠٫٠٢٩٤
-١٫٧	٠٫٠٤٤٦	٠٫٠٤٣٦	٠٫٠٤٢٧	٠٫٠٤١٨	٠٫٠٤٠٩	٠٫٠٤٠١	٠٫٠٣٩٢	٠٫٠٣٨٤	٠٫٠٣٧٥	٠٫٠٣٦٧
-١٫٦	٠٫٠٥٤٨	٠٫٠٥٣٧	٠٫٠٥٢٦	٠٫٠٥١٦	٠٫٠٥٠٥	٠٫٠٤٩٥	٠٫٠٤٨٥	٠٫٠٤٧٥	٠٫٠٤٦٥	٠٫٠٤٥٥
-١٫٥	٠٫٠٦٦٨	٠٫٠٦٥٥	٠٫٠٦٤٣	٠٫٠٦٣٠	٠٫٠٦١٨	٠٫٠٦٠٦	٠٫٠٥٩٤	٠٫٠٥٨٢	٠٫٠٥٧١	٠٫٠٥٥٩
-١٫٤	٠٫٠٨٠٨	٠٫٠٧٩٣	٠٫٠٧٧٨	٠٫٠٧٦٤	٠٫٠٧٤٩	٠٫٠٧٣٥	٠٫٠٧٢١	٠٫٠٧٠٨	٠٫٠٦٩٤	٠٫٠٦٨١
-١٫٣	٠٫٠٩٦٨	٠٫٠٩٥١	٠٫٠٩٣٤	٠٫٠٩١٨	٠٫٠٩٠١	٠٫٠٨٨٥	٠٫٠٨٦٩	٠٫٠٨٥٣	٠٫٠٨٣٨	٠٫٠٨٢٣
-١٫٢	٠٫١١٥١	٠٫١١٣١	٠٫١١١٢	٠٫١٠٩٣	٠٫١٠٧٥	٠٫١٠٥٦	٠٫١٠٣٨	٠٫١٠٢٠	٠٫١٠٠٣	٠٫٠٩٨٥
-١٫١	٠٫١٣٥٧	٠٫١٣٣٥	٠٫١٣١٤	٠٫١٢٩٢	٠٫١٢٧١	٠٫١٢٥١	٠٫١٢٣٠	٠٫١٢١٠	٠٫١١٩٠	٠٫١١٧٠
-١٫٠	٠٫١٥٨٧	٠٫١٥٦٢	٠٫١٥٣٩	٠٫١٥١٥	٠٫١٤٩٢	٠٫١٤٦٩	٠٫١٤٤٦	٠٫١٤٢٣	٠٫١٤٠١	٠٫١٣٧٩
-٠٫٩	٠٫١٨٤١	٠٫١٨١٤	٠٫١٧٨٨	٠٫١٧٦٢	٠٫١٧٣٦	٠٫١٧١١	٠٫١٦٨٥	٠٫١٦٦٠	٠٫١٦٣٥	٠٫١٦١١
-٠٫٨	٠٫٢١١٩	٠٫٢٠٩٠	٠٫٢٠٦١	٠٫٢٠٣٣	٠٫٢٠٠٥	٠٫١٩٧٧	٠٫١٩٤٩	٠٫١٩٢٢	٠٫١٨٩٤	٠٫١٨٦٧
-٠٫٧	٠٫٢٤٢٠	٠٫٢٣٨٩	٠٫٢٣٥٨	٠٫٢٣٢٧	٠٫٢٢٩٦	٠٫٢٢٦٦	٠٫٢٢٣٦	٠٫٢٢٠٦	٠٫٢١٧٧	٠٫٢١٤٨
-٠٫٦	٠٫٢٧٤٣	٠٫٢٧٠٩	٠٫٢٦٧٦	٠٫٢٦٤٣	٠٫٢٦١١	٠٫٢٥٧٨	٠٫٢٥٤٦	٠٫٢٥١٤	٠٫٢٤٨٣	٠٫٢٤٥١
-٠٫٥	٠٫٣٠٨٥	٠٫٣٠٥٠	٠٫٣٠١٥	٠٫٢٩٨١	٠٫٢٩٤٦	٠٫٢٩١٢	٠٫٢٨٧٧	٠٫٢٨٤٣	٠٫٢٨١٠	٠٫٢٧٧٦
-٠٫٤	٠٫٣٤٤٦	٠٫٣٤٠٩	٠٫٣٣٧٢	٠٫٣٣٣٦	٠٫٣٣٠٠	٠٫٣٢٦٤	٠٫٣٢٢٨	٠٫٣١٩٢	٠٫٣١٥٦	٠٫٣١٢١
-٠٫٣	٠٫٣٨٢١	٠٫٣٧٨٣	٠٫٣٧٤٥	٠٫٣٧٠٧	٠٫٣٦٦٩	٠٫٣٦٣٢	٠٫٣٥٩٤	٠٫٣٥٥٧	٠٫٣٥٢٠	٠٫٣٤٨٣
-٠٫٢	٠٫٤٢٠٧	٠٫٤١٦٨	٠٫٤١٢٩	٠٫٤٠٩٠	٠٫٤٠٥٢	٠٫٤٠١٣	٠٫٣٩٧٤	٠٫٣٩٣٦	٠٫٣٨٩٧	٠٫٣٨٥٩
-٠٫١	٠٫٤٦٠٢	٠٫٤٥٦٢	٠٫٤٥٢٢	٠٫٤٤٨٣	٠٫٤٤٤٣	٠٫٤٤٠٤	٠٫٤٣٦٤	٠٫٤٣٢٥	٠٫٤٢٨٦	٠٫٤٢٤٧
٠٫٠	٠٫٥٠٠٠	٠٫٤٩٦٠	٠٫٤٩٢٠	٠٫٤٨٨٠	٠٫٤٨٤٠	٠٫٤٨٠١	٠٫٤٧٦١	٠٫٤٧٢١	٠٫٤٦٨١	٠٫٤٦٤١



تابع جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

ع	٠٫٠٠	٠٫٠١	٠٫٠٢	٠٫٠٣	٠٫٠٤	٠٫٠٥	٠٫٠٦	٠٫٠٧	٠٫٠٨	٠٫٠٩
٠٫٠	٠٫٥٠٠٠	٠٫٥٠٤٠	٠٫٥٠٨٠	٠٫٥١٢٠	٠٫٥١٦٠	٠٫٥١٩٩	٠٫٥٢٣٩	٠٫٥٢٧٩	٠٫٥٣١٩	٠٫٥٣٥٩
٠٫١	٠٫٥٣٩٨	٠٫٥٤٣٨	٠٫٥٤٧٨	٠٫٥٥١٧	٠٫٥٥٥٧	٠٫٥٥٩٦	٠٫٥٦٣٦	٠٫٥٦٧٥	٠٫٥٧١٤	٠٫٥٧٥٣
٠٫٢	٠٫٥٧٩٣	٠٫٥٨٣٢	٠٫٥٨٧١	٠٫٥٩١٠	٠٫٥٩٤٨	٠٫٥٩٨٧	٠٫٦٠٢٦	٠٫٦٠٦٤	٠٫٦١٠٣	٠٫٦١٤١
٠٫٣	٠٫٦١٧٩	٠٫٦٢١٧	٠٫٦٢٥٥	٠٫٦٢٩٣	٠٫٦٣٣١	٠٫٦٣٦٨	٠٫٦٤٠٦	٠٫٦٤٤٣	٠٫٦٤٨٠	٠٫٦٥١٧
٠٫٤	٠٫٦٥٥٤	٠٫٦٥٩١	٠٫٦٦٢٨	٠٫٦٦٦٤	٠٫٦٧٠٠	٠٫٦٧٣٦	٠٫٦٧٧٢	٠٫٦٨٠٨	٠٫٦٨٤٤	٠٫٦٨٧٩
٠٫٥	٠٫٦٩١٥	٠٫٦٩٥٠	٠٫٦٩٨٥	٠٫٧٠١٩	٠٫٧٠٥٤	٠٫٧٠٨٨	٠٫٧١٢٣	٠٫٧١٥٧	٠٫٧١٩٠	٠٫٧٢٢٤
٠٫٦	٠٫٧٢٥٧	٠٫٧٢٩١	٠٫٧٣٢٤	٠٫٧٣٥٧	٠٫٧٣٨٩	٠٫٧٤٢٢	٠٫٧٤٥٤	٠٫٧٤٨٦	٠٫٧٥١٧	٠٫٧٥٤٩
٠٫٧	٠٫٧٥٨٠	٠٫٧٦١١	٠٫٧٦٤٢	٠٫٧٦٧٣	٠٫٧٧٠٤	٠٫٧٧٣٤	٠٫٧٧٦٤	٠٫٧٧٩٤	٠٫٧٨٢٣	٠٫٧٨٥٢
٠٫٨	٠٫٧٨٨١	٠٫٧٩١٠	٠٫٧٩٣٩	٠٫٧٩٦٧	٠٫٧٩٩٥	٠٫٨٠٢٣	٠٫٨٠٥١	٠٫٨٠٧٨	٠٫٨١٠٦	٠٫٨١٣٣
٠٫٩	٠٫٨١٥٩	٠٫٨١٨٦	٠٫٨٢١٢	٠٫٨٢٣٨	٠٫٨٢٦٤	٠٫٨٢٨٩	٠٫٨٣١٥	٠٫٨٣٤٠	٠٫٨٣٦٥	٠٫٨٣٨٩
١٫٠	٠٫٨٤١٣	٠٫٨٤٣٨	٠٫٨٤٦١	٠٫٨٤٨٥	٠٫٨٥٠٨	٠٫٨٥٣١	٠٫٨٥٥٤	٠٫٨٥٧٧	٠٫٨٥٩٩	٠٫٨٦٢١
١٫١	٠٫٨٦٤٣	٠٫٨٦٦٥	٠٫٨٦٨٦	٠٫٨٧٠٨	٠٫٨٧٢٩	٠٫٨٧٤٩	٠٫٨٧٧٠	٠٫٨٧٩٠	٠٫٨٨١٠	٠٫٨٨٣٠
١٫٢	٠٫٨٨٤٩	٠٫٨٨٦٩	٠٫٨٨٨٨	٠٫٨٩٠٧	٠٫٨٩٢٥	٠٫٨٩٤٤	٠٫٨٩٦٢	٠٫٨٩٨٠	٠٫٨٩٩٧	٠٫٩٠١٥
١٫٣	٠٫٩٠٣٢	٠٫٩٠٤٩	٠٫٩٠٦٦	٠٫٩٠٨٢	٠٫٩٠٩٩	٠٫٩١١٥	٠٫٩١٣١	٠٫٩١٤٧	٠٫٩١٦٢	٠٫٩١٧٧
١٫٤	٠٫٩١٩٢	٠٫٩٢٠٧	٠٫٩٢٢٢	٠٫٩٢٣٦	٠٫٩٢٥١	٠٫٩٢٦٥	٠٫٩٢٧٩	٠٫٩٢٩٢	٠٫٩٣٠٦	٠٫٩٣١٩
١٫٥	٠٫٩٣٣٢	٠٫٩٣٤٥	٠٫٩٣٥٧	٠٫٩٣٧٠	٠٫٩٣٨٢	٠٫٩٣٩٤	٠٫٩٤٠٦	٠٫٩٤١٨	٠٫٩٤٢٩	٠٫٩٤٤١
١٫٦	٠٫٩٤٥٢	٠٫٩٤٦٣	٠٫٩٤٧٤	٠٫٩٤٨٤	٠٫٩٤٩٥	٠٫٩٥٠٥	٠٫٩٥١٥	٠٫٩٥٢٥	٠٫٩٥٣٥	٠٫٩٥٤٥
١٫٧	٠٫٩٥٥٤	٠٫٩٥٦٤	٠٫٩٥٧٣	٠٫٩٥٨٢	٠٫٩٥٩١	٠٫٩٥٩٩	٠٫٩٦٠٨	٠٫٩٦١٦	٠٫٩٦٢٥	٠٫٩٦٣٣
١٫٨	٠٫٩٦٤١	٠٫٩٦٤٩	٠٫٩٦٥٦	٠٫٩٦٦٤	٠٫٩٦٧١	٠٫٩٦٧٨	٠٫٩٦٨٦	٠٫٩٦٩٣	٠٫٩٦٩٩	٠٫٩٧٠٦
١٫٩	٠٫٩٧١٣	٠٫٩٧١٩	٠٫٩٧٢٦	٠٫٩٧٣٢	٠٫٩٧٣٨	٠٫٩٧٤٤	٠٫٩٧٥٠	٠٫٩٧٥٦	٠٫٩٧٦١	٠٫٩٧٦٧
٢٫٠	٠٫٩٧٧٢	٠٫٩٧٧٨	٠٫٩٧٨٣	٠٫٩٧٨٨	٠٫٩٧٩٣	٠٫٩٧٩٨	٠٫٩٨٠٣	٠٫٩٨٠٨	٠٫٩٨١٢	٠٫٩٨١٧
٢٫١	٠٫٩٨٢١	٠٫٩٨٢٦	٠٫٩٨٣٠	٠٫٩٨٣٤	٠٫٩٨٣٨	٠٫٩٨٤٢	٠٫٩٨٤٦	٠٫٩٨٥٠	٠٫٩٨٥٤	٠٫٩٨٥٧
٢٫٢	٠٫٩٨٦١	٠٫٩٨٦٤	٠٫٩٨٦٨	٠٫٩٨٧١	٠٫٩٨٧٥	٠٫٩٨٧٨	٠٫٩٨٨١	٠٫٩٨٨٤	٠٫٩٨٨٧	٠٫٩٨٩٠
٢٫٣	٠٫٩٨٩٣	٠٫٩٨٩٦	٠٫٩٨٩٨	٠٫٩٩٠١	٠٫٩٩٠٤	٠٫٩٩٠٦	٠٫٩٩٠٩	٠٫٩٩١١	٠٫٩٩١٣	٠٫٩٩١٦
٢٫٤	٠٫٩٩١٨	٠٫٩٩٢٠	٠٫٩٩٢٢	٠٫٩٩٢٥	٠٫٩٩٢٧	٠٫٩٩٢٩	٠٫٩٩٣١	٠٫٩٩٣٢	٠٫٩٩٣٤	٠٫٩٩٣٦
٢٫٥	٠٫٩٩٣٨	٠٫٩٩٤٠	٠٫٩٩٤١	٠٫٩٩٤٣	٠٫٩٩٤٥	٠٫٩٩٤٦	٠٫٩٩٤٨	٠٫٩٩٤٩	٠٫٩٩٥١	٠٫٩٩٥٢
٢٫٦	٠٫٩٩٥٣	٠٫٩٩٥٥	٠٫٩٩٥٦	٠٫٩٩٥٧	٠٫٩٩٥٩	٠٫٩٩٦٠	٠٫٩٩٦١	٠٫٩٩٦٢	٠٫٩٩٦٣	٠٫٩٩٦٤
٢٫٧	٠٫٩٩٦٥	٠٫٩٩٦٦	٠٫٩٩٦٧	٠٫٩٩٦٨	٠٫٩٩٦٩	٠٫٩٩٧٠	٠٫٩٩٧١	٠٫٩٩٧٢	٠٫٩٩٧٣	٠٫٩٩٧٤
٢٫٨	٠٫٩٩٧٤	٠٫٩٩٧٥	٠٫٩٩٧٦	٠٫٩٩٧٧	٠٫٩٩٧٧	٠٫٩٩٧٨	٠٫٩٩٧٩	٠٫٩٩٧٩	٠٫٩٩٨٠	٠٫٩٩٨١
٢٫٩	٠٫٩٩٨١	٠٫٩٩٨٢	٠٫٩٩٨٢	٠٫٩٩٨٣	٠٫٩٩٨٤	٠٫٩٩٨٤	٠٫٩٩٨٥	٠٫٩٩٨٥	٠٫٩٩٨٦	٠٫٩٩٨٦
٣٫٠	٠٫٩٩٨٧	٠٫٩٩٨٧	٠٫٩٩٨٧	٠٫٩٩٨٨	٠٫٩٩٨٨	٠٫٩٩٨٩	٠٫٩٩٨٩	٠٫٩٩٨٩	٠٫٩٩٩٠	٠٫٩٩٩٠
٣٫١	٠٫٩٩٩٠	٠٫٩٩٩١	٠٫٩٩٩١	٠٫٩٩٩١	٠٫٩٩٩٢	٠٫٩٩٩٢	٠٫٩٩٩٢	٠٫٩٩٩٢	٠٫٩٩٩٣	٠٫٩٩٩٣
٣٫٢	٠٫٩٩٩٣	٠٫٩٩٩٣	٠٫٩٩٩٤	٠٫٩٩٩٤	٠٫٩٩٩٤	٠٫٩٩٩٤	٠٫٩٩٩٤	٠٫٩٩٩٥	٠٫٩٩٩٥	٠٫٩٩٩٥
٣٫٣	٠٫٩٩٩٥	٠٫٩٩٩٥	٠٫٩٩٩٥	٠٫٩٩٩٦	٠٫٩٩٩٦	٠٫٩٩٩٦	٠٫٩٩٩٦	٠٫٩٩٩٦	٠٫٩٩٩٦	٠٫٩٩٩٧
٣٫٤	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٨
٣٫٥	٠٫٩٩٩٨	٠٫٩٩٩٨	٠٫٩٩٩٨	٠٫٩٩٩٨	٠٫٩٩٩٨	٠٫٩٩٩٨	٠٫٩٩٩٨	٠٫٩٩٩٨	٠٫٩٩٩٨	٠٫٩٩٩٨
٣٫٦	٠٫٩٩٩٨	٠٫٩٩٩٨	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩
٣٫٧	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩٩

لجنة المناهج الوزارية

د. صبري صيدم	**د. بصري صالح**	**م. فواز مجاهد**
أ. ثروت زيد	**أ. عزام ابو بكر**	**أ. عبد الحكيم أبو جاموس**
د. شهناز الفار	**د. سمية النخالة**	**م. جهاد دريدي**

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد مطر	د. سمية النخالة
د. محمد صالح (منسقًا)	د. علا الخليلي	أ. أحمد سياعرة
د. معين جبر	د. شهناز الفار	أ. قيس شبانة
د. علي عبد المحسن	د. علي نصار	أ. مبارك مبارك
د. تحسين المغربي	د. أيمن الأشقر	أ. عبد الكريم صالح
د. عادل فوارعة	أ. ارواح كرم	أ. نادية جبر
أ. وهيب جبر	أ. حنان أبو سكران	أ. أحلام صلاح
د. عبد الكريم ناجي	أ. كوثر عطية	أ. نشأت قاسم
د. عطا أبوهاني	د. وجيه ضاهر	أ. نسرين دويكات
د. سعيد عساف	أ. فتحي أبو عودة	

المشاركون في ورشات عمل كتاب الرياضيات للصف الثاني عشر التكنولوجي:

أ. نسرين عيد	أ. رائد ملاك	أ. سناء الأشهب	أ.ران أبو علان
أ. حنين قشوع	أ. رشا زكارنة	أ. عدنان عنبوسي	أ. آسيا العلامي
أ. أشرف نفيعات	أ. عريب الزبون	أ.وفاء عمارنة	أ. أحمد بشارات
أ. رهام مصلح	أ. أيمن أبو زياد	أ. محمد أبو سليم	أ. محمد درويش
أ. نايف الطيطي	أ. مصطفى عفانة	أ. مي عصافرة	أ. ريم جابر
أ. رجاء العاجز	أ. عوني فقيه	أ. كريم العارضة	أ. جوني مصلح
أ. أرواح كرم	أ. عبدالله مهنا	أ. وسام موسى	

تمّت مناقشة الكتاب من قبل معلمين على مستوى مديريات الوطن عبر العديد من الورشات.