بسم الله الرحمن الرحيم

٨
الجُزءُ الثاني

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

فريق التأليف:

أ. محمود كميل (منسقاً)
أ. ربى داود
أ. فلاح الترك
أ. محاسن سحويل
أ. أروى مشارقة

مركز المناهج

أ. قيس شبانة
أ. نسرين دويكات

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين

تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧/ ٢٠١٨ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائرة الفنية

إشراف فني	أ. كمال فحماوي
تصميم فني	إبتهال صوالحة - مازن حشيمة

تحكيم علمي	د. نبيل الجندي
مراجعة	د. سعيد عساف
تحرير لغوي	أ. رائد شريدة
قراءة	أ. نيفين حماد
متابعة المحافظات الجنوبية	د. سمية النّخالة

الطبعة الثانية

٢٠١٩ م/ ١٤٤٠ هـ

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
فاكس 2983250-2-970+ | هاتف 2983280-2-970+

تـقـديـم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقررّة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

كانون أول / ٢٠١٧ م

مـقـدمـة

تُعدّ مرحلة التمكين مرحلة تعليمية مهمة؛كونها تأتي محصلة للمعارف والمفاهيم التي اكتسبها الطلبة من مرحلة التهيئة، وهي مرحلة تبدأ من الصف الخامس، وتنتهي بالصف العاشر، يميل الطلبة خلال هذه المرحلة إلى الاستقلالية في التفكير، والبحث، والاستقصاء؛لذا ما ينبغي مراعاته إشراكهم في المناقشة، وحل المشكلات المطروحة التي يتمّ من خلالها بناء شخصية الطالب القادر على مجاراة التطور العلمي والتكنولوجي الهائل، في عالم مليء بالتغيرات التي تتطلب منه اكتساب روح المبادرة، والتكيف مع مستجدات العصر المتسارعة، بما يضمن له استكشاف المعارف، وفي هذه المرحلة أيضًا، يتمّ تقديم المحتوى التعليمي بقالب عصري؛ليكونَ امتدادًا للمحتوى الرياضي الذي تمّ في مرحلة التأسيس، ويستمرّ المنهاج المبني على الأنشطة أصلًا في ربط التعلم بالسياقات الحياتية بطريقة جاذبة محببة؛ لتكوين طالب متفاعل نشط، ينفّذ الأنشطة والتمارين المتنوعة المطلوبة منه.

تشكّل العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة الركيزة الأساسية في تمكين الطالب من المفاهيم والمعارف والمهارات، وتوظيفها ضمن سياقات مناسبة، تقوم على حل مشكلات حياتية، ولا يكون ذلك إلا بالقيام بأنشطة محفّزة، ومثيرة للتفكير، تحاكي البيئة الفلسطينية في المجالات الاجتماعية، والاقتصادية، وغيرها، كما تمّ توظيف التكنولوجيا في تنفيذ هذه الأنشطة بطريقة سلسة جذابة، مع الأخذ بعين الاعتبار التدرج في مستوى الأنشطة، بما يتناسب ومستوياتِ الطلبة، والتعامل مع كل مستوى بما يضمن علاج الضعف، وصولًا لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.

تكوَّنَ هذا الكتاب من أربع وحدات اهتمت بتوظيف الرياضيات في سياقات متعددة، وقد تضمنت هذه الوحدات على الترتيب: الجبر، والهندسة والقياس، والاحتمالات. وقد تناولت الخامسة حل المعادلة التربيعية بطرق التحليل، وإكمال المربع، والقانون العام، وتناولت تحليل الفرق بين مكعبين ومجموعهما، وتناولت الوحدة السادسة متوازي الأضلاع، وقطاع الدائري، والقطع الدائرية، والاسطوانة، والمخروط، وبعض تطبيقاتها العملية، وتناولت الوحدة السابعة النسب المثلثية للزوايا الحادة، وبعض تطبيقاتها، إما الوحدة الثامنة فتناولت الاحتمالات بما فيها متممة الحادث، وبعض تطبيقاتها.

أملُنا بهذا العمل، وقد حققنا مطالب العملية التعليمية التعلمية كافة، من خلال منهاج فلسطينيّ واقعيّ منظّم، وإننا إذ نضع بين أيديكم ثمرة جهد متواصل، وكلنا ثقة بكم معلمين ومشرفين تربويين ومديري مدارس، وأولياء أمور، وخبراء ذوي علاقة في رفد هذا الكتاب بمقترحاتكم، وتغذيتكم الراجعة، بما يعمل على تجويده وتحسينه؛ لما فيه مصلحة الطلبة قادة المستقبل.

فريق التأليف

المحتويات

الجبر

الوحدة

٥

أتأمّلُ: صورةَ أحدِ المدافعِ التي دافعتْ عن عكّا إبّانَ حملةِ نابليون، أبحثُ في كيفيّة إيجادِ الزّمنِ اللّازم لعودة قذيفةٍ إلى نفس الارتفاع الذي أُطلِقتْ منه.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف حلّ المعادلات التربيعيّة، وتحليل مجموع وفرق بين مربعيْن في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١- التعرّف إلى الصّورة العامة للمعادلة التربيعيّة.

٢- حلّ المعادلة التربيعيّة بطرقٍ مختلفة.

٣- التعرُّف إلى مجموع وفرق مكعّبيْن.

٤- تحليل مجموع وفرق بين مكعبيْن.

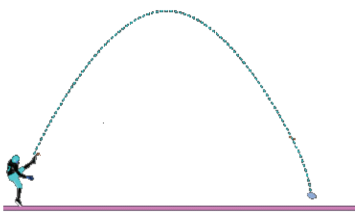
٥- استخدام حلّ المعادلة التربيعيّة، والتحليل في حلّ مسائلَ حياتيّة.

٥-١ حل المعادلة التربيعيّة بالتحليل

نشاط ١:

تَحظى لعبةُ كرة القدم بشعبيّةٍ واسعةٍ في فلسطين، ويمارسها الشباب على نطاقٍ واسع، ومن المهم إتقانُ اللاعبين التمريراتِ بأنواعها، ركل لاعبُ الكرةَ فكان ارتفاعُها عن سطح الأرض في أيّة لحظة ممثّلاً بالعلاقة: ف = -٥ن^{٢} +٢٠ن، حيث ن يمثل الزمن المارّ بالثواني، فماذا تُسمّى هذه العلاقة؟ وما ارتفاع الكرة عن سطح الأرض عندما: ن = ٢ث، ٤ث؟

أرسم شكلاً توضيحيّاً لمسار الكرة، كما في الشكل المجاور



عندما : ن = ٢ث، يكون ارتفاع الكرة = -٥(٢)^{٢} +٢٠×٢ = ٢٠م

وعندما: ن = ٤ث، يكون ارتفاع الكرة = -٥(...)^{٢} +٢٠(...) = ٠

ألاحظ أنّ: ف = ٠، عندما: ن = ٤ث،

فماذا يُسمّى العدد ٤ بالنسبة إلى هذه المعادلة؟

تعريف: المعادلة التربيعيّة: هي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، حيث: أ، ب، جـ ∋ ح، أ ≠ ٠ *

وتُسمّى قيمُ س التي تحقّق المعادلة، حلولَ (جذور) هذه المعادلة.

نشاط ٢:

أحدّدُ المعادلة التربيعيّة في كلٍّ ممّا يأتي، وأوضّح السبب:

أ) ٣س^{٢} – ٤س + ١ = ٠ معادلة تربيعيّة؛ لأنّها تحقّق الصورة العامة.

ب) س + ١ = ٠ ليست معادلة تربيعيّة، (لماذا؟)

جـ) س(س – ١) = ٢ ....

د) $\sqrt{٣}$ س^{٢} = ٤ ....

* الأعداد الحقيقية (ح) تشمل الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية.

خاصيّة(١): لأيّ عددين حقيقيّين أ، ب، إذا كان أ × ب = ٠، فإنّ أ = ٠، أو ب = ٠، أو كليهما يساوي صفر.

نشاط٣:

أكمل إيجاد قيمة س في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) (س + ٥)(س − ١) = ٠

إمّا: س + ٥ = ٠، ومنها: س = -٥

أو : س − ١ = ٠، ومنها: س = ...

ب) (٨ − ٢س)(س + ٢) = ٠

إمّا: س + ٢ = ٠ ، ومنها: س = ...

أو : ٨ − ٢س = ٠ ، ومنها: -٢س = -٨ ، ومنها: س = ...

نشاط٤:

أكمل حلّ المعادلات الآتية:

أ) ٥س^{٢} + ٣س = ٠

أحلّلُ العبارة التربيعيّة، فينتج أنّ: س(٥س + ٣) = ٠ (لماذا؟)

إمّا س = ٠ ، أو ٥س + ٣ = ٠، ومنها: س = $\frac{-٣}{٥}$

ب) س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠

أحلّل العبارة التربيعيّة، فينتج أنّ: (س − ٢)(س − ٣) = ٠

إمّا: س − ٢ = ٠، ومنها: س = ٢

أو : س − ٣ = ٠، ومنها: س = ...

جـ) ٥س^{٢} + ١٣س − ٦ = ٠

أحلّل العبارة التربيعيّة، فينتج أنّ:

(٥س − ٢)(س + ٣) = ٠

إمّا: ٥س − ٢ =٠، ومنها: س = $\frac{٢}{٥}$

أو: س + ٣ = ٠، ومنها: س = ...

أتعلّم: يمكن أحياناً حلّ المعادلة التربيعيّة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، عن طريق التحليل ومن ثم استخدام الخاصية (١).

نشاط٥:

أُكمل حلّ المعادلات التربيعيّة الآتية:

أ) س^{٢} = ٧س

أكتب المعادلة على الصورة العامّة، فتصبح س^{٢} − ٧س = ٠

ومنها : س (س − ٧) = ٠ (لماذا؟)

إمّا: س = ٠ ،

أو: س − ٧ = ٠ ، ومنها: س = ...

ب) س^{٢} − ٥ = ٤س

أكتب المعادلة على الصورة العامّة، فتصبح: س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠

ومنها: (س − ٥)(س + ١) = ٠ (لماذا؟)

إمّا: س − ٥ = ٠، ومنها : س = ...

أو: س + ١ = ٠، ومنها: س = ...

نشاط٦:

عددان زوجيّان متتاليان، حاصل ضربهما ١٦٨، فما هذان العددان؟

أفرض أن العدد الأوّل س، فيكون العدد الثاني س + ٢

س (س + ٢) = ١٦٨

س^{٢} + ٢س = ١٦٨ (لماذا؟)

س^{٢} + ٢س − ١٦٨ = ٠ (لماذا؟)

(س + ١٤)(س − ....) = ٠

إمّا: س + ١٤ = ٠، ومنها: س = ...،

أو: س − ١٢ = ٠، ومنها: س = ...

إذا كانت س = -١٤، فإنّ العدد الزوجي التالي له -١٢. (لماذا؟)

إذا كانت س = ١٢، فإنّ العدد الزوجي التالي له .... (لماذا؟)

نشاط٧:

(استاد) الشهيد فيصل الحسيني يقع في مدينة الرام، وتأسس سنة ٢٠٠٨م، وتبلغ مساحة الملعب فيه ٧٠٠٠م^{٢}، فإذا كان طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣٠م، فما أبعاد الملعب؟

أفرض عرض الملعب ص،

فيكون طول الملعب ص + ٣٠

مساحة الملعب = الطول × العرض (لماذا؟)

ومنها مساحة الملعب = ص (ص + ٣٠) = ٧٠٠٠

ص^{٢} + ٣٠ص = ٧٠٠٠

ص^{٢} + ٣٠ص − ٧٠٠٠ = ٠ (لماذا؟)

(ص + ١٠٠)(ص − ....) = ٠

إمّا : ص + ... = ٠، ومنها: ص = -١٠٠ (هل نقبل -١٠٠ كطول ضلع؟)

أو : ص − ٧٠ = ٠ ، ومنها: ص = ...

أي أنّ: عرض الملعب = ...م ، وطول الملعب = ...م

تمارين ومسائل:

١) أيّ من المعادلات الآتية تربيعيّة؟

أ) س^{٢} − ٤س + ١ = ٠

ب) س (س^{٢} − ٢) = ٠

جـ) ($\sqrt{٢}$س − ١)^{٢} = ٠

د) س + ٣ = ٢س + ٢

٢) أحلُّ المعادلات التربيعيّة الآتية:

أ) (٥ − ٢س)(س + ١) =٠

ب) س^{٢} − ٦س + ٥ = ٠

جـ) ٩س^{٢} − ٩ = ٠

د) س^{٢} + ٨س = ٢٠

هـ) -س^{٢} + ٦س + ١٦ =٠

٣) أجدُ عدديْن، حاصلُ ضربهما ١٠٤، ومجموعُهما ٢١.

٤) أجدُ طول قاعدة مثلّث مساحته ٢م^{٢} ، علماً بأنّ طولَ قاعدته يزيد ٣م عن ارتفاعها.

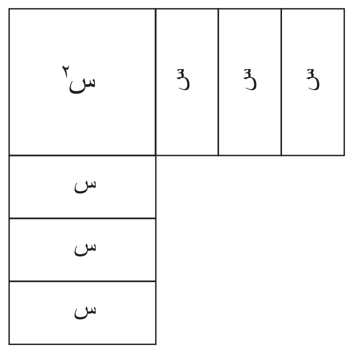
٥) يعد التبريد أحد طرق حفظ الأطعمة، ويعطى عدد البكتيريا في الأطعمة المبردة لكل غرام بالمعادلة ع = ٢٠ر^{٢} − ٢٠ر + ١٢٠، حيث ر تمثل درجة الحرارة التي تحفظ بها الأطعمة. ماهي درجة الحرارة التي يكون عندها عدد البكتيريا ١١٥ في الغرام الواحد؟

٥-٢ حلّ المعادلة التربيعيّة بطريقة إكمال المربّع

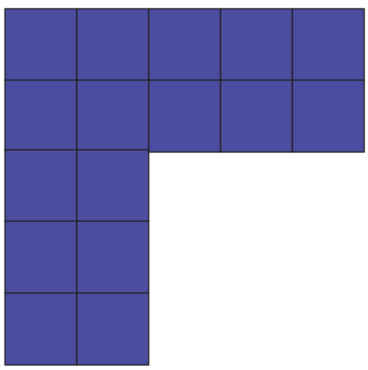
نشاط١:

كان للعالِمِ الإسلاميّ الخوارزمي دورٌ بارزٌ في علم الجبر، فقد توصّل إلى حلّ المعادلة التربيعيّة من خلال الهندسة، فكيف أحلُّ المعادلة: $س^{٢}$ + ٦س = ١٦ هندسيّاً؟

أمثّل المقدار $س^{٢}$ + ٦س، والمقدار ١٦ هندسيّاً، كما في الشكل *:

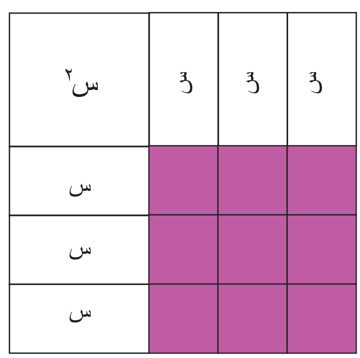


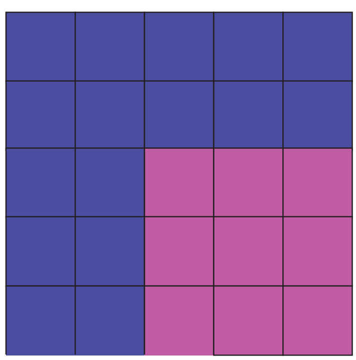
المساحة = $س^{٢}$ + ٦س وحدة مربعة



المساحة = ١٦ وحدة مربعة

أضيفُ ٩ وحدات مربّعة إلى كلٍّ منهما؛ ليصبح التمثيل كالآتي:





طول ضلع المربّع الأوّل = س + ٣ وحدة طول (لماذا؟)

طول ضلع المربع الثاني = ٥ وحدة طول (لماذا؟)

أي أنّ: س + ٣ = ٥، ومنها: س = ... وحدة طول (لماذا؟)

فكيف يمكن حلّ المعادلة السابقة بطريقةٍ جبريّة؟ وهل يمثّلُ العدد -٨ حلًّا لتلك المعادلة؟

---

* يمكن معرفة الجواب حدسياً من الشكل.

لحلّ المعادلة التربيعيّة المكتوبة على صورة مربّعٍ كاملٍ، يمكن استخدامُ التعريف الآتي:

تعريف: إذا كان س^{٢} = ك، ك ≥ ٠ ، فإنّ س = ± $\sqrt{ك}$ ، يُسمّى $\sqrt{ك}$ الجذر التربيعيّ الموجب للعدد س، ويُسمّى -$\sqrt{ك}$ الجذر التربيعيّ السالب للعدد س.

نشاط٢:

أكمل حلّ المعادلات الآتية:

أ) س^{٢} = ٢٥

س = ± $\sqrt{٢٥}$، ومنها: س = ± ٥

ب) (س – ٤)^{٢} = ٨١

س – ٤ = ± ٩ (لماذا؟)

إما: س – ٤ = ٩، ومنها: س = ...

أو :س – ٤ = -٩، ومنها: س = -٩ + ٤ = ...

جـ) (س – ٢)^{٢} – ٤٩ = ٠

(س – ٢)^{٢} = ٤٩

س – ٢ = ± ٧ (لماذا؟)

إما: س – ٢ = ٧، ومنها: س= ٩ (لماذا؟)

أو: س – ٢ = -٧، ومنها: س = ...

قد يتعذر أحياناً استخدامُ طريقة التحليل إلى العوامل في حلّ المعادلات التربيعيّة، فيتم اللجوء إلى كتابة المعادلة بالصورة (س ± هـ)^{٢} = ك، ك > ٠، هـ عدد حقيقي باستخدام طريقة إكمال المربّع؛ وذلك بإضافة ($\frac{\text{معامل س}}{٢}$)^{٢} إلى طرفيّ المعادلة، **عندما يكون معامل س^{٢} = ١**

مثال١:

أحلُّ المعادلة التربيعيّة: س^{٢} + ٦س – ٢ = ٠

أكتب المعادلة على الصورة: س^{٢} + ٦س = ٢

أجد: ($\frac{\text{معامل س}}{٢}$) = ($\frac{٦}{٢}$) = (٣)

أضيفُ مربّعه إلى طرفيّ المعادلة، فينتج:

$\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + (٣)^{٢} = ٢ + (٣)^{٢}$

$\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩ = ٢ + ٩$

$(\text{س} + ٣)^{٢} = ١١$ (ألاحظ أنّ الطرف الأيمن أصبح مربّعاً كاملاً)

$(\text{س} + ٣) = \pm\sqrt{١١}$

إمّا: $(\text{س} + ٣) = \sqrt{١١}$ ، ومنها: $\text{س} = \sqrt{١١} - ٣$

أو: $(\text{س} + ٣) = -\sqrt{١١}$ ، ومنها: $\text{س} = -\sqrt{١١} - ٣$

نشاط٣:

أكمل حلّ المعادلات الآتية:

أ) $\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + ٢٥ = ١١$ ألاحظ أنّ: $١٠ = ٢ \times ٥$

$(\text{س} - \cdots\cdots)(\text{س} - ٥) = ١١$

$(\text{س} - \cdots\cdots)^{٢} = ١١$

$(\text{س} - \cdots\cdots) = \pm\sqrt{١١}$

ومنها: $\text{س} = ٥ \pm \sqrt{١١}$ (لماذا؟)

ب) $\text{ص}^{٢} + ٣\text{ص} - ١٠ = ٠$ أكتب المعادلة على الصورة $\text{ص}^{٢} + ٣\text{ص} = ١٠$

أجد $\left(\frac{\text{معامل ص}}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢}\right)$، وأضيف مربّعه إلى طرفيّ المعادلة، فتصبح:

$\text{ص}^{٢} + ٣\text{ص} + \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = ١٠ + \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$

$\text{ص}^{٢} + ٣\text{ص} + \frac{٩}{٤} = ١٠ + \frac{٩}{٤}$

$\text{ص}^{٢} + ٣\text{ص} + \frac{٩}{٤} = \cdots\cdots$

$\left(\text{ص} + \frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٤٩}{٤}$

$\left(\text{ص} + \frac{٣}{٢}\right) = \pm \frac{٧}{٢}$ (لماذا؟)

إما: $\left(\text{ص} + \frac{٣}{٢}\right) = \frac{٧}{٢}$ ، ومنها: $\text{ص} = \frac{٧}{٢} - \frac{٣}{٢} = \cdots\cdots$

أو: $\left(\text{ص} + \frac{٣}{٢}\right) = \frac{-٧}{٢}$ ، ومنها: $\text{ص} = \frac{-٧}{٢} - \frac{٣}{٢} = \cdots\cdots$

نشاط٤:

أجدُ حلّ المعادلة $٢س^{٢} + ٥س - ٣ = ٠$.

أقسمُ جميع الحدود على ٢ لأجعل (معامل س^{٢} = ١)، فتصبح المعادلة بالصورة:

$$س^{٢} + \frac{٥}{٢}س - \frac{٣}{٢} = ٠$$

أكتب المعادلة على الصورة $س^{٢} + \frac{٥}{٢}س = \frac{٣}{٢}$

أجد: $\left(\frac{\text{معامل س}}{٢}\right) = \frac{٥}{٤}$ (لماذا؟)

أضيف مربعه إلى طرفيّ المعادلة، فتصبح:

$$س^{٢} + \frac{٥}{٢}س + \left(\frac{٥}{٤}\right)^{٢} = \frac{٣}{٢} + \left(\frac{٥}{٤}\right)^{٢}$$

$$س^{٢} + \frac{٥}{٢}س + \frac{٢٥}{١٦} = \frac{٣}{٢} + \frac{٢٥}{١٦}$$

$$س^{٢} + \frac{٥}{٢}س + \frac{٢٥}{١٦} = \frac{٤٩}{١٦}$$

$$(س + \cdots)^{٢} = \frac{٤٩}{١٦}$$

$(س + \frac{٥}{٤}) = \pm \frac{٧}{٤}$ (لماذا)؟

إما: $(س + \frac{٥}{٤}) = \frac{٧}{٤}$ ، ومنها: $س = \frac{٧}{٤} - \frac{٥}{٤} = \cdots\cdot$

أو: $(س + \frac{٥}{٤}) = \frac{-٧}{٤}$ ، ومنها: $س = \frac{-٧}{٤} - \frac{٥}{٤} = \cdots\cdot$

أناقش: حلّ كلٌّ من أيمن وهبة المعادلة التربيعيّة: س^{٢} + ٨ س − ٢٠ = صفر باستخدام إكمال المربّع كما يأتي، أيّهما قام بالحل بطريقة صحيحة؟

حلّ أيمن:

س^{٢} + ٨س − ٢٠ = ٠
س^{٢} + ٨س = ٢٠
س^{٢} + ٨س + $(٤)^{٢}$ = ٢٠ + $(٤)^{٢}$
$($س + ٤$)^{٢}$ = ٣٦
(س + ٤) = ± ٦
ومنها إمّا: س = ٢
أو: س = -١٠

حلّ هبة:

س^{٢} + ٨س − ٢٠ = ٠
س^{٢} + ٨س = ٢٠
س^{٢} + ٨س + $(٤)^{٢}$ = ٢٠
$($س + ٤$)^{٢}$ = ٢٠
(س + ٤) = ± $\sqrt{٢٠}$
ومنها إمّا: س = $\sqrt{٢٠}$ − ٤
أو: س = -$\sqrt{٢٠}$ − ٤

نشاطه:

تتوسط دوار نافورةُ ماءٍ دائريةُ كما في الشكل المجاور، وتحيط بها منطقةٌ خضراءِ مساحتها ٨πم^{٢}، فما طول نصف قطر الدائرة الخارجية المحيطة بالمنطقة الخضراء، الذي يزيد ١م عن قطر النافورة؟

أعتبر نصف قطر دائرة النافورة ر

فيكون نصف قطر الدائرة الخارجية المحيطة بالمنطقة الخضراء = ٢ر + ١ (لماذا ؟)

مساحة المنطقة المحيطة بالنافورة = مساحة الدائرة الخارجية المحيطة بالمنطقة الخضراء − مساحة دائرة النافورة

٨ π = π $($٢ر + ١$)^{٢}$ − π ر^{٢}

٨ = $($٢ر + ١$)^{٢}$ − ر^{٢} (لماذا؟)

٨ = (٤ر^{٢} + ٤ر + ١) − ر^{٢}

٣ر^{٢} + ٤ر = ٧ (لماذا؟)

ر^{٢} + $\frac{٤}{٣}$ ر = $\frac{٧}{٣}$ (لماذا؟)

$$ر^{٢} + \frac{٤}{٣} ر + (\frac{٢}{٣})^{٢} = \frac{٧}{٣} + (\frac{٢}{٣})^{٢}$$

$$ر^{٢} + \frac{٤}{٣} ر + \frac{٤}{٩} = \frac{٧}{٣} + \frac{٤}{٩}$$

$$(ر + \frac{٢}{٣})^{٢} = \frac{٢٥}{٩}$$ (لماذا؟)

$(ر + \frac{٢}{٣}) = \pm \sqrt{\frac{٢٥}{٩}}$ ومنها: $(ر + \frac{٢}{٣}) = \pm \frac{٥}{٣}$

إما $(ر + \frac{٢}{٣}) = \frac{٥}{٣}$ ، ومنها ر = ... م

أو $(ر + \frac{٢}{٣}) = \frac{-٥}{٣}$ ، ومنها ر = $\frac{-٧}{٣}$ م (هل تقبل قيمة ر هذه؟)

نصف قطر النافورة = ١ م

ومنها نصف قطر الدائرة الخارجية المحيطة بالمنطقة الخضراء = ... + ١ = ... م

تمارين ومسائل:

١) أحلُّ كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) $س^{٢} - ٣٦ = ٠$

ب) $(س + \frac{١}{٣})^{٢} = \frac{٤}{٩}$

جـ) $س^{٢} + ٨س + ١٦ = ١٣$

د) $٣س^{٢} - ٥ = ٠$

٢) أستخدم طريقة إكمال المربع لأجد جذور المعادلات الآتية:

أ) $ص^{٢} - ٥ص = -٤$

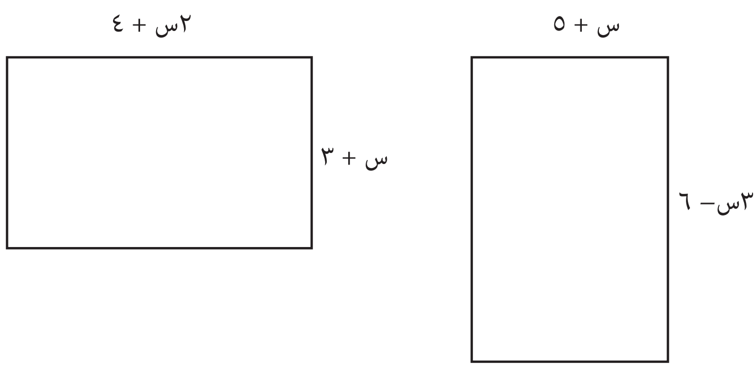
ب) $س^{٢} + ٨س + ٤ = ٠$

جـ) $س^{٢} + ٣س + ٢ = ٧$

د) $٧س + ٣ = س^{٢}$

هـ) $-٢س^{٢} - ٣س + ١ = ٠$

٣) ما قيمة/ قيم س التي تجعل مساحتيّ المستطيلين الموضّحة أبعادهما أدناه متساوية؟



٤) إذا كانت المِساحة (س) التي يغطّيها جهاز العرض الضوْئي على حائط، تُعطى بالمعادلة:
$س = ٠,١٦ ف^{٢}$، حيث: ف تمثل البعد الأفقي بين جهاز العرض والحائط.
ما البعد عن الحائط الذي يجب أنْ يوضع عليه جهاز العرض، حتى تكون المساحة على الحائط ٤م^{٢}؟

٣-٥ حلّ المعادلة التربيعيّة باستخدام القانون العام

نشاط١:

بلغت نسبة الادّخار في فلسطين ٦,١ ٪ عام ٢٠١٥م، وفق التقرير السنوي لسلطة النقد الفلسطينيّة، فإذا كانت قيمةُ مبلغٍ بعد استثماره لمدة سنتين تُعطى بالمعادلة: م = ١٠٠٠(١ + س)^{٢}، حيث: س تمثل قيمة الفائدة. أجد س إذا كان المبلغ في نهاية السنتين ١١٠٠ ديناراً.

تكون م في نهاية السنتين = ١١٠٠

ومنها: ١٠٠٠ (١ + س)^{٢} = ١١٠٠، أقسم طرفيّ المعادلة على ١٠٠٠، فتصبح:

(١ + س)^{٢} = ١,١

ومنها: (١ + س) = ± $\sqrt{١,١}$

إمّا: ١ + س = $\sqrt{١,١}$ ، ومنها: س = $\sqrt{١,١}$ – ....

أو: ١ + س = - $\sqrt{١,١}$ ، ومنها: س = - $\sqrt{١,١}$ – .... تهمل، (لماذا؟)

وهل يمكن تحديد عدد الحلول للمعادلة التربيعيّة دون حلّها؟

تعريف: يُسمّى المقدار ب^{٢} – ٤ أ جـ مميّزَ المعادلة التربيعيّة:
أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر، ويُحدّدُ مميّز المعادلة التربيعية عدد الحلول (الجذور) لتلك المعادلة.

نشاط٢:

أكمل إيجاد المميز، وجذور المعادلة: س^{٢} + ٥س + ٤ = ٠ (إنْ أمكن)

أ = ١، ب = ٥، جـ = ٤

المميز = ب^{٢} – ٤ أ جـ = ٥^{٢} – ٤ × ١ × ٤ = ٢٥ – ١٦ = ٩؛ أي أنّ: المميز موجب.

لإيجاد جذور المعادلة س^{٢} + ٥س + ٤ = ٠

أحلّل العبارة فتصبح: (س + ٤)(س + ١) = ٠

إمّا: س + ٤ = ٠ ، ومنها: س = ...

أو: س + ١ = ٠، ومنها: س = ...

ألاحظ أنّ المميز موجب، وأن للمعادلة التربيعية جذرين مختلفين.

أتعلّم: إذا كان مميّز المعادلة التربيعيّة (أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر) موجباً، فإنّ لهـذه المعادلة جذرين حقيقيّيْن مختلفيْن.

نشاط٣:

أكمل إيجاد المميّز وجذور المعادلة: ٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩ = ٠

أ = ٤، ب = ١٢، جـ = ٩

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = (١٢)^{٢} − ٤ × ٤ × ٩ = ١٤٤ − .... = ٠

لإيجاد جذور المعادلة: ٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩ = ٠

أحلّل العبارة التربيعية فتصبح المعادلة بالصورة: (٢ص + ٣)^{٢} = ٠ (لماذا؟)

إمّا: ٢ص + ٣ = ٠ ، ومنها: ص = ...

أو : ٢ص + ٣ = ٠ ، ومنها: ص = ...

ألاحظ أنّ جذريّ المعادلة التربيعيّة متساويان.

أتعلّم: إذا كان مميّز المعادلة التربيعيّة (أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠) يساوي صفر، فإنّ لهـذه المعادلة جذراً واحداً مكرراً.

نشاط٤:

أكمل إيجاد المميّز وجذور المعادلة: س^{٢} − ٢س + ٣ = ٠

أ = ١، ب = -٢، جـ = ...

المميّز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٤ − ٤( )( ) = -٨ (لماذا؟)

* أحلّ المعادلة بإكمال المربع، فينتج أنّ: س^{٢} − ٢س = -٣

ومنها: س^{٢} − ٢س + ١ = -٣ +١

: (س − ...)^{٢} = -٢

: (س − ...) = ± $\sqrt{-٢}$

لكن $\sqrt{-٢}$ عدد غير حقيقيّ؛ أي: أنّه لا يوجد حلّ في مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

أتعلّم: إذا كان مميّز المعادلة التربيعيّة (أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر) سالباً، فلا يوجد لها جذور حقيقيّة (لا يوجد لها حلّ في مجموعة الأعداد الحقيقيّة).

نشاط ٥:

أكمل إيجاد مميّز المعادلات الآتية، وأبيّنُ عدد جذورها:

أ) ٣س^{٢} − ٥س + ٤ = ٠

أ = ٣، ب = -٥، جـ = ٤

المميّز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = (-٥)^{٢} − ٤ × ٣ × ٤ = ٢٥ − ٤٨ = ...

وبما أنّ المميّز سالب، فإنّ عددَ جذور المعادلة يساوي ....

ب) ٤س^{٢} − ٤س + ١ = ٠

أ = ٤، ب = -٤، جـ = ...

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = (-٤)^{٢} − ٤ × ٤ × .... = ...

وبما أنّ المميّز .... ، فإنّ عددَ جذورِ المعادلة يساوي ......

جـ) -٣ص^{٢} − ٤ص − ١ = ٠

أ = ... ، ب = ... ، جـ = -١

المميّز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = (...)^{٢} − ٤ × (-٣)(-١)

= ١٦ − ١٢ = ...

وبما أنّ المميّز موجب، فإنّ عددَ جذور المعادلة يساوي ......

أناقش: أيّهما أخطأ في إيجاد مميّز المعادلة التربيعيّة حسام أم سعاد؟ أفسّرُ إجابتي.

حلّ حسام:

٥ص^{٢} − ٣ص = ٢

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ

= (-٣)^{٢} − ٤ × ٥ × ٢

= -٣١ وبما أن المميز سالب

لا يوجد حلول حقيقيّة للمعادلة.

حلّ سعاد:

٥ص^{٢} − ٣ص = ٢

٥ص^{٢} − ٣ص − ٢ =٠

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ

= (-٣)^{٢} − ٤ × ٥ × -٢ = ٤٩

وبما أن المميّز موجب، فإنه يوجد للمعادلة جذران حقيقيّان.

تعريف: يمكن إيجاد جذور المعادلة التربيعيّة المكتوبة بالصورة:

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠، أ ≠ ٠ (إنْ أمكن حلها) باستخدام القانون العام

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ جـ}}}{٢\text{أ}}$$

نشاط ٦:

أكمل حلّ المعادلة التربيعيّة الآتية، مستخدماً القانون العام:

٢,٥س + ١,٥ = س^{٢}

س^{٢} − ٢,٥س − ١,٥ = ٠

٢س^{٢} − ٥س − ٣ = ٠ (لماذا؟)

أ = ٢، ب = ... ، جـ = -٣

ومنها: المميّز = (-٥)^{٢} − ٤ (...) (...)

= ٢٥ + ٢٤ = ...

$$\text{س} = \frac{-(-٥) \pm \sqrt{٤٩}}{٢ \times ...}$$

$$\text{ومنها: س} = \frac{(٥) \pm ٧}{٤}$$

إمّا: س = ... ، أو: س = ...

نشاط ٧:

إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} + ٢(م + ١) س + م^{٢} = ٠ متساويين، أكمل إيجاد قيمة الثابت م:

مميز المعادلة التربيعيّة = ٠ أي أن ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٠ (لماذا؟)

أ = ... ، ب = ٢(م + ١) = ٢م + ... ، جـ = ...

ومنها: (٢م + ٢)^{٢} − ٤ (١)(م^{٢}) = ٠

(٤م^{٢} + ٨م + ٤) − ٤م^{٢} = ٠

٨م + ٤ = ٠

٨م = -٤ ومنها م = ...

تمارين ومسائل:

١) أجد مميّز كلٍّ من المعادلات الآتية، وأحدّدُ عدد جذورها:

أ) ٥س^{٢} + ٣س = -١ ب) ٤ = ١٣س − س^{٢}

جـ) ٤٠ص = ٢٥ + ١٦ص^{٢}

٢) أستخدم القانون العام لحلِّ كلٍّ من المعادلات الآتية (إنْ أمكن):

أ) ٢ص^{٢} + ١ = ٦ص

ب) ٤س^{٢} − ١٢س = -٥

جـ) س^{٢} + ٦س = ١٦

د) ٦س^{٢} + ١١ = -٢٥س − ١٠

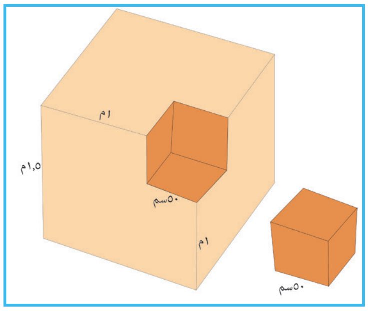
٣) ما قيمة ك التي تجعل جذريّ المعادلة: ٣س^{٢} − ٦س + ك = ٠، متساويين؟

٤) أحلّ المعادلة: ٢ص^{٢} = -٢ − ٥ص بطريقتين.

٥) يسدد لاعبو كرة السلة كراتهم نحوى المرمى بمسار يمكن تمثيله بالمعادلة:
ع = -٩س^{٢} + ٨١س + ٥ حيث ع تمثل ارتفاع الكرة بالمتر بعد س ثانية. أحسب الزمن اللازم لتكون الكرة على ارتفاع ٣م.

٥-٤ تحليل الفرق بين مكعبيْن

نشاط١:



يعتبر الحصول على مسكن مناسب من المتطلبات الأساسية للأفراد، تُشيرُ معطياتُ جهاز الإحصاءِ المركزيّ إلى ازديادٍ في البناء العمراني عام ٢٠١٦م. وفي ظل الإستخدام المتزايد للحجر الطبيعي في البناء؛ يُراد قطع قاعدة عمود مكعبة الشكل طول حرفها ٥٠سم من صخرة مكعبة الشكل طول حرفها ١,٥م، كما في الشكل المجاور، ما حجم الصخرة بعد قطع هذه القاعدة؟

حجم الصخرة بعد قطع القاعدة = حجم الصخرة − حجم قاعدة العمود

= (١,٥)^{٣} − (٠,٥)^{٣}

= ٣,٣٧٥ − .... = ٣,٢٥م^{٣}

هل يمكن حساب حجم الصخرة بطريقة أخرى؟

نشاط٢:

أُكمل إيجادَ ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

أ) (س − ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤) = س (س^{٢} + ٢س + ٤) − ٢(س^{٢} + ٢س + ٤)

= س^{٣} + ٢س^{٢} + ٤س − ٢س^{٢} − ٤س − ...

= س^{٣} − ٨

ب) (٢س − ص) (٤س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢})

= ٢س (٤س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}) − ص (٤س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢})

= ٨ س^{٣} + ... + ٢س ص^{٢} − (٤ س^{٢}ص + ... + ص^{٣})

= ٨س^{٣} + ٤س^{٢}ص + ٢س ص^{٢} − ٤س^{٢}ص − ٢س ص^{٢} − ص^{٣}

= ٨س^{٣} − .... ماذا تلاحظ؟

أتعلّم: يُسمّى المقدار الجبري أ^{٣} – ب^{٣} فرقاً بين مكعبين، ويتمّ تحليلُه؛ وفقاً للقاعدة:

أ^{٣} – ب^{٣} = (أ – ب) (أ^{٢} + أ ب + ب^{٢})

نشاط٣:

أكملُ تحليلَ المقادير الجبريّة الآتية:

١) س^{٣} – ٢٧ = س^{٣} – (٣)^{٣} = (س – ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)

٢) أ^{٣} – ١٢٥ = أ^{٣} – (....)^{٣} = (أ – ٥)(أ^{٢} + ٥أ + ...)

٣) ٨ – ٦٤س^{٣} = (٢)^{٣} – (٤س)^{٣} = (.... – ٤س)(٤ + ٨س + ...)

٤) ١٢٥س^{٣} – ٨ص^{٣} = (٥س)^{٣} – (٢ص)^{٣}

= (٥س – ....) (٢٥س^{٢} + ١٠س ص + ٤ص^{٢})

٥) ٨ أ^{٣} – ٣٤٣ = (٢أ)^{٣} – (٧)^{٣} = (٢أ – ٧)(٤أ^{٢} + ١٤أ + ...)

نشاط٤:

يضمُّ مصنعٌ للزيوت خزّانَ زيتٍ مكعّبَ الشكل، مملوءاً بالزيت، طولُ حرفه ٢م، فإذا تمّ تعبئةُ ٢٧ عبوة مكعّبة من الخزّان، طولُ حرف كلٍّ منها ٣٠سم ، أجد كميّةَ الزيتِ المتبقيّة في الخزّان، باستخدام تحليل الفرق بين مكعبين.

حجم الخزان = (طول ضلع الخزان)^{٣} = (...)^{٣}

حجم العبوة = (طول الضلع)^{٣} = (٠,٣)^{٣}

كميّة الزيت المتبقيّة في الخزان = حجم الخزان – حجم العبوات ال ٢٧

= ... – ٢٧ × (٠,٣)^{٣}

= (٢)^{٣} – (٣)^{٣}(٠,٣)^{٣}

= (٢)^{٣} – (٠,٩)^{٣} (لماذا؟) *

= (٢ – ٠,٩)(٤ + ٢ × ٠,٩ + ٠,٨١)

ومنها: كميّة الزيت المتبقية في الخزّان = (١,١) (٤ + ١,٨ + ٠,٨١)

= (١,١)(٦,٦١) = ...م^{٣}

* (س ص)^{ن} = س^{ن} ص^{ن}

تمارين ومسائل:

١) أكتبُ كلًّا من الآتية في أبسط صورة:

أ) $(٣س - ١)(٩س^{٢} + ٣س + ١)$

ب) $(ل - \frac{١}{٤})(ل^{٢} + \frac{١}{٤}ل + \frac{١}{١٦})$

جـ) $(ن^{٢} - ١)(ن^{٤} + ن^{٢} + ١)$

٢) أحلّل المقادير الآتية إلى عواملها الأوليّة:

أ) $س^{٣} - ٦٤$

ب) $٢١٦س^{٣} - ٨$

جـ) $\frac{٢٧}{١٢٥} - س^{٣}$

د) $٢ل^{٣} - ١٦$

٣) أستخدم تحليل الفرق بين مكعبين في إيجاد قيمة كلٍّ من الآتية:

أ) $(٧ - ٥)(٧^{٢} + ٧ \times ٥ + ٥^{٢})$

ب) $(\frac{٢}{٣} - \frac{٥}{٦})((\frac{٢}{٣})^{٢} + \frac{٢}{٣} \times \frac{٥}{٦} + (\frac{٥}{٦})^{٢})$

جـ) $(٢٠ - ١٧)(٢٠^{٢} + ٢٠ \times ١٧ + ١٧^{٢})$

٤) إذا كان $س = ص + ٤$، $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٤٩$، فما قيمة $س^{٣} - ص^{٣}$؟

٥) تشتهر قباطية بمقالع الحجر (المحاجر) ومناشير قص الحجر، يريد صاحب منشار القص من قطعة صخر مكعبة الشكل طول ضلعها ١,٨م لانتاج ٦٤ قطعة حجر مكعبة الشكل طول حرف كل منها ٤٠سم، أجد بطريقتين الحجم المتبقي من قطعة الصخرة بعد انتاج القطع المشار إليها.

٥-٥ تحليل مجموع مكعّبيْن

نشاط١:

تشتهرُ مدينةُ نابُلْسَ بصناعة الصابون منذ ما يزيد عن ألف عام، يقوم مصنعٌ بصناعة الصّابون في قوالبَ مكعّبةٍ، طولُ حرفها ٤سم، و٢سم ، فإذا أراد المصنعُ تصميمَ قالبٍ جديدٍ مكعّبِ الشكل، حجمه يساوي مجموع حجمي قالبيْن قديميْن مختلفين، ما حجم هذا القالب؟

حجم القالب الجديد = $(٤)^٣ + (٢)^٣ = ٦٤ + ...$ = ... سم^٣ ، وهل يمكن حساب حجمِ هذا القالب بطريقة أخرى؟

نشاط٢:

أكمل تحليل المقدار: " $أ^٣ + ب^٣$ " ، باستخدام قانون الفرق بين مكعبين:

أكتب المقدار $أ^٣ + ب^٣$ على الصورة: $أ^٣ - (-ب)^٣$

$أ^٣ - (-ب)^٣ = (... - (-ب))(أ^٢ + (أ)(-ب) + (-ب)^٢)$

$= (أ + ب)(أ^٢ - .... + ب^٢)$

أتعلّم: يُسمّى المقدار الجبري $أ^٣ + ب^٣$ مجموعَ مكعّبيْن، وتم تحليلُه وفقاً للقاعدة: $أ^٣ + ب^٣ = (أ + ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$.

نشاط٣:

أكملُ تحليلَ المقادير الجبريّة الآتية:

أ) $ص^٣ + ٦٤ = ص^٣ + (٤)^٣ = (ص + ٤)(ص^٢ - ٤ص + ١٦)$

ب) $م^٣ + ٨ = م^٣ + (٢)^٣ = (م + ...)(م^٢ - ٢م + ...)$

جـ) $٨أ^٣ + ٣٤٣ = (٢أ)^٣ + (٧)^٣ = (٢أ + ٧)(.... - ١٤أ + ...)$

د) $س^٣ + ١ = (س + ...)(س^٢ - ..... + ...)$

نشاط٤:

خزان ماء إسمنتي على شكل متوازي مستطيلات، عرضُ قاعدتِه (س + ص) متر، وارتفاعُ الماءِ فيه ١م، يُراد ضخُّ كامل الماء الموجود فيه لملئ خزّانيْن مكعبيّ الشكل، طول حرف الأوّل س متر، وطولُ حرف الثاني ص متر. أجدُ بدلالة س، ص المقدار الجبريّ الذي يمثّل طولَ قاعدةِ الخزان الإسمنتي.

حجم الماء في الخزّانين المكعبين = $س^{٣} + ص^{٣}$ (لماذا؟)

حجم الماء في الخزان الإسمنتي = مساحة القاعدة × الارتفاع

= طول القاعدة × عرضها × الارتفاع

= طول القاعدة × (س + ص) (١)

حجم الماء في الخزانين المكعبين = حجم الماء في الخزان الإسمنتي

$س^{٣} + ص^{٣}$ = (س + ص) × طول القاعدة

(س + ص)($س^{٢}$ − س ص + ...) = (س + ص) × طول القاعدة

أقسمُ الطرفين على ....

ومنها: المقدار الجبري الذي يعبر عن طول قاعدة الخزان الإسمنتي = ($س^{٢}$ − س ص + ...)

تمارين ومسائل:

١) أحلل المقادير الآتية إلى عواملها الأولية:

أ) $ع^{٣} + ١$

ب) $٢٧ + ٦٤ك^{٣}$

جـ) $\frac{٢١٦}{ب^{٣}} + ١$

د) $٣ع^{٣} + ١٩٢$

٢) أجد بطريقتين قيمة كل من الآتي:

أ) $(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣})(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٦} + \frac{١}{٩})$

ب) $(\frac{١}{٢})^{٣} + (\frac{٣}{٤})^{٣}$

٣) إذا كان $س ص = -٢$، $س + ص = ١$، أحسب قيمة $س^{٣} - ص^{٣}$.

٤) أكتب المقدار الآتي بأبسط صورة: $س^{٣} - ص^{٣} - س^{٢} + ص^{٢}$.

٥) تخطط مديرة مدرسة لاستبدال خزاني مياه مكعبي الشكل طول ضلع الأول ١,٥م، وطول ضلع الثاني ١م؛ بخزان يتسع لمقدار ما يتسع له الخزانان معاً من الماء. أجد بطريقتين حجم هذا الخزان.

٦-٥ حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْنِ بمتغيريْن

نشاط ١:

تُعَدُّ معالجة المياه العادمة من طرق توفير المياه للزّراعة، فإذا قامت محطّة تنقية بضخّ المياه المعالَجَة عبر أنبوبيْنِ، كما في الشّكل المجاور، بحيث يزيد معدل ضخّ الأنبوب (أ) ٥٠ لتراً/ د عن معدل الضّخّ في الأنبوب (ب)، فإذا ضخّ الأنبوبان معاً بمعدل ٣٣٠ لتراً/د، فما معدل ضخّ الأنبوب (ب)؟

أَفْرِضُ أنّ معدّل الضَّخّ في الأنبوب (ب) = س لتر / د

فيكون معدّل الضّخّ في الأنبوب (أ) = س + ٥٠ لتر / د

أَحُلُّ المعادلة س + (س + ٥٠) = ٣٣٠

٢س + ٥٠ = ٣٣٠، ومنها س= .... لتر/د، وهل يمكن حساب معدّل الضّخّ هذا بطريقة أُخرى؟

أتذكّر: تُسمّى عمليّةُ إيجادِ جميعِ قيمِ س الّتي تحقّقُ المعادلةَ عمليّةَ حَلِّ المعادلة، وتُسمّى مجموعةُ قيمِ س الّتي تحقّق المعادلةَ مجموعةَ الحلِّ للمعادلة.

أوّلاً- حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْنِ بطريقة التَّعويض:

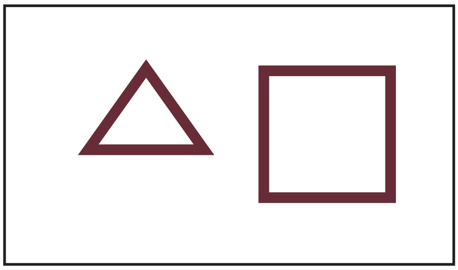
يمكن حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْن بمتغيريْنِ بطريقة التَّعويض، من خلال الخطوات الآتية:

- أختارُ إحدى المعادلتَيْنِ، ثم أجعَلُ أحد المتغيرين فيها موضوعاً للقانون*.
- أُعوّضُ قيمة المتغير موضوع القانون في المعادلة الأُخرى.
- أَحُلُّ المعادلة النّاتجة الّتي تضم متغيراً واحداً.
- أُعوّضُ قيمة هذا المتغير النّاتجة في إحدى المعادلتَيْنِ لأجد قيمة المتغيّر الثّاني.

* التعبير عن أحد المتغيرين في معادلة بدلالة المتغير الآخر.

مثال١:

يستخدم محلّ لبيع الحلويات أحبال زينة مضيئة، طول كلّ منها ١٤٠سم، بحيث يقسم الحبل إلى مربّع ومثلّث متساوي الأضلاع، فإذا كان طول ضِلْع المربّع يزيد ٧سم عن طول ضِلْع المثلّث. فما طول ضِلْع كلٍّ من المربّع والمثلّث؟



أرسم رسماً توضيحياً كما في الشكل المجاور، وأعتبرُ أنّ
طول ضِلْع المثلّث = س، وأنَّ طول ضِلْع المربّع = ص
ومنها محيط المثلّث = ٣س، محيط المربّع = ٤ص
طول حبل الزّينة = محيط المربّع + محيط المثلّث = ١٤٠
٤ص + ٣س = ١٤٠ .... (١)
طول ضِلْع المربّع = ٧ + طول ضِلْع المثلّث
ومنها: ص = ٧ + س................(٢).
أُلاحِظُ أنَّ ص هي موضوع القانون، وبتعويض قيمة ص من المعادلة (٢) في المعادلة (١)، يَنْتُج:

٤ص + ٣س = ١٤٠
٤ (٧ + س) + ٣س = ١٤٠
٧س + ٢٨ = ١٤٠ (لماذا؟)
س = ١٦سم وهي طول ضِلْع المثلث
ولإيجاد قيمة ص، نُعَوِّضُ قيمة س في المعادلة (٢)،
ومنها ص = ٢٣سم وهي طول ضِلْع المربع

للتحقّق من صحة الحلّ، نعوّض قيم س، ص في إحدى المعادلتَيْنِ.
ومنها: ٤(٢٣) + ٣(١٦) = ٩٢ + ٤٨ = ١٤٠

نشاط ٢:

أُكْمِلُ حلّ المعادلتَيْنِ الآتيتين بطريقة التَّعويض:

٢س + ٣ص = ١٦ ....(١)

٣س - ص = ٢ ....(٢)

أجعل ص موضوع القانون في المعادلة (٢)

ومنها ص= ٣س - ٢ (لماذا؟)

أُعوّض قيمة ص في المعادلة (١)، فيَنْتُج:

٢س + ٣(........) = ١٦

ومنها قيمة س = ٢ (لماذا؟)

أُعوّضُ قيمة س = ٢ في المعادلة: ص = ٣س - ٢

فيَنْتُج أنّ ص = ٤ (لماذا؟)

أَتحقَّقُ من صحّة الحلّ.

أُفَكِّر: هل تختلف مجموعة حلّ المعادلتَيْنِ السّابقتَيْنِ عندما تُجْعل س موضوعاً للقانون؟

نشاط ٣:

أُناقِشُ: حلّ رُبى وسميرٍ للمعادلتَيْنِ:

س + ص = ٣

س + ٢ص = ٧

حلّ رُبى:

س + ص = ٣

(س + ص) + ص = ٧

٣ + ص = ٧

ومنها ص = ٤

س = -١

حلّ سمير:

س + ص = ٣، ومنها ص = ٣ - س

س + ٢ص = ٧

س + ٢(٣ - س) = ٧

س + ٦ - ٢س = ٧

ومنها: س = -١

ص = ٤

نشاط ٤:

أُكْمِلُ حلّ المعادلتَيْنِ الآتيتيْنِ بطريقة التَّعويض:

س + ٣ص = ١ .... (١)

٣س – ٤ص = -٢٣ .... (٢)

أختارُ المعادلة (١)، وأجعلُ س موضوع القانون فيها،

ومنها س = (١ – ٣ص) ....(٣)

أُعَوِّضُ قيمة س في المعادلة (٢)، فيَنْتُج أنّ:

٣(١ – ٣ص) –٤ص = -٢٣

٣(١ –٣ص) – ٤ص = -٢٣

ومنها: ٣ – ٩ص – ٤ص = -٢٣

قيمة –١٣ص = -٢٦ (لماذا؟)

ومنها: ص = ٢ (لماذا؟)

لإيجاد قيمة س، أُعَوِّض قيمة ص في المعادلة (٣)، فيَنْتُج أنّ:

س = ١– ٣ × –١ ، ومنها س = -٥ (لماذا؟)

ثانياً - حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْن بطريقة الحذف:

تقوم فكرة حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْن بطريقة الحذف على جمع أو طرح المعادلتَيْنِ، أو صورهما المختلفة* لحذف أحد المتغيرَيْن، بحيث تَنْتُجُ معادلة بمتغير واحد.

* يمكن كتابة المعادلة الخطية بصورة مختلفة بضربها بأي عدد حقيقي لا يساوي صفر

نشاط ٥:

أُكْمِلُ حلّ المعادلتَيْنِ الآتيتيْنِ بطريقة الحذف:

٣س + ص = ١٠ .... (١)

س + ص = ٤ .... (٢)

أَطْرَحُ المعادلتَيْنِ: ٣س – س + ص – ص = ١٠ - ...

ومنها: ٢س = ... (لماذا؟)

س = ...

لإيجاد قيمة ص، أُعَوِّضُ قيمة س في المعادلة (١)

٣(٣) + ص = ١٠

ومنها: ص = ... (لماذا؟)

نشاط ٦:

أُكْمِلُ حلّ المعادلتَيْنِ الآتيتيْنِ بطريقة الحذف:

٢س + ٣ص = ١ ....(١)

٣س – ٤ص = ١٠ ....(٢)

أُلاحِظُ أنَّ معاملات س و ص غير متساوية في المعادلتَيْنِ،

أَضْرِبُ طرفَي المعادلة (١) بالعدد -٣ فيَنْتُج: -٦س – ٩ص = -٣

أَضْرِبُ طرفَي المعادلة (٢) بالعدد ٢ فيَنْتُجُ: ٦س – ٨ص = ٢٠

أجمع المعادلتَيْنِ:

-٦س – ٩ص = -٣

+ ٦س – ٨ص = ٢٠

-١٧ص = ١٧

ومنها: ص = ... (لماذا؟)

ولإيجاد قيمة س، نُعَوِّضُ قيمة ص في المعادلة (١)

٢س + ٣ص = ١

و منها: ٢س + ٣(-١) = ١

س = ...

أُفَكِّر: هل تختلف قيمة س إذا عُوِّضَتْ قيمةُ ص في المعادلة الثّانية؟

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أَحُلُّ كُلَّ زوج من المعادلات فيما يأتي بطريقة التَّعويض:

أ) ٤س + ص = ١ ، ٥س − ٣ص = -٢٠

ب) ٢س − ص = ٥ ، ٣س + ٥ص = ١

٢) أَحُلُّ كُلَّ زوج من المعادلات فيما يأتي بطريقة الحذف:

أ) س + ٣ص = ٦ ، س + ٤ص = ١٠

ب) أ + ب = ١٠ ، أ + $\frac{٣}{٢}$ ب = -٤

جـ) أ + ٤ب = ٣ ، ٦أ = ١ + ٢ب

٣) مثلّث متساوي الأضلاع، أطوال أضلاعه بالسنتمتر هي: (٢س + ٣ص)، (٣س + ٢ص)، ١٠. أَجِدُ قيمة كلٍّ من س، ص.

٤) تباع التذاكر في مدينة ملاهٍ بسعر دينار واحد للأطفال، وديناريْنِ للكبار، فإذا كان العائد من بيع التذاكر في أحد الأيام ٥٦٠ ديناراً، وكان عدد الزّائرينَ من الصِّغار يزيد ٨٠ شخصاً عن عدد الزّائرينَ من الكبار. فما عدد زائري مدينة الملاهي في ذلك اليوم؟

١) أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ أيّ المعادلات الآتية تكافئ المعادلة س^{٢} + ٥س = ١٤؟

أ) $(\text{س} + \frac{٥}{٢})^{٢} = \frac{٨١}{٤}$ ب) $(\text{س} + \frac{٥}{٢})^{٢} = \frac{٤٥}{٤}$

جـ) $(\text{س} - \frac{٥}{٢})^{٢} = \frac{٨١}{٤}$ د) $(\text{س} - \frac{٥}{٢})^{٢} = \frac{-٥}{٤}$

٢ ما عدد الجذور الحقيقية للمعادلة س^{٢} − ٥س + ٨ = ٠ ؟

أ) صفر ب) ١

جـ) ٢ د) لا يمكن تحديده.

٣ ما جذور المعادلة ٢س^{٢} + ٥س + ١ = ٠؟

أ) $\frac{٥ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$ ب) $\frac{٥ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$

جـ) $\frac{-٥ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$ د) $\frac{-٥ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$

٤ ما قيمة م التي تجعل المقدار (س − م)(س^{٢} + ٢س + ٤) فرقاً بين مكعبين؟

أ) ٤ ب) ٢ جـ) -٢ د) -٨

٥ ما حلول المعادلة ٢ب^{٢} − ب − ٣ = ٠ ؟

أ) $\frac{-٢}{٣}$ ، ١ ب) $\frac{٢}{٣}$ ، -١

جـ) $\frac{-٣}{٢}$ ، ١ د) $\frac{٣}{٢}$ ، -١

٢) أحلّ المعادلات الآتية:

أ) ب^{٢} − ٤ب + ٤ = ١٦

ب) ص^{٢} − ١٢ص + ٣٦ = ٥

جـ) (س + ٣)(س − ٤) = ١٠

٣) إذا كان العدد ٢ أحدَ جذريّ المعادلة: س^{٢} − ٥س + ن = صفر، أجد قيمة الثابت ن، ثمّ أجدُ الجذرَ الثاني.

٤) انطلقت سيّارتان من مفترق طرقٍ في الوقت نفسه، حيث توجّهت إحداهما نحو الشمال، فيما توجّهت الأخرى نحو الغرب، فإذا قطعت السيّارة المتوجّهة نحو الشمال مسافة ٢٠م زيادةً عن المسافة التي قطعتها السيّارة المتوجّهة نحو الغرب، أجدُ المسافةَ التي قطعتها كلٌّ من السيّارتيْن، منذ انطلاقهما من المفترق، عندما تكون المسافة (ف) بين السيّارتين ١٠٠م.

٥) أحلّل المقادير الآتية إلى عواملها الأوّليّة:

أ) $\frac{١}{١٢٥}$ أ^{٣} − $\frac{٢٧}{٦٤}$ ص^{٣} ب) ٤٠س^{٣} + ٥ص^{٣} جـ) ٥٤س^{٤} − ٢س

٦) أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه ٨ سم، أُنزل العمود أد على القاعدة ب جـ، ما طول ذلك العمود؟

أقيم ذاتي:

بعد دراستي لهذه الوحدة ،اكتب ما الذي تعلمته منها بما لا يزيد عن ثلاثة اسطر.

مشروع الوحدة:

يعتبر الحق في الحصول على بيئة آمنة من الحقوق الأساسية للأفراد، يتعرض طلبة المدارس في بعض الأحيان لمخاطر الدهس، نتيجة للسرعة الزائدة. أتعاون وأفراد مجموعتي للتقليل من هذه المخاطر من خلال القيام بالإجراءات الآتية:

١) أحدد ما الإشارات التحذيريّة التي يلزم وضعها للسائقين على طريق المدرسة.
٢) أبحث عن المسافات التي يجب أن توضع عندها هذه الإشارات وفقاً لقوانين السير.
٣) أستخدم معادلة التوقف ف = ٠,٤٤ع^{٢} + ١,١ ع ، لتحديد السرعة التي يجب أن يسير بها السائقون حال وجود هذه الإشارات.

روابط الكترونية:	http://www.mathwarehouse.com/quadratic/quadratic-formula-calculator.php http://www.math.com/students/calculators/source/quadratic.htm

الهندسة والقياس

الوحدة
٦

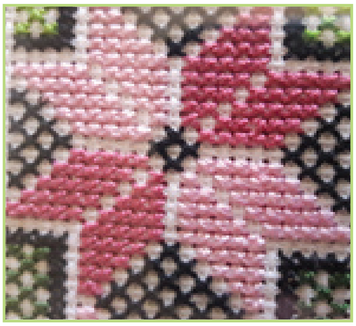
يُعتبرُ الجامعُ الأحمرُ من أهمّ معالمِ مدينةِ صفد، وقد بُنيَ تبعاً لأسسٍ هندسيّةٍ على الطّراز المملوكي. أبحثُ عن المعالمِ التي اعتمد عليها الطّرازُ المملوكيّ في الفنّ المِعماريّ.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الأشكال والمجسمات الهندسية في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

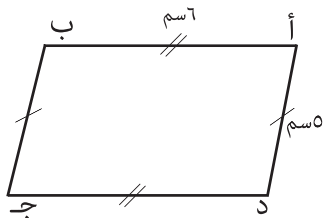
١- التعرّف إلى رسم متوازي أضلاعٍ من مثلّثٍ معلوم.
٢- إيجاد مساحة متوازي الأضلاع، بدلالة مِساحة المثلّث المشترِك معه في القاعدة والارتفاع.
٣- التعرّف إلى القطاع الدائري وخصائصه.
٤- إيجاد مِساحة القطاع الدائري، وطول قوس القطاع الدائري، وزاوية القطاع الدائري.
٥- التعرّف إلى القطعة الدائريّة.
٦- التعرّف إلى الأسطوانة الدائريّة القائمة.
٧- إيجاد المِساحتيْن الجانبيّة والكليّة للأسطوانة.
٨- إيجاد حجم الأسطوانة.
٩- التعرُّف إلى المخروط الدائري القائم.
١٠- إيجاد المساحتيْن الجانبيّة والكليّة للمخروط.
١١- إيجاد حجم المخروط.
١٢- توظيف المساحات والحجوم في حلّ مشكلاتٍ حياتيّة.

٦-١ متوازي الأضلاع

نشاط ١:



أتأمّل النجمة الكنعانيّة الثّمانيّة التي تبرز في العديد من الأزياء الشعبيّة الفِلَسطينيّة، وتتكوّنُ من ثمانيةِ متوازياتِ أضلاع، فما بعض خصائص متوازي الأضلاع؟

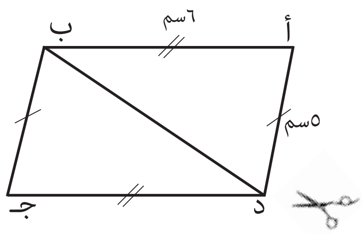


أرسم نموذجاً لمتوازي الأضلاع، كما في الشكل المجاور.

أب // جـ د، أ د // ب جـ (لماذا؟)

أ ب = ٦ سم، جـ د = ···· ؛ لأنّ كلّ ضلعيْن متقابليْن متساويان

أ د = ٥ سم، ب جـ = ······ (لماذا ؟)



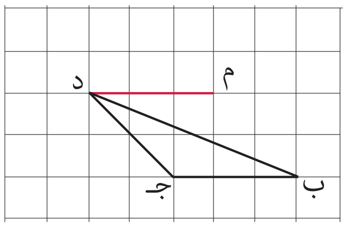
أقصّ على القطر د ب، وألاحظ أنّ المثلّث أ د ب

يطابقُ المثلث جـ ب د.

أفكّرُ: ما المثلثان المتطابقان إذا تمّ القصُّ على القطر أجـ؟

أتذكّر: من خصائص متوازي الأضلاع : كلُّ ضلعيْنِ متقابليْنِ متساويانِ في الطّول.

نشاط ٢:

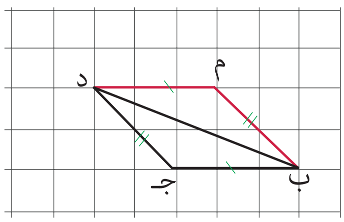


الشكل (١)

كيف يُمكنُ إنشاء متوازي الأضلاع د جـ ب م من المثلّث د جـ ب؟

أرسم المثلّث د جـ ب على ورق مربّعات، كما في الشكل(١).

أصِلُ د م يوازي ب جـ، ويساويه في الطول. (لماذا؟)



الشكل (٢)

أصِلُ م ب، كما في الشكل(٢)، فيتكوّن متوازي الأضلاع ب جـ د م

ألاحظُ أنّ المثلثيْن د م ب ، د جـ ب متطابقان. (لماذا؟)

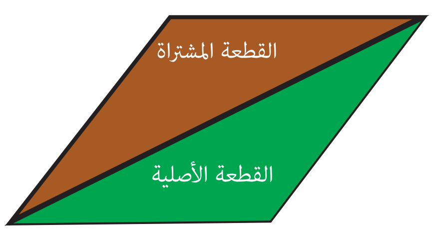
أناقش: يمكن إكمالُ أيِّ مثلّثٍ إلى متوازي أضلاع.

أتعلّم: يمكن إنشاءُ متوازي أضلاعٍ من مثلّثٍ معلومٍ باستخدام خاصيّة متوازي الأضلاع (كلُّ ضلعيْنِ متقابليْنِ متساويانِ في الطول).

نشاط ٣:

يمتلكُ مزارعٌ قطعةَ أرضٍ مثلّثةَ الشّكل مساحتها ١٠٠٠م^{٢}، فإذا قام المزارع بشراء قطعةِ أرضٍ مجاورةٍ، لها الأبعادُ نفسُها، لتصبحَ أرضُه على شكل متوازي أضلاع، فما مساحةُ قطعةِ الأرضِ التي أصبح يمتلكها المزارع؟

أرسم رسماً توضيحيّاً كما في الشكل المجاور.

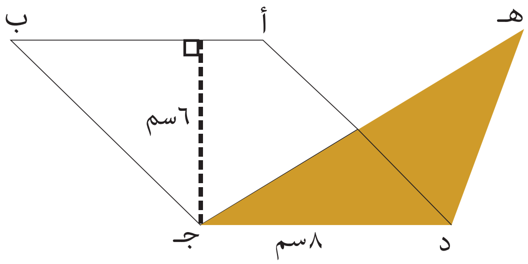


مساحة قطعة الأرض = مساحة متوازي الأضلاع = ٢ × مساحة المثلث (لماذا ؟)

= ٢ × ...... = ٢٠٠٠م^{٢}

نشاط ٤:

يبيّن الشكل المجاور متوازي الأضلاع أ ب جـ د، المشترك مع المثلث هـ د جـ في القاعدة والارتفاع، أكمل:



ارتفاع المثلث هـ د جـ = ٦ سم (لماذا ؟)

ارتفاع متوازي الأضلاع أ ب جـ د = ⋯⋯سم

طول قاعدة المثلث هـ د جـ = ٨ سم

طول قاعدة متوازي الأضلاع أ ب جـ د = ⋯⋯سم

مساحة المثلث هـ د جـ = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع.

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ⋯⋯ = ٢٤سم^٢

مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د = القاعدة × الارتفاع

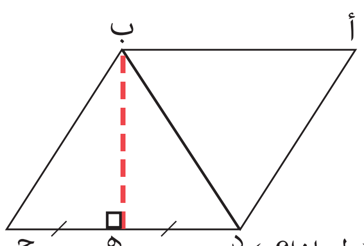
= ٨ × ⋯⋯ = ٤٨سم^٢

فما العلاقة بين مساحة المثلث ومساحة متوازي الأضلاع المشترك معه في القاعدة والارتفاع ؟

أتعلّم:

مساحة متوازي الأضلاع = ٢ × مساحة المثلث المشترك معه في القاعدة والارتفاع.

نشاط ٥:



د ب جـ مثلّثٌ متساوي الأضلاع، طول ضلعه ٦ سم،

أجدُ مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د.

مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د = ٢ × مساحة المثلث د ب جـ (لماذا؟)

مساحة المثلث د ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × د جـ × ب هـ

= ٣ ب هـ

أستخدم نظريّة فيثاغورس لإيجاد ب هـ   (لماذا؟)

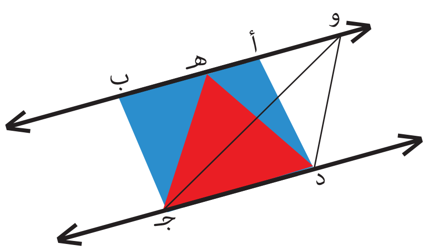
(ب د)^{٢} = (ب هـ)^{٢} + (د هـ)^{٢} ، ومنها: ٣٦ = (ب هـ)^{٢} + ٩

ب هـ = $\sqrt{٢٧}$ = ٣$\sqrt{٣}$ سم

ومنها: مساحة المثلث د ب جـ = ٣ × ....سم^{٢} = ٩$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

مساحة متوازي الأضلاع = ٢× ٩$\sqrt{٣}$ = ...سم^{٢}

نشاط٦:



أتأمل الشكل المجاور الذي يتضمن متوازي الأضلاع أ ب جـ د، والذي مساحته ٥٠ سم^{٢}، فما مساحة المثلّثيْن

د هـ جـ، د و جـ.

المثلث د هـ جـ، والمثلث د و جـ مشتركان في القاعدة والارتفاع

مع متوازي الأضلاع أ ب جـ د   (لماذا؟)

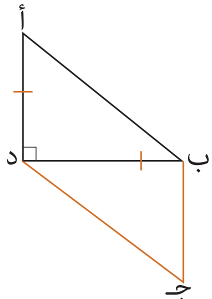
ومنها: مساحة المثلث د هـ جـ = $\frac{١}{٢}$ مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د

= $\frac{١}{٢}$ × ....

= ٢٥سم^{٢}

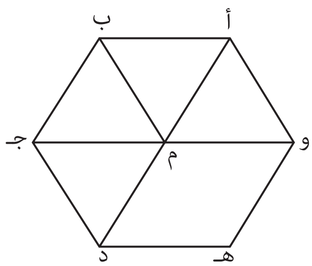
وبالمثل: مساحة المثلث د و جـ = ٢٥سم^{٢} (لماذا ؟)

تمارين ومسائل:



١) أ ب جـ د متوازي أضلاع، أ د ب مثلث متساوي الساقيْن، وقائم الزاوية في د،

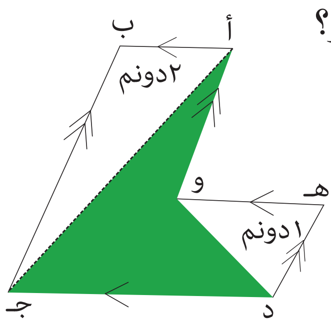
إذا كان أ د = ٤سم، أجد مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د؟



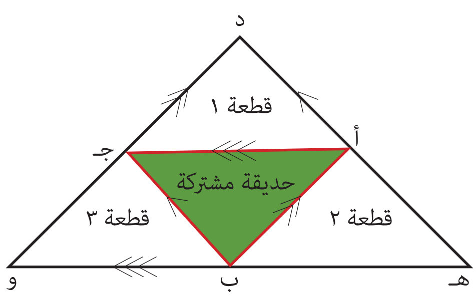
٢) بالاعتماد على الشكل المجاور، الذي فيه $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{و جـ}}$ ،

مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ م تساوي ٢٠سم^{٢}،

ما مساحة الشكل الرباعي أ و جـ ب؟



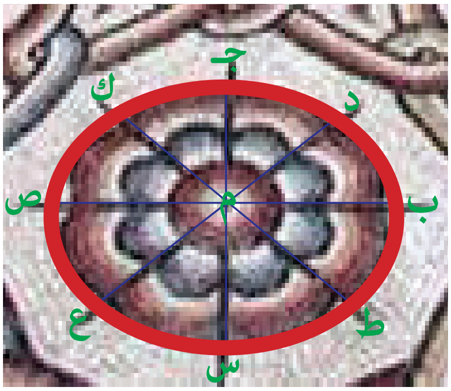
٣) أجدُ مساحة المنطقة المظلّلة أ جـ د و، الموضّحة في الشكل المجاور؟



٤) ورث ثلاثةُ إخوةٍ قطعةَ أرض، مثلّثةَ الشّكل، فأرادوا تقسيمَها بينهم بالتساوي، اقترح أحدُهم تقسيمَ قطعةِ الأرض، كما في الشكل المجاور، على أنْ تبقى المنطقةُ أ ب جـ حديقةً مشتركة. فهل تتساوى الحصصُ في قطعة الأرضِ بناءً على هذا الاقتراح؟ أوضح اجابتي؟

٦-٢ القطاع الدائريّ

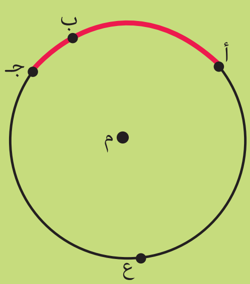
نشاط ١:



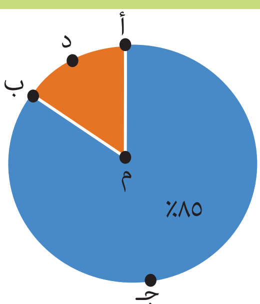
يضمُّ قصرُ هشام بن عبد الملك في مدينةِ أريحا واحدةً من أهمّ لوحاتِ الفُسيْفساءِ في العالم، أتأمّلُ الصّورةَ المجاورةّ، ثم أُكمل:

- تقع النّقاط س، ص، .... على الدائرة التي مركزها م.
- تمثّل د م، جـ م، .... أنصافَ أقطارٍ في هذه الدائرة.
- تمثّل ب ص، جـ س، ....، .... أقطاراً في هذه الدائرة.
- يُقدّرُ قياس زاوية القطاع الدائري جـ م ب د ≃ ٩٠° (لماذا؟)
- يُسمّى جـ م ب د قطاعاً دائريّاً، فماذا يُسمّى جـ د ب؟

تعريف: لتكن أ ، جـ نقطتيْن على الدائرة، كما في الشكل المجاور، تقسمان الدائرة إلى جزأين، يُسمّى كلُّ جزءٍ منهما قوساً للدائرة، ويرمز له بالرمز أ جـ .
القوس الأصغر أ جـ ، ويُميّز بالرمز أ ب جـ.
القوس الأكبر أ جـ ، ويُميّز بالرمز أ ع جـ .



نشاط ٢:

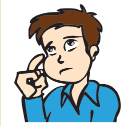


بلغت نسبةُ النّجاحِ في فلسطينَ، عام ٢٠١٦م في امتحان الثانويّة العامّة للفرع العلمي ٨٥٪. أتأمّل الشكل المجاور، ثم أكمل:

يُرمَزُ للقوس الأصغر بالرّمز أ د ب ، فيما يُرمَزُ للقوس الأكبر بالرمز ....

تُمثّل منطقة الرسوب بالقطاع الدائري أ م ب د، فيما تُمثّل منطقةُ النجاح بالقطاع الدائري ....

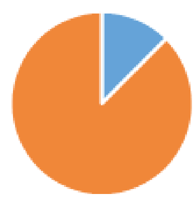
زاوية قطاع منطقة النجاح = ٨٥ ٪ × ٣٦٠° = ... (لماذا؟)



أتذكّرُ: القطاع الدائري هو: الجزءُ المحصورُ بين نصفيّ قطريْن وقوسٍ في دائرةٍ، وتُسمّى الزاويةُ المركزيّة المحصورةُ بين نصفيّ قطريْن فيه زاويةَ القطاعِ الدائريّ.

نشاط٣:

أتأمّلُ القطاعاتِ الدائريّة في الجدول الآتي، ثمّ أُكمل:

القطاع	الكسر الذي يمثّله طول القوس الأصغر	قياس زاوية القطاع الأصغر	نسبة طول قوس القطاع الأصغر إلى محيط الدائرة	نسبة مساحة القطاع الأصغر إلى مساحة الدائرة	نسبة قياس زاوية القطاع الأصغر إلى الدورة الكاملة
	$\frac{١}{٢}$	١٨٠°	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١٨٠^\circ}{٣٦٠^\circ} = \frac{١}{٢}$
		٩٠°	$\frac{١}{٤}$		$\frac{٩٠^\circ}{٣٦٠^\circ} = \ldots\ldots$
	$\frac{١}{٨}$			$\frac{١}{٨}$	

أتعلّم: إذا كانت (هـ) زاوية القطاع الدائري في دائرة، فإنّ:

$$\frac{\text{زاوية القطاع (هـ)}}{٣٦٠^\circ} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}}$$

نشاط٤:

قطاعٌ دائريّ في دائرةٍ نصفُ قطرِها ١٤سم، وطولُ قوسِه ١١سم، أجدُ قياسَ زاويةِ قطاعه.

$$\frac{\text{زاوية القطاع}}{٣٦٠^\circ} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{٢\text{نق}\ \pi}$$

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{٢\text{نق}\ \pi} \times ٣٦٠^\circ$$ (لماذا) ؟

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{١١}{٢\times١٤\times\frac{٢٢}{٧}} \times ٣٦٠^\circ$$

$$= \frac{١}{٨} \times ٣٦٠^\circ$$

زاوية القطاع = ...

أتعلّم: زاوية القطاع الدائري = $\frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} \times ٣٦٠^\circ$.

نشاط٥:

رُسِمَ قطاعٌ دائريّ في دائرةٍ نصفُ قطرِها ٣,٥سم، فكانت زاوية هذا القطاع ٣٠°، فما طول القوس المقابل للزاوية ٣٠°؟

$$\frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{زاوية القطاع}}{٣٦٠^\circ}$$

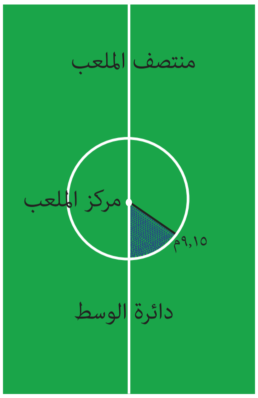
$$\text{طول قوس القطاع} = \frac{\text{زاوية القطاع}}{٣٦٠^\circ} \times \text{محيط الدائرة}$$ (لماذا؟)

$$\text{طول قوس القطاع} = \frac{٣٠^\circ}{٣٦٠^\circ} \times ٢\ \text{نق}\ \pi$$

$$= \frac{١}{١٢} \times ٢ \times ٣,٥\ \pi = \text{.....سم}$$

أتعلّم: طول قوس القطاع الدائري $= \frac{\text{زاوية القطاع}}{{}^\circ٣٦٠} \times$ محيط الدائرة.

نشاط٦:



أراد مهندسٌ إعادةَ تعشيبِ المنطقةِ التالفةِ من دائرة الوسط في ملعب كرة قدم، كما في الرسم التوضيحي المجاور. أُكملُ إيجادَ مِساحةِ القطاع الدائري المراد إعادةُ تعشيبه، علماً بأنّ نصفَ قطرِ دائرةِ وسطِ الملعب = ٩,١٥م، وطول قوس قطاع المنطقة التالفة ٢٢م.

مساحة القطاع الدائري $= \frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} \times$ مساحة الدائرة (لماذا؟)

$= \frac{\text{طول قوس القطاع}}{٢ \times \text{نق}\ \pi} \times \text{نق}^٢ \times \pi$

$= \frac{١}{٢} \times$ طول قوس القطاع $\times$ نق (لماذا؟)

$= \frac{١}{٢} \times ٢٢ \times ٩,١٥$

$=$ ....م^٢

أتعلّم: مساحة القطاع الدائري $= \frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} \times$ مساحة الدائرة .

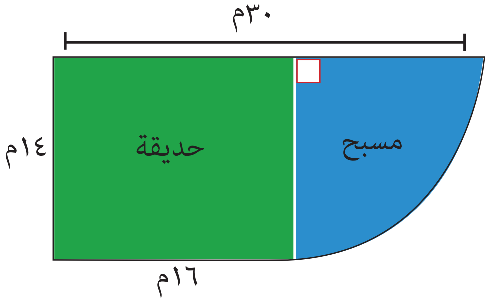
$= \frac{١}{٢} \times$ طول قوس القطاع $\times$ نق

تمارين ومسائل:

١) قطاعٌ دائريّ مساحتُه ٥٠ سم^{٢}، ونصفُ قطرِ دائرته ٧سم، فما طول قوس هذا القطاع؟

٢) ما قياسُ زاويةِ قطاعٍ دائريّ، نصفُ قطرِ دائرته ١٥سم، ومِساحتُه ٤٥٠سم^{٢}؟

٣) يُمثّلُ الشكلَ المجاورَ مخطّطَ مسبحٍ وحديقةِ منزل. أجدُ:

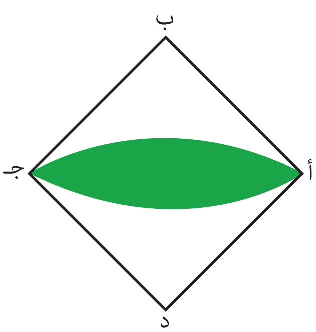


أ) مِساحةَ سطحِ المسبح.

ب) محيطَ الحديقةِ والمسبح.

٤) قطاعٌ دائريّ محيطُه ٢٥سم، ومِساحتُه ٣٦سم^{٢}، أجدُ نصفَ قطرِ دائرتِه، وطولَ قوسه.

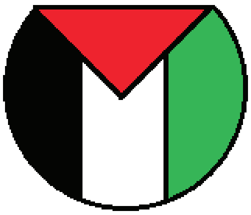
٥) رُسِمتْ دائرةٌ مركزُها النقطةُ ب، ونصفُ قطرِها ٧سم، ورُسمت دائرةٌ مركزُها د، ونصفُ قطرِها ٧سم، وتمّ تظليلُ المنطقةِ المحصورةِ بين الدائرتيْن، كما في الشكل المجاور، فما مِساحةُ المنطقةِ المظلّلة، علماً بأنّ أ ب جـ د مربعٌ طولَ ضلعِه ٧سم؟



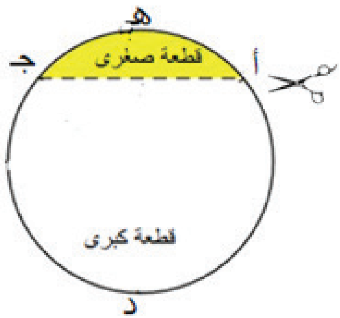
٦) يبلغ نصف قطر دائرة المنتصف في ملعب كرة القدم الخماسية ٣م، فما مساحة قطاع دائري رسم في دائرة الملعب ويقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° ؟

٦-٣ القطعة الدائريّة

نشاط١:



وزّعتْ معلّمةٌ طالباتِ الصفّ إلى مجموعات، وكلّفتْ كلَّ مجموعةٍ بتصميم شعارٍ، كما في الشكل المجاور، فكيف يمكن تصميمُ هذا الشعار؟ وماذا تُسمّى المنطقةُ المزيّنةُ بالعلم؟



أرسمُ دائرةً، ثمّ أُحدّدُ الوترَ أ جـ، كما في الشكل المجاور.

أقصُّ الشكل الدائريّ على الوتر أ جـ.

ألاحظُ أنّ سطحَ الدائرةِ انقسم إلى قطعتيْن: قطعة صغرى، وقطعة كبرى.

تُسمّى القطعةُ أ هـ جـ القطعةَ الدائريّة الصّغرى، فيما تُسمّى القطعةُ أ د جـ القطعةَ الدائريّةَ الكبرى.

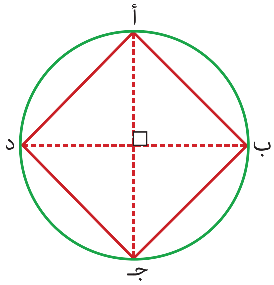
تُحدّدُ القطعة أ هـ جـ بالقوس أ هـ جـ والوتر أجـ.

أرسم علمَ فِلَسطينَ على القطعة الكبرى، فيتكوّن الشعار المطلوب.

أفكّرُ: كيف يمكن رسمُ قطعةٍ دائريّةٍ من قطاعٍ دائريٍّ معلوم؟

أتعلّم: يُسمّى الجزءُ المحصورُ بين قوسٍ ووترٍ يمرُّ بنهايتيّ ذلك القوس في الدائرة القطعةَ الدائريّة.

نشاط ٢:



كيف يمكنُ رسمُ مربّعٍ من دائرةٍ، نصفُ قطرِها ٣,٥سم؟

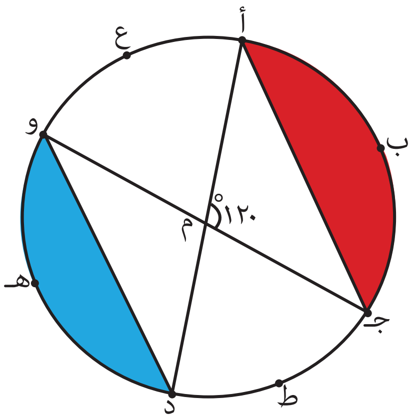
١) أرسم دائرةً نصفُ قطرِها ٣,٥سم.

٢) زاوية القطاع الدائري = $\frac{٣٦٠^\circ}{٤}$ = ٩٠° (لماذا؟)

٣) أرسمُ القطاعاتِ الدائريّة التي زاوية كلٌّ منها ٩٠°، أصل الأوتار: أ ب، ب جـ، جـ د، د أ.

٤) أقصُّ الشكلَ على الأوتار: أ ب، ب جـ، .....، .....، فينتج المربّع أ ب جـ د.

نشاط ٣:



أتأمّل الشكل المجاور، ثم أُكمل:

- زاوية القطعة الدائرية أ ب جـ = زاوية القطاع الدائري أ م جـ ب

= ١٢٠° (لماذا؟)

- زاوية القطعة الدائرية د هـ و = زاوية القطاع الدائري ....

= ....

- زاوية القطعة الدائرية جـ ط د = ...

أتعلّم: زاوية القطعة الدائريّة تساوي زاويةَ القطاعِ الدائريّ المشتركة معه في القوس نفسه.

نشاط ٤:

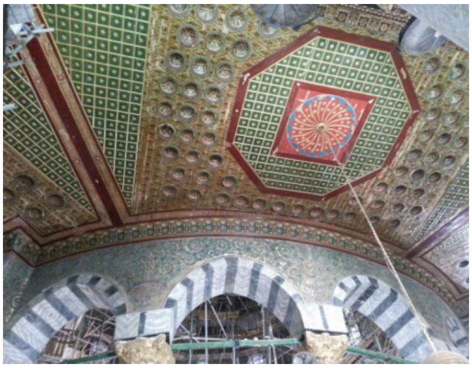
أجدُ زاويةَ قطعةٍ دائريّةٍ في قطاعٍ دائريّ، طولُ قوسِه ٥,٦ π سم، ونصفُ قطرِ دائرتِه ٧سم.

زاوية القطعة الدائريّة = زاوية القطاع الدائري = $\frac{\text{طول قوس القطاع}}{٢ \times \text{نق}\ \pi} \times ٣٦٠^\circ$

= $\frac{٥,٦\ \pi}{٢\ (٧)\ \pi} \times ٣٦٠^\circ$ = ...

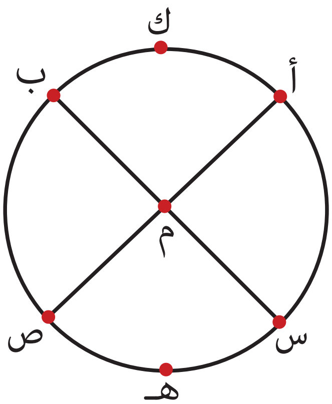
تمارين ومسائل

١) أجدُ طولَ قوسِ قطعةٍ دائريّةٍ في دائرةٍ نصفُ قطرِها ٢١ سم، وقياسُ زاويةِ قطاعِها ٣٦°.



٢) يبيّن الشكلُ المجاورُ صورةَ زخرفةٍ من سقفِ قبّةِ الصّخرة المشرّفة، والتي تتضمن شكلاً ثمانياً منتظماً، أرسم شكلاً ثمانياً منتظماً داخل دائرة قطرها ١٠سم.

(إرشاد: أجد قياس زاوية القطعة الدائرية).

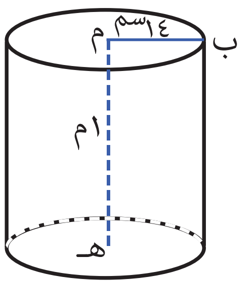


٣) رُسمَ قطران في دائرة مركزها م، كما في الشكل المجاور فإذا كانت مساحة القطعة الدائرية أ ك ب = ٥سم^{٢}، وكانت مساحة القطاع الدائري ص م س هـ = ١١سم^{٢}، فما مساحة المثلث م س ص.

٦-٤ الأسطوانة

نشاط ١:

يضمُّ المسجد الإبراهيميّ في مدينة الخليل الغارَ الشريف ، الذي تتمُّ إضاءتُه بقناديلِ الزيت عبرَ فتحةٍ أسطوانيّة، القسم العلوي عليه غطاءٌ دائريّ، قطرُه ثمانيةٌ وعشرون سنتمتراً، والقسم السفلي قطرُهُ مماثلٌ للعلويّ، وارتفاع الصّخرةِ التي توجد فيها الفتحةُ مترٌ تقريباً، فما عناصر الأسطوانة؟

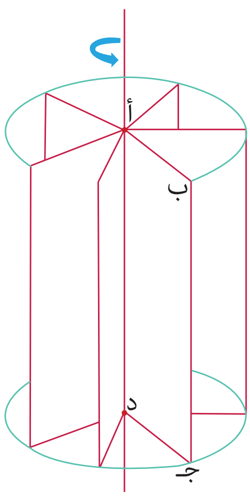


- أرسمُ رسماً توضيحيّاً كما في الشكل المجاور.

- نصف قطر قاعدة الأسطوانة = م ب = ...سم

- ارتفاع الأسطوانة = م هـ = ...سم

نشاط ٢:



١) أقصّ من الورق المقوّى مستطيلاً، طوله ٧سم، وعرضه ٤سم.

٢) أُحضرُ عوداً يزيد طولُه عن بعديّ المستطيل، ثم أُلصقُ العودَ على أحد أضلاعِ المستطيل.

٣) ألفُّ العودَ بسرعةِ دوْرةٍ كاملة.

٤) يُسمّى المجسّمُ الناتجُ عن دوران المستطيل حول العود أسطوانةً دائريّةً قائمة .

٥) يُسمّى العودُ (أ د) محورَ الدوران، ويُسمّى $\overline{\text{ب جـ}}$ مولّدَ سطحِ الأسطوانة.

ألاحظ أنّ ارتفاع الأسطوانة = عرض المستطيل = ٤سم،
ونصف قطر الأسطوانة = طول المستطيل = ٧سم.

أتعلّم: الأسطوانة الدائريّة القائمة: هي المجسّمُ المتولّدُ من دوران المستطيل دورةً كاملةً حول أحدِ أضلاعِه.

نشاط٣:


الشكل (١)

١) أحضر علبة معدنية أسطوانية مغلقة من القاعدتين، وأرسم مولداً لهذه الأسطوانة.

٢) أحضر قطعة كرتون مستطيلة الشكل، بحيث يكون عرضها مساوياً لطول مولد الأسطوانة، وأضعها على سطح مستوٍ.

٣) أثبت مولد الأسطوانة عند حافة قطعة الكرتون كما في الشكل (١).

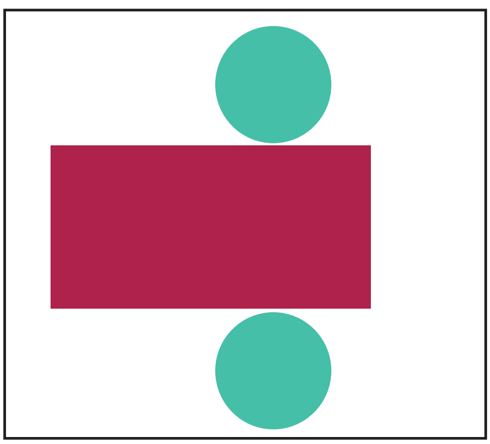
٤) أدور الأسطوانة على قطعة الكرتون حتى يعود مولد الأسطوانة ملامساً لسطح القطعة.

٥) أحدد المنطقة التي دارت عليها الأسطوانة.

٦) أقص المنطقة المستطيلة الناتجة والتي طولها يساوي محيط قاعدة الأسطوانة، وعرضها يساوي ارتفاع الأسطوانة.

٧) أرسم قاعدتي الأسطوانة، وأقصهما.

فتكون شبكة الأسطوانة كما في الشكل (٢).


الشكل (٢)

أتعلّم: شبكةُ الأسطوانةِ الدائرية القائمة: هي مستطيلٌ طولُ أحد أضلاعِه محيطُ القاعدة ، وطولُ الضّلع الآخر للمستطيل ارتفاعُ الأسطوانة ، ودائرتان متطابقتان. تُسمّى الدائرتان قاعدتيّ الأسطوانة.

أفكّرُ: هل يمكن التوصل إلى شبكة الأسطوانة بطرق أخرى؟

نشاط٤:

يُرادُ بناءُ أسطوانةٍ مفتوحةٍ من القاعدتين من مستطيلٍ، طولُه يساوي ٧ π سم، وعرضُه ٣سم، فما المِساحةُ الجانبيّة للأسطوانة؟

ارتفاع الأسطوانة = عرض المستطيل = ٣سم.

محيط قاعدة الأسطوانة = طول المستطيل = ٧ π سم (لماذا؟)

المساحة الجانبيّة للأسطوانة = محيط قاعدة الأسطوانة × الارتفاع (لماذا؟)

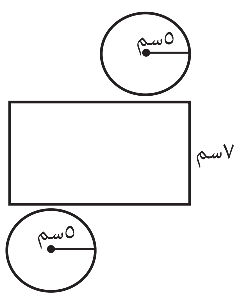
= ٧ π × ٣

= ......سم^٢

أتعلّم: المِساحةُ الجانبيّةُ للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢نق π × الارتفاع.

نشاط٥:

معتمداً على شبكة الأسطوانة المبيّنة في الشكل المجاور، أجدُ المِساحةَ الكليّة لهذه الأسطوانة.



المِساحة الجانبيّة للأسطوانة = مساحة المستطيل.

= محيط الدائرة × ارتفاع الأسطوانة (لماذا؟)

= ٢ نق π × ٧

= ٢ × ٥ × ٧ × π = ...سم^٢

مساحة قاعدة الأسطوانة = مساحة الدائرة.

= نق^٢ × π = ...سم^٢

المساحة الكليّة للأسطوانة = المساحة الجانبيّة للأسطوانة + مساحة القاعدتيْن

= ٧٠ π + ٢ × مساحة الدائرة

= ٧٠ π + ٥٠ π = ...سم^٢

أتعلّم: المِساحة الكليّة للأسطوانة = المساحة الجانبيّة + مساحة القاعدتين.

= ٢نق π ع + ٢نق^{٢}π

نشاط٦:

ما المِساحة الكليّة لأسطوانةٍ نصفُ قطرِ قاعدتِها ٣,٥سم، وارتفاعها ٨سم؟

المساحة الكليّة للأسطوانة = ٢نق π ع + ٢نق^{٢}π

= ٢(٣,٥) π (٨) + ٢(٣,٥)^{٢} π

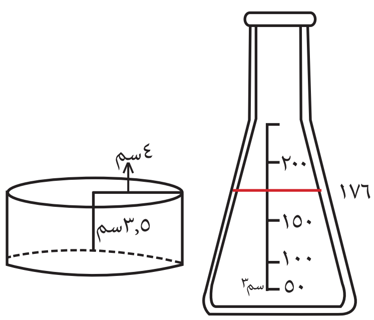
= ٥٦ π + ٢(١٢,٢٥) π

= ٥٦ π +....

= ....سم^{٢}

نشاط٧:

وعاءٌ على شكل أسطوانةٍ نصفُ قطرِ قاعدتِه ٤سم ، وارتفاعُه ٣,٥سم، مُلِئ بالماء، وأُفرِغَ في مدرجٍ مخبريّ لقياس الحجم، فأشار التدريج إلى أنّ حجم الماء في الأسطوانة ١٧٦سم^{٣}، كما في الشكل التوضيحي المجاور.



ما العلاقة بين حجم الماء في الأسطوانة وحاصل ضرب مساحة قاعدتها في ارتفاعها؟

مساحة القاعدة × الارتفاع = نق^{٢} π × ع

= (٤)^{٢} × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣,٥ = ... × ١١ (لماذا؟)

= ١٧٦سم^{٣}

ألاحظ أنّ: حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع.

أتعلّم: حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع.

= نق^{٢} π × ع

نشاط٨:

زجاجة من عسل النحل إسطوانية الشكل، مساحةُ قاعدتِها ٣٣سم^{٢}، وارتفاعها١٠سم، أجد حجم الزجاجة.

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع.

= ٣٣ × .....

= ....سم^{٣}

نشاط٩:

تُستخدَمُ الرّحى في طحنِ الحبوب؛ يتكوّن الجزءُ السفليّ منها من أسطوانةٍ، قطرُ قاعدتِها ٥٠سم، وارتفاعُها ٥سم، تُثبَّتُ فيها قطعةٌ من الخشب أسطوانيّةُ الشكل، قطرُها ٦سم، أجدُ حجمِ حجرِ الرّحى السّفليّ.

حجم الرّحى السفلي = مساحة قاعدة الرّحى× ارتفاع الرّحى.

= نق^{٢} × π × .... (نق: نصف قطر قاعدة الرّحى)

= (٢٥)^{٢} × π × ....

= ٦٢٥ π × ....

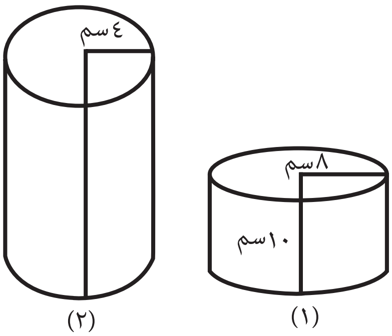
= ....سم^{٣}

تمارين ومسائل

١) أسطوانةٌ قائمةٌ، محيطُ قاعدتِها ٢٠ π سم، وارتفاعها ١٠سم، أجدُ مِساحتَها الجانبيّة.

٢) علبة إسطوانية الشكل ارتفاعُها ١٠سم، وحجمها ٢٥٠ π سم^{٣} ، فما نصفُ قطرِ قاعدةِ هذه العلبة؟

٣) معتمداً على الشكل المجاور، ما ارتفاع الأسطوانة الثانية، بحيث يكون للأسطوانتيْن الحجم نفسه؟



٤) يُراد طَلْيُ خزّانٍ وقودٍ أسطوانيّ الشكل بالدّهان من الخارج ، نصفُ قطرِ قاعدتِه ١,٥م، وارتفاعُه ١٢م، فما تكلفةُ طلاءِ الخزّان، إذا كانت تكلفةُ المتر المربّع الواحد ٧ دنانير؟

٥) وعاءان لتخزين الزيت الأول على شكل إسطوانة قطرها ١٤سم وارتفاعها ١٤سم، والثاني على شكل مكعب طول ضلعة ١٤سم، فأي الوعائين يتسع لكمية أكبر من الزيت؟

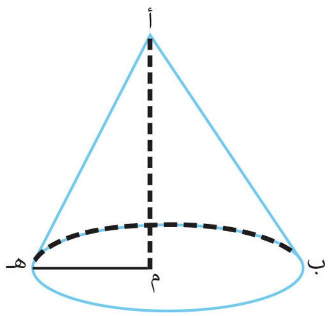
٦) علبةُ صابونٍ على شكل أسطوانةٍ قائمة، حجمها ٣٢٠ π سم^{٣}، فإذا كان نصفُ قطرِها ٨سم، فكم يبلغ ارتفاعُ هذه العلبة؟

٦-٥ المخروط

نشاط ١:

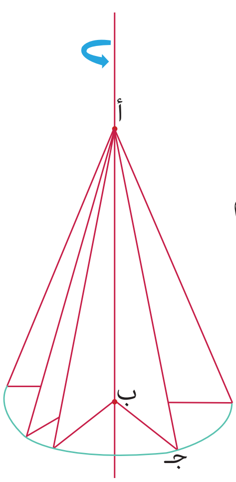
يشتهرُ الجليلُ الأعلى بالغطاءِ النباتيّ، وتكسو العديدَ من مرتفعاتِه الأشجارُ الحرجيّة، ومن أبرزها أشجارُ الصّنوْبر، هذا وتُسمّى ثمرةُ شجرةِ الصّنوْبر المخروطَ الصّنوْبري، فما المخروط؟
وما أهمُّ عناصر المخروط؟

- أرسمُ رسماً توضيحيّاً كما في الشكل الآتي.



- تُسمّى أ رأسَ المخروط، وتُسمّى النقطة .... مركزَ دائرة قاعدة المخروط.
- تمثّلُ القطعة المستقيمة .... نصف قطر المخروط.
- يُسمّى $\overline{\text{أ م}}$ ارتفاعَ المخروط، فيما يُسمّى $\overline{\text{أ ب}}$ راسمَ المخروط.

نشاط ٢:



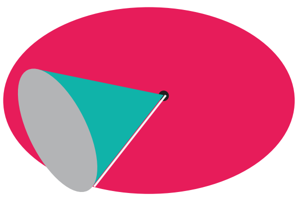
- أرسم مثلّثاً قائمَ الزّاوية على ورق كرتونٍ مقوّى، ثمّ أقصُّ المثلث.
- أُحضرُ عوداً بطولٍ مناسبٍ، ثم أُلصِقُ هذا العودَ على أحدِ أضلاعِه القائمة.
- ألفُّ العودَ بسرعةٍ، وألاحظ أنّ المجسّمَ الناتجَ عن دوران المثلث القائم حول العود، هو مخروطٌ دائريٌّ قائم.
- يُسمّى $\overline{\text{أجـ}}$ راسمَ المخروط (مولّد المخروط).
- يُسمّى $\overline{\text{أب}}$ محورَ الدوران (ارتفاع المخروط).

أتعلّم: المخروط القائم: هو المجسّمُ المتولّدُ من دوران مثلّثٍ قائمِ الزّاوية دورةً كاملةً حول أحدِ ضلعيّ القائمة.

راسم المخروط القائم: قطعةٌ مستقيمةٌ تصلُ رأسَ المخروطِ وأيّةَ نقطةٍ تقعُ على دائرةِ قاعدتِه.

ارتفاع المخروط القائم: العمودِ النّازلِ من رأسِ المخروطِ على قاعدةِ المخروط.

نشاط٣:

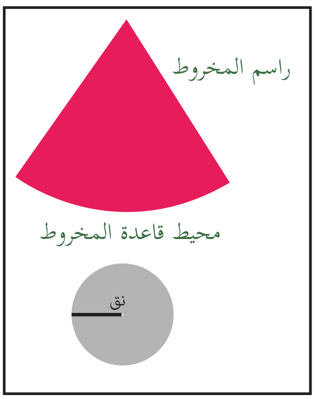


الشكل (١)

١) أُحضرُ مخروطاً مُغلَقاً من القاعدة وأرسم مولداً لهذا المخروط.

٢) أرسمُ دائرةً نصفُ قطرِها يساوي طولَ راسمِ المخروط.

٣) أضعُ المخروطَ على سطح الدائرة، بحيث يكون المولّدُ (الراسم) منطبقاً على نصف قطر الدائرة، ورأس المخروط في مركز الدائرة كما في الشكل (١).



الشكل (٢)

٤) أُدوّرُ المخروطَ إلى أنْ يعودَ المولّدُ ملامساً لسطح الدائرة من جديد.

وألاحظُ أنّ الشكلَ الناتجَ عن دورانِ المخروط دورةً كاملةً هو قطاعٌ دائريّ.

٥) أقصُّ الشّكلَ الناتجَ.

٦) أرسم قاعدة المخروط وأقصّها، فتكون شبكة المخروط كما في الشكل (٢).

أتعلّم: شبكةُ مخروطٍ دائريَ قائم تتكوّنُ من قطاعٍ دائريٍّ نصفُ قطرِ دائرته يساوي راسمَ المخروط، ودائرةٍ نصفُ قطرِها يساوي نصفَ قطرِ قاعدةِ المخروط.

طول راسم المخروط = نصف قُطر القطاع الدائري،

محيط قاعدة المخروط = طول قوس القطاع الدائري.

نشاط٤:

أجدُ المِساحةَ الجانبيّة لمخروطٍ دائريّ قائم، قُطرُ قاعدتِه ٢م، وطول راسمه ٣,٥م.

المساحة الجانبيّة للمخروط = $\frac{١}{٢}$ × نصف قطر دائرة القطاع × طول قوس القطاع

= $\frac{١}{٢}$ × ل × ٢ × نصف قطر الدائرة × π، حيث ل: راسم المخروط. (لماذا؟)

= ل نق π، حيث نق : نصف قطر قاعدة المخروط. (لماذا؟)

= ٣,٥ × ١ × ....

= ....م^{٢}

أتعلم: المساحة الجانبية للمخروط = ل نق π، حيث ل: راسم المخروط،
نق: نصف قطر قاعدة المخروط.

نشاط٥:

مخروطٌ دائريّ قائم، نصفُ قطرِ قاعدتِه ٩سم، وارتفاعُه ١٢سم، فما مِساحتُه الجانبيّة؟

ل^{٢} = نق^{٢} + ع^{٢} ومنها ل^{٢} = (٩)^{٢} + (...)^{٢}

أي أنّ: ل^{٢} = ... + ١٤٤، ومنها: ل^{٢} = ٢٢٥ ، ومنها: ل = ١٥سم

المساحة الجانبيّة للمخروط = ل نق π

= ١٥ × ٩ × π

= ...سم^{٢}

نشاط٦:

أُبيّنُ أنّ المساحةَ الكليّة لمخروطٍ دائريّ قائم، طولُ نصفِ قطرِ قاعدتِه ٧سم، وطولُ راسمِه ٢٠ سم، تساوي ٥٩٤سم^{٢}.

المساحة الجانبيّة للمخروط = ل نق π

= ٢٠ × ٧ × ... = ٤٤٠سم^{٢}

مساحة قاعدة المخروط = نق^{٢} π

= ٧ × ٧ × $\frac{٢٢}{٧}$

= ....سم^{٢}

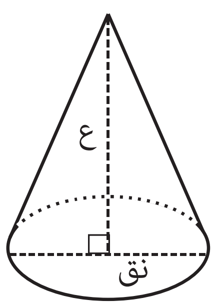
المساحة الكليّة = المساحة الجانبيّة + مساحة القاعدة

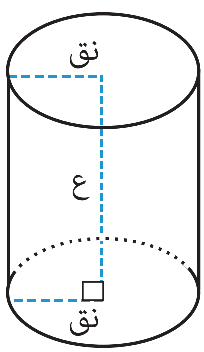
= ٤٤٠ + ١٥٤

= ....سم^{٢}

نشاط٧:

- أُحضرُ مخروطاً، وأسطوانةً مشتركيْن في القاعدة والارتفاع.
- أملأُ المخروطَ بالرمل.
- أُفرغُ الرمل في الأسطوانة.
- أكرّرُ حتى تمتلئ الأسطوانة.
- ألاحظ أنّ عددَ المخاريط التي تملأ الأسطوانة = ٣.





أي أنّ: حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × حجم الأسطوانة.

أتعلّم: حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × حجم الأسطوانة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع.

= $\frac{١}{٣}$ نق^{٢} π ع

نشاط٨:

أعلنتْ شركةٌ عن إمكانيّةِ إنشاءِ مشروعِ عملِ صوامعَ لتخزين الحبوب، ذات قاعدةٍ مخروطيّةٍ، نصفُ قطرِ قاعدتها ٣م، وارتفاعُها ٤م. أجدُ حجمَ الصومعةِ، علماً بأنّ ارتفاعَ الصومعةِ الكليّ ١٢م .

ارتفاع الأسطوانة = الارتفاع الكلي – ارتفاع المخروط.

= ١٢ – ...

= ...م

حجم الصومعة = حجم الأسطوانة + حجم المخروط.

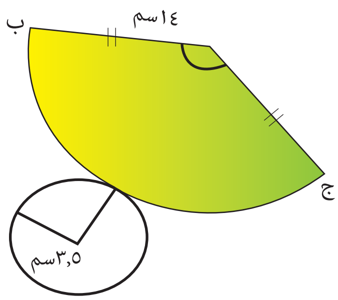
= نق^{٢} × ارتفاع الأسطوانة × π + $\frac{١}{٣}$ × نق^{٢} × ارتفاع المخروط × π

= ٩ × ٨ π + $\frac{١}{٣}$ × ٩ × ٤ × π

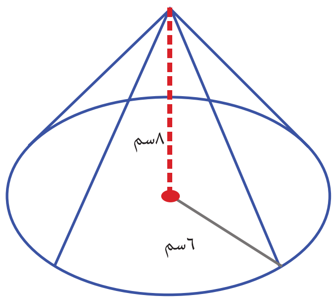
= ٧٢ π + ١٢ π

= ...م^{٣}

تمارين ومسائل



١) الشكل المجاور يمثّلُ شبكةَ مخروط، أجدُ طولَ $\overset{\frown}{\text{ب ج}}$.



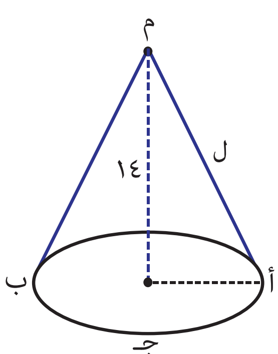
٢) أجدُ حجمَ المخروطِ الموضّح في الشكل المقابل.

٣) مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤سم ومساحته الجانبية ٦٢,٨سم٢، معتبراً (π = ٣,١٤)، أجد:

١- ارتفاع المخروط.

٢- طول راسم المخروط.

٤) أجدُ حجمَ الماءِ الذي يملأُ الكأسَ في الشكل المجاور، علماً بأنّ محيطَ الحافّةِ العلويّة ٧ π سم، وارتفاعَ المخروط ١٠سم (الماء يملأ الجزء المخروطي فقط).



٥) الشكل المجاور مخروط فيه أ ب قطرُ القاعدة، طولُ القوس $\overset{\frown}{\text{أ جـ ب}}$ يساوي ٧ π سم، ارتفاعُ المخروط يساوي ١٤سم، أجدُ المِساحةَ الكليّة للمخروط.

٦-٦ تمارين عامّة

١) أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ بماذا تحدّد القطعةُ الدائريّةُ؟

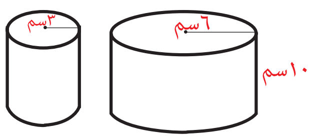
أ) نصفيّ قطريْن وقوسٍ محصور بينهما. ب) وترْين وقوسٍ محصور بينهما.

جـ) قوسٍ ووترٍ يمر بنهايتيّ القوس. د) نصفي قطرين ووتر في الدائرة.

٢ رُسمَ شكلٌ سداسيٌّ منتظَمٌ في دائرةٍ نصفُ قطرِها ١٤سم، ما قياسُ زاويةِ القطاع الدائري المقابلة لأحد أضلاع الشكل السداسي؟

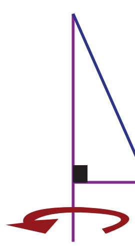
أ) ٤٥° ب) ٦٠° جـ) ٩٠° د) ١٢٠°

٣ قرّرَ مصنعٌ مضاعفةَ نصفِ قطرِ علبةِ البندورة، كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور، كم يتضاعف حجم العلبة؟



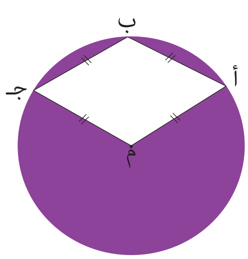
أ) ضعفين. ب) ٣ أضعاف. جـ) ٤ أضعاف. د) ٦ أضعاف.

٤ معتمداً على الرسم التوضيحيّ المجاور، ما ارتفاعُ المخروطِ الناتج عن دوران مثلثٍ قائمِ الزّاوية، طولُ وترِه ١٠سم، وطول قاعدته ٦سم؟



أ) ٦ سم ب) ٨ سم جـ) ١٠ سم د) ١٦ سم

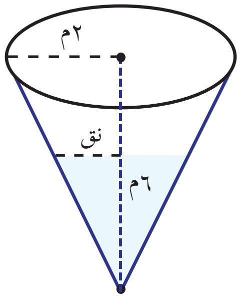
٢) أجدُ مِساحةَ المنطقةِ المظلّلةِ في الشكل المجاور، علماً بأنّ مِساحةَ الدائرة ٦٤ π سم^2، م مركز الدائرة.



٣) قامت جمعيّةٌ فِلَسطينيّةٌ بعملِ أطباقِ تزيينٍ للساعات؛ للمشاركة في مَعْرِضِ التّراثِ الفلسطينيّ "كي لا ننسى". أجدُ مِساحةَ المنطقةِ التي يغطيها عقربُ دقائق، طولُه ٢١سم خلال ٢٠ دقيقة من الحركة.

٤) أرادت طالباتُ الصّفِّ الثّامنِ تصميمَ ثُريّا من أعواد، عَرْضُ العودِ الواحد ١سم، كما في الشكل المجاور، إذا كان عددُ الأعواد في كلّ أسطوانةٍ يتبع النمطَ الآتي: ٢٢، ٤٤، ٦٦،..........، فما طولُ نصفِ قطرِ الأسطوانةِ السّادسة في الثّريّا؟

٥) أسطوانةٌ دائريّةٌ قائمةٌ مملوءةٌ بالماء، قطرُ قاعدتِها ٢٠سم، وارتفاعُها ١٠سم، فُرّغَ ما فيها من ماءٍ في إناءٍ فارغٍ على شكلِ مخروطٍ دائريٍّ قائم، نصفُ قطرِ قاعدتِه ٣٠سم، فكم يكونُ ارتفاعُ الماءِ فيه؟



٦) إذا علمتَ أنّ خطَّ الإستواء هو دائرةٌ نصفُ قطرِها ٦٦٥٠كم، فما المسافةُ بين مدينتيْن على خط الاستواء التي تقابلُ زاويةً مقدارُها ٥٧° عند مركز الأرض؟

٧) بئر ماء على شكل مخروط كما في الشكل المجاور، ارتفاعه ١٠م ونصف قطره ٢م، إذا كان حجم الماء فيه $\frac{٣}{٤}$ حجمه الأصلي وارتفاع الماء ٦م، احسب نق.

أقيم ذاتي:

أعبر بلغتي عن المفاهيم التي كانت اكثر متعة في هذه الوحدة.

مشروع الوحدة:

يعتبر الحق في الحصول على الماء من الحقوق الأساسية للأفراد، تعاني التجمعات السكانية في فلسطين من إنقطاع المياه لفترات مختلفة.

أتعاونُ مع أفرادِ مجموعتي في اقتراحِ خزّانِ ماءٍ، يلبّي احتياجاتِ إحدى الموسّسات في مكانٍ سكنيّ (مدرسة، مسجد، جمعية، ...)، وأُوضّحُ الفرقَ في التكاليفِ اللّازمةِ لبناءِ الخزّان، إذا كان مجسّمُ الخزّانِ على شكل متوازي مستطيلات، أو على شكل أسطوانة ومصنوعان من نفس المعدن.

روابط الوحدة:
http://mawdoo3.com
http://www.mathgoodies.com/lessons/vol2/geometry.html

النسب المثلثية

الوحدة ٧

عـن المنطقـة السّـهليّة المجـاورة.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف النسب المثلثية في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١- تَعَرُّف النِّسَبِ المُثَلَّثِيّة الأساسيّة للزّاوية الحادّة.

٢- إيجاد النِّسَب المُثَلَّثِيّة الأَساسيّة لأيّ زاوية حادّة .

٣- استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النِّسَب المُثَلَّثِيّة لزاوية حادّة.

٤- تَعَرُّف العَلاقة بين جيب الزّاوية وجيب تمام متمِّمتها.

٥- استنتاج النِّسَب المُثَلَّثِيّة لزوايا خاصّة.

٦- تعريف زاويتَي الارتفاع والانخفاض.

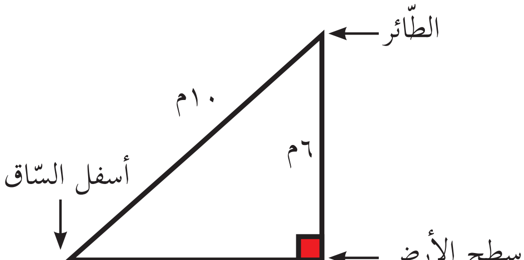
٧- توظيف النِّسَب المُثَلَّثِيّة وزوايا الارتفاع والانخفاض في حلّ مسائلَ حياتيّة.

٧-١ النِّسَب المُثَلَّثِيّة للزوايا الحادّة (١)

نشاط ١:

طائرُ الحُرِّيَّةِ تشبهُ ألوانُهُ في تنسيقِها ألوانَ عَلَمِ فِلَسْطين، فإذا وقفَ طائرُ الحُرِّيَّةِ على غُصْنِ شَجَرَة، بحيثُ يرتفعُ ٦م عن سطحِ الأرض، فما نسبةُ ارتفاعه هذا إلى بُعْدِهِ عن أسفلِ ساقِ الشَّجَرَةِ البالغِ ١٠م؟

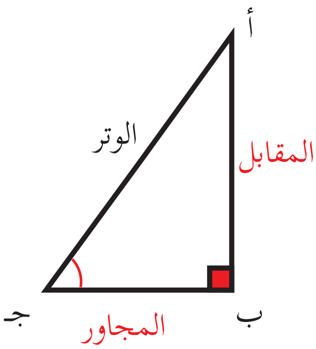
أتأمَّلُ الرَّسمَ التّوضيحيَّ المجاور، وأُكْمِل:



النِّسَبةُ المشارُ إليها = $\frac{\text{ارتفاع الطائر عن سطح الأرض}}{\text{بعد الطائر عن أسفل السّاق}}$

= $\frac{\dots}{\dots}$

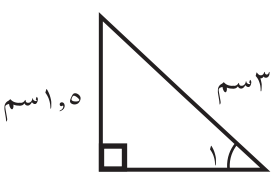
وهل تختلف هذه النِّسَبة إذا كان ارتفاع الطّائر عن سطح الأرض٣م، وكان بُعْدُهُ عن أسفلِ ساقِ الشّجرة ٥م؟

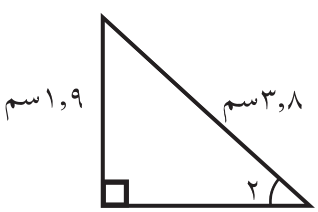


تعريف١: في المثلثِ أ ب جـ القائم الزاوية في ب، يُسَمّى الضِّلعُ أ جـ وَتَرَ المثلث، فيما يُسمّى الضلع أ ب المقابل للزاوية جـ، بينما يُسمى الضلع ب جـ المجاور للزاوية جـ.

نشاط ٢:

أتأمَّلُ المثلّثاتِ القائمةَ الآتيةَ الّتي فيها ∡ ١ = ∡ ٢ ، ثُمَّ أُكْمِل:

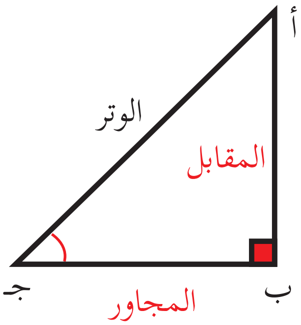




(للزّاوية ١): $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{١,٥}{٣} = \dots$

(للزّاوية ٢): $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dots\dots = \dots$

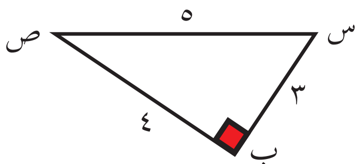
ماذا تُلاحِظ؟

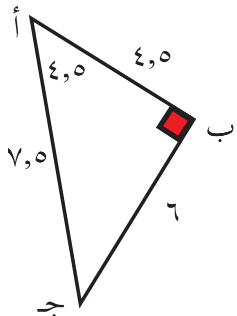


تعريف٢: في المثلثِ القائم في الزّاوية، يُعرَّفُ جيبُ الزّاويةِ الحادّةِ جـ (جاجـ) بأنَّهُ نسبةُ طولِ الضّلعِ المقابل للزّاويةِ جـ إلى طولِ الوَترِ في المُثلث؛ أي أن جاجـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

نشاط ٣:

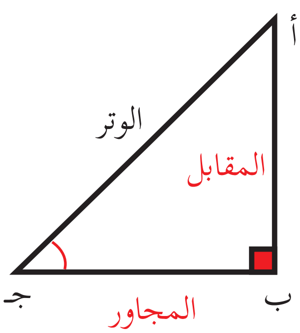
أتأمَّلُ المُثلّثاتِ القائمةَ الآتيةَ، وأُكْمِلُ الجدولَ الآتي:





الزّاوية	طولُ مقابلِها	طولُ الوَتَر	جيبُ الزّاوية
أ	٦	٧,٥	$\frac{٦}{...}$
جـ			
ص		٥	
س			

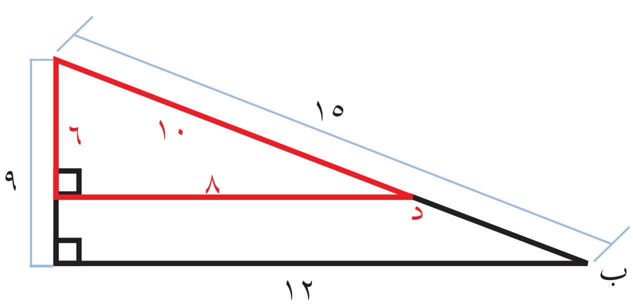
أُفكِّرُ، وأُناقِش: هل يمكنُ أن يزيدَ جيبُ الزّاويةِ الحادّةِ عن ١؟



تعريف٣: في المثلث القائم الزاوية في ب، يُعرفُ جيبُ تمام الزاوية جـ (جتاجـ): بأنه نسبةُ طول الضّلع المجاور للزّاوية جـ الى طول الوَتَر؛ أي أنّ جتاجـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

نشاط ٤:

أتأمَّلُ الشَّكْلَ المجاور، ثُمَّ أُكْمِل:

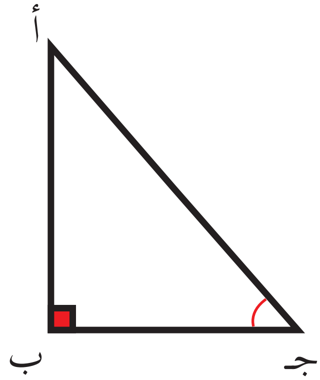


∡ ب = ∡ د (لماذا ؟)

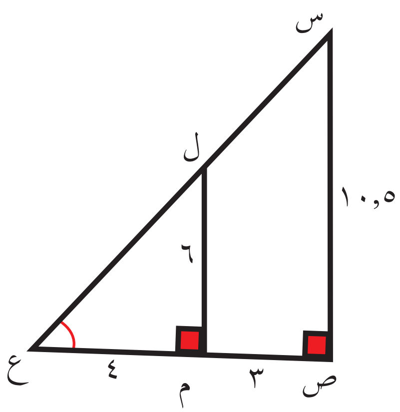
جتاد = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{...}{١٠}$

جتاب = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{...}{...}$ ماذا تُلاحِظ؟

تعريف٤: في المثلث القائم الزاوية في ب، يُعرفُ ظِلُّ الزّاوية الحادة جـ (ظاجـ): بأنه نسبةُ طولِ الضِّلع المقابل للزّاوية جـ الى طول الضلع المجاور لها؛ أي أنّ ظاجـ $= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$



نشاط ٥:



أتأمّلُ الشَّكْلَ المجاور، وَأَحْسِبُ ظِلَّ الزّاويةِ ع بطريقتين:

من المثلّث ل م ع

فإنّ ظاع $= \frac{\text{م ل}}{\text{ع م}}$

$= \frac{\dots}{\dots}$

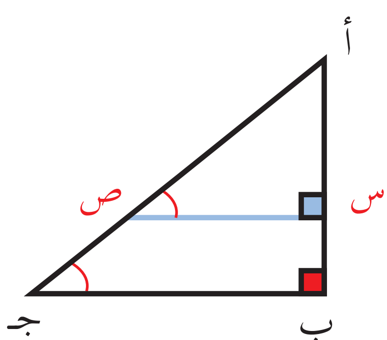
ومن المثلّث س ص ع

فإنّ ظاع = ...

= .....   (ماذا تلاحظ؟)

نشاط ٦:

أتأمَّلُ الشّكْلَ المجاور الّذي فيه أ س= ٤سم، س ص= ٥سم، ب جـ= ٧,٥سم، ثُمَّ أَجِدُ طول أ ب.



١) ∡ جـ = ∡ ص   (لماذا ؟)

ومنها: ظاجـ = ظاص

$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{س ص}}$

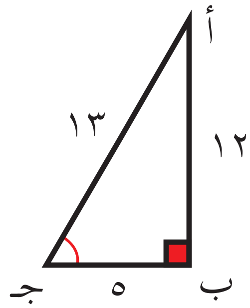
$\frac{\text{أ ب}}{٧,٥} = \frac{٤}{٥}$

ومنها: ٤ × ... = ٥ × ...

ومنها: أ ب = ... سم

نشاط ٧:

أتأمَّلُ الشّكْلَ المجاور، وَأَبْحَثُ عن العَلاقةِ بينَ ظاجـ، جاجـ، جتاجـ.



ظاجـ = $\frac{\cdots}{٥}$

جاجـ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جتاجـ = $\frac{٥}{١٣}$

= $\frac{١٢}{١٣} \div \frac{٥}{١٣}$

= $\frac{١٢}{١٣} \times \frac{\cdots}{\cdots}$

= ...

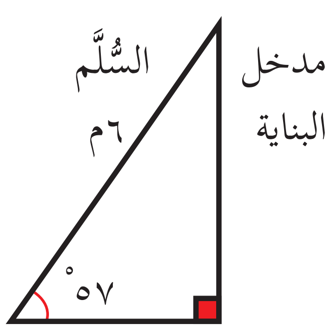
أَتَعَلَّم: لأي زاوية حادة جـ تسمى النسبُ: جاجـ، جتاجـ، ظاجـ، بالنسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ حيث ظاجـ = $\frac{\text{جاجـ}}{\text{جتاجـ}}$

نشاط ٨:

تريدُ لمى تركيزَ سُلَّمٍ طولُه ٦م على حائطٍ قائمٍ ، فإذا كانت الزّاوية المحصورة بين حافّة السُّلَّمِ وسطحِ الأرض ٥٧°، فما بُعْدُ أسفلِ السُّلَّمِ عن مدخلِ البناية (أعتبرُ جتا٥٧° = ٠,٥٤).

أَرْسُمُ رسماً توضيحيّاً، كما في الشّكل المجاور:

جتا٥٧°= $\frac{\text{بُعْدُ أسفلِ السُّلَّم عن حافّةِ البناية}}{\text{طولُ السُّلَّم}}$ (لماذا؟)

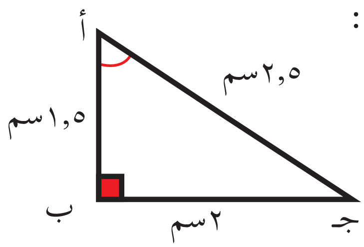


ومنها: ٠,٥٤= $\frac{\text{بُعْدُ أسفلِ السُّلَّم عن حافّةِ البناية}}{\text{... م}}$

ومنها: بُعْدُ أسفلِ السُّلَّم عن حافّةِ البناية = ...

تَمارينُ وَمَسائِل:

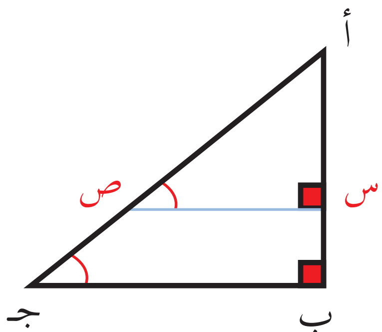
١) أَجِدُ النِّسَبَ المُثَلَّثِيّةَ الأَساسيّة للزّاوية أ، معتمداً على الشّكْلِ الآتي:



٢) أ ب جـ مثلّثٌ قائمُ الزّاويةِ في ب، فيه: أ ب = ٨سم، ب جـ = ٦سم، أ جـ = ١٠سم،

أَجِدُ كُلّاً من: جاأ، جاجـ، جتاأ.

٣) أتأمّل الشّكْلَ الآتيَ الَّذي فيه أ س = ٦سم، س ص = ٨سم، أ ب = ٩سم، ثم أَجِدُ طولَ الضِّلْعِ ب جـ.



٤) أ ب جـ مثلّثٌ قائمُ الزّاوية في ب، فيه أ ب = ٦سم، ب جـ = ٨سم. رُسم من النقطة هـ الواقعة على ب جـ عمود على أجـ في النقطة د، فإذا كان هـ د = ٣سم، دجـ = ٤سم، أجد كلاً من:

أ) جاأ ب) ظاهـ جـ) ظاجـ

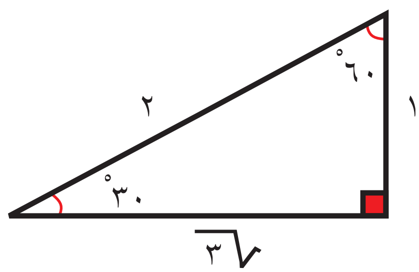
٧-٢ النِّسَبُ المُثَلَّثِيّة للزاويا الحادة (٢)

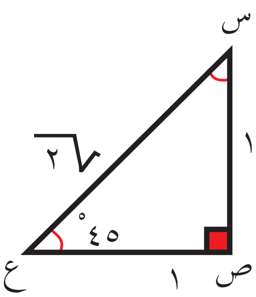
نشاط ١:

للعربِ والمسلمينَ إنجازاتٌ مهمّةٌ في عِلْمِ المثلّثات، فكان البَتّانيُّ أوَّلَ مَنِ استخدمَ مصطلحَي الجيبِ وجيبِ التّمام، فيما يُعَدُّ البَيْرونِيُّ من أهمِّ الّذينَ أَرْسَوا أُسُسَ عِلْمِ المُثَلَّثاتِ الحديث. فكيفَ يمكنُ إيجادُ النِّسَبِ المُثَلَّثِيّةِ للزّوايا الخاصّة ٣٠°، ٤٥°، ٦٠°؟

أتأمَّلُ المثلّثاتِ الآتيةَ، وأتَعاوَنُ مَعَ مجموعتي؛ لإكمالِ الجدولِ الآتي:

الزّاوية أ	جاأ	جتاأ	ظاأ
٣٠°	$\frac{١}{٢}$		
٦٠°		$\frac{١}{...}$	
٤٥°			





نشاط ٢:

مَعَ تَطوُّرِ الزَّمنِ، اخترعَ (بليز باسكال) الآلةَ الحاسبة، فكيفَ يُمكنُ استخدامَ الآلةِ الحاسبةِ في إيجادِ النِّسَبِ المُثَلَّثِيّةِ للزّاوية الحادّة؟

- يُكْتَبُ جيبُ الزّاوية س بالرّموز جاس، ويُكْتَبُ في الآلةِ الحاسبةِ (sinx).
- ويُكْتَبُ جيبُ تمامِ الزّاوية س بالرّموزِ جتاس ، وَيُكْتَبُ في الآلةِ الحاسبةِ (cosx).
- كما يُكْتَبُ ظِلُّ الزّاويةِ س بالرّموزِ ظاس، وَيُكْتَبُ في الآلةِ الحاسبةِ (tanx).

أَجِدُ النِّسَبَ المُثَلَّثِيّةَ الآتيةَ لأقربِ منزلتَيْنِ عشريَّتَيْنِ كُلّاً من: جا٢٥°، جتا٦٥°، ظا٤٥°.

أَضْغَطُ (sin)، ثُمَّ أُحَدِّدُ الزّاوية ٢٥°، فيظهرُ أنّ جا٢٥° = ٠,٤٢ .

أَضْغَطُ (cos)، ثُمَّ أُحَدِّدُ الزّاوية ٦٥°، فيظهرُ أنّ جتا٦٥° = ...

اضغط tan ثم أُحدّد الزّاوية ٤٥° فيظهر أن ظا٤٥° = ...

نشاط ٣:

أستخدمُ الآلَةَ الحاسبةَ لإيجادِ كُلٍّ من الآتية:

أ) جا٢٠° = ... ب) جتا٧٠° = ...

جـ) جا٦٥° = ... د) جتا٢٥° = ...

أتَعَلَّم: جيبُ الزّاوية = جيبُ تمامِ الزّاوية المُتمِّمة لها، والعكسُ صحيح، وبالرّموز: جاس = جتا(٩٠° – س)، جتاس = جا(٩٠° – س).

نشاط ٤:

إذا كان جا٤٣° = ٠,٦٨ ، جتا٥٦° = ٠,٥٦، أُكْمِلُ إيجادَ كُلٍّ ممّا يأتي:

أ) جتا٤٧° = جا(٩٠° – ٤٧°)

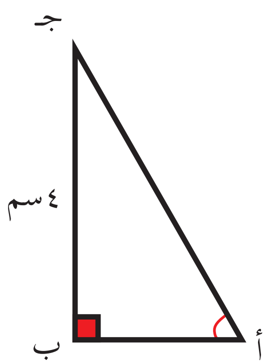
= جا... = ...

ب) جا٣٤° = جتا(٩٠° – ٣٤°)

= جتا... = ...

نشاط ٥:

أب جـ مثلّثٌ قائمُ الزّاويةِ في ب، فيه ب جـ = ٤سم، فإذا كانَ جاأ = ٠,٨، فما قيمة أ جـ؟



أَرْسُمُ رسماً توضيحيّاً، كما في الشّكْلِ المجاور:

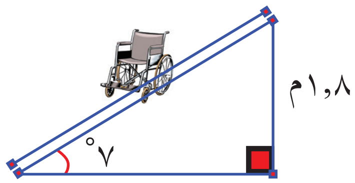
جاأ = ٠,٨ ، وأيضاً: جاأ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

ومنها: ٠,٨ = $\frac{٤}{\text{أ جـ}}$

٠,٨ أ جـ = ٤ ، ومنها: أجـ = ... سم

نشاط ٦:

صُمِّمَ مَمَرٌّ لذوي الإعاقة، بحيثُ يميلُ بزاويةٍ مقدارها ٧° عن المستوى الأُفُقيّ، فإذا كانَ ارتفاعُ نقطةِ نهايةِ المَمَرّ ١,٨م، فما طولُ هذا المَمَرّ؟



أَرْسُمُ شكْلاً توضيحيّاً، ومن الشّكْلِ أُلاحِظُ أنَّ:

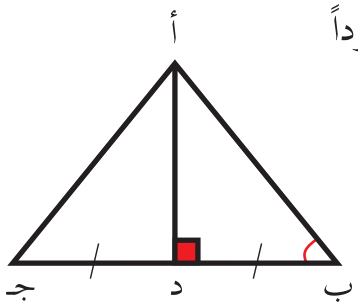
جا٧° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، ومنها:

طولُ المَمَرّ × ... = ١,٨ (لماذا؟)

طولُ المَمَرّ = ...م

نشاط٧:

أ ب جـ مثلّثٌ متساوي الأضلاع، طولُ ضِلْعِهِ ٨سم، فما ارتفاعُ هذا المُثَلّث؟



أَرْسُمُ مُثلّثاً متساوي الأضلاع، كما في الشّكْلِ المُجاور، وَأُنْزِلُ عموداً من الرَّأْسِ أ على القاعدةِ ب جـ.

طولُ ب د = ٤ سم (لماذا؟)

∡ ب = ٦٠° (لماذا؟)

ومنها: ظا٦٠° = $\frac{\text{أ د}}{٤}$

أد = ... سم

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أستخدمُ الآلَة الحاسبةَ لإيجادِ كُلٍّ من:

جا٣٣° ، جتا٧٠° ، ظا١٠°

٢) أَجِدُ القيمةَ العدديّةَ للمقدار: أ) جا٣٠° + ٢جا٦٠°

ب) جتا^{٢}٦٠° + جا^{٢} ٦٠°

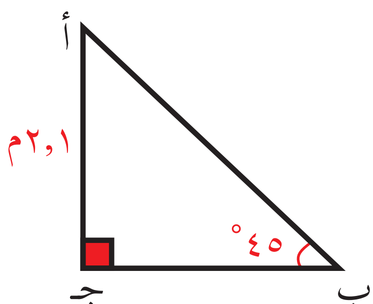
جـ) ٢(جا٤٥°)(جتا٤٥°)

د) $\dfrac{\text{جا٧٠°}}{\text{جتا٧٠°}}$

هـ) $\dfrac{\text{جا٤٠°}}{\text{جتا٥٠°}}$

٣) إذا كانَ جا١٥° = ٠,٢٦ ، جتا٥٠° = ٠,٦٤ ، أَجِدُ كُلّاً من:

أ) جتا٧٥° ب) جا٤٠°



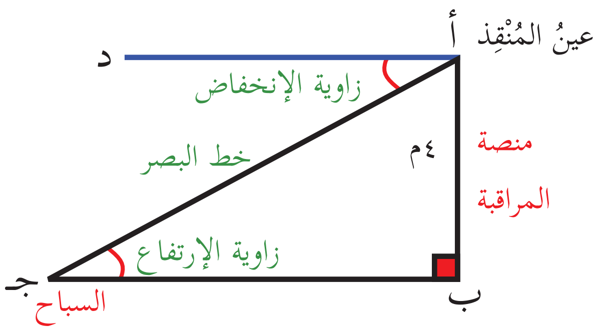
٤) يُوَضِّحُ الشَّكْلُ المُجاورُ مُثَلّثاً قائمَ الزّاويةِ في جـ، فإذا كانَ أ جـ = ٢,١ م ، ∢ ب = ٤٥°، فما محيطُ هذا المُثَلَّث؟

٥) يرتفعُ عمودٌ عن سطحِ الأرض ٤م، فما طولُ ظِلِّ ذلك العمود، عندما تميلُ أشعَّةُ الشَّمسِ بزاويةٍ مقدارُها ٣٠° عن المستوى الأُفُقيّ.

٣-٧ زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

نشاط ١:

يبلغُ طولُ السّاحلِ الفِلَسْطينيِّ على البَحْرِ المُتوسِّطِ من رأسِ النّاقورةِ شمالاً إلى رَفَح جنوباً ٢٢٤ كم، فإذا نظرَ مراقبُ إنقاذٍ يقفُ على مِنَصَّةٍ ارتفاعُها عن الشّاطئِ ٤م إلى سبّاحٍ أمامَهُ، يَبْعُدُ ٢٥م عن أسفلِ المِنَصّة، فماذا تُسَمّى الزّاويةُ الّتي نَظَرَ بها المراقب، وبماذا تختلفُ هذه الزّاويةُ عن تلكَ الّتي يَنظرُ بها السَّبّاحُ إلى المُراقب؟



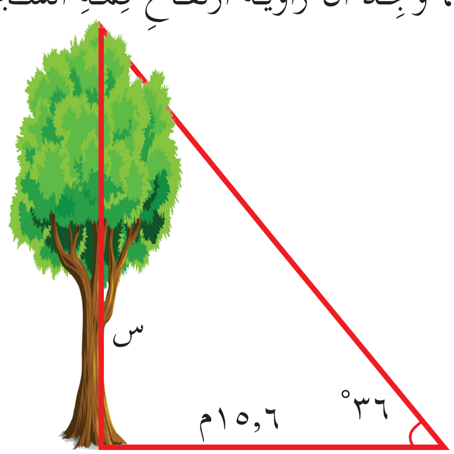
أَرْسُمُ رسماً توضيّحاً، كما في الشّكْلِ المجاور، بحيثُ تُمَثِّلُ القِطْعَةَ المستقيمةُ أ ج خَطَّ البصر، ومن الشّكْلِ المجاور يتّضحُ أنّ:

∢ د أ جـ = ∢ ب جـ أ (لماذا ؟)

تُسَمّى ∢ د أ جـ **زاويةَ الانخفاض**، وهي الزّاويةُ المحصورةُ بين المستوى الأُفُقيِّ للنَّظر، وَخَطِّ البصر تحت المستوى الأفقي، بينما تُسَمّى ∢ ب جـ أ **زاويةَ الارتفاع**، وهي الزّاويةُ المحصورةُ ....و.........

نشاط ٢:

من نقطةٍ تَبْعُدُ مسافةَ ١٥,٦ متراً من قاعدةِ شجرة، وُجِدَ أنّ زاويةَ ارتفاعِ قِمَّةِ الشَّجرةِ ٣٦°، فما ارتفاعُ هذه الشّجرة؟



أَرْسُمُ شكْلّاً توضيحيّاً، وأعتبرُ ارتفاعَ الشّجرةِ س

ظا٣٦° = $\frac{\text{س}}{١٥,٦}$

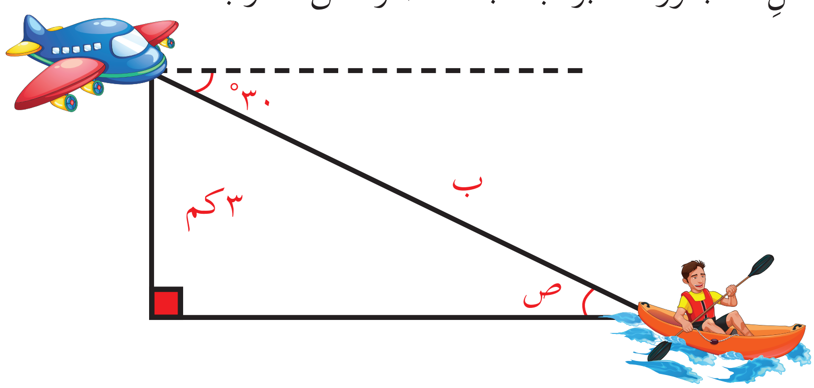
ومنها: س = ١٥,٦ × ٠,٧٣

س = ... م

نشاط ٣:

رصدَ طيّارٌ قارباً بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها ٣٠°، أَجِدُ البُعْدَ بينَ القاربِ والطّائرة، علماً أنّ الطائرةَ تُحَلِّقُ على ارتفاعِ ٣ كم فوق مستوى سطحِ البَحْرِ؟

أَرْسُمُ شكْلاً توضيحيّاً، كما في الشّكْلِ المجاور: أعتبرُ ب: بُعْد الطّائرة عن القارب.



ومنها: ص = ٣٠° (لماذا؟)

$\text{جا}٣٠° = \frac{٣}{\text{ب}}$

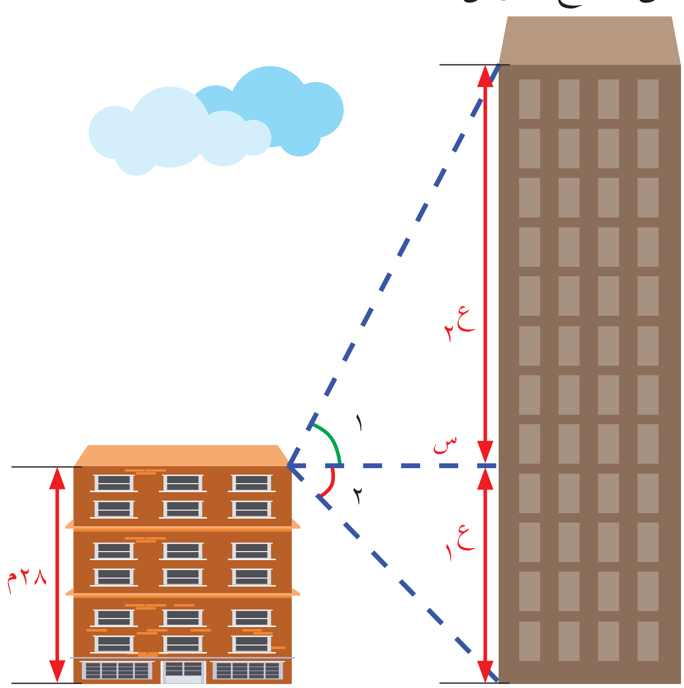
ومنها: ب × .... = ٣

ب = ... كم

نشاط ٤:

ثُبِّتَتْ كاميرا على سطحِ مبنى ارتفاعه ٢٨م قبالَة برجٍ عالٍ، رَصَدَتِ الكاميرا قِمَّةَ البُرْجِ بزاويةِ ارتفاعٍ مقدارُها ٥١°، وَرصدت أسفلَ البُرْجِ بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها ٣٢°، أَجِدُ:

١- البُعْد بينَ المبنى والبرج. ٢- ارتفاع البرج عن سطح الأرض.



أُمَثِّلُ المعطياتِ، كما في الشّكْلِ المجاور:

∢ ٢ = ٣٢° (لماذا؟)

ومنها: $\text{ظا}٣٢° = \frac{٢٨}{\text{س}}$ (لماذا؟)

ومنها: ٠,٦٢ × س = ٢٨

س = ... م

وهي البعد بين المبنى والبرج.

ارتفاع البناية = $ع_١$ + $ع_٢$

$\measuredangle$ ١ = ٥١°

ومنها: ظا٥١° = $\frac{ع_٢}{س}$ (لماذا؟)

ومنها: $ع_٢$ = س × ١,٢٣

ومنها: $ع_٢$ = ... م

أي أنّ ارتفاع البناية = ...م + ...م = ...م

تَمارينُ وَمَسائِل :

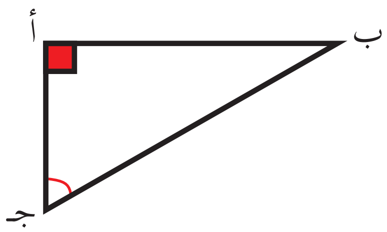
١) تطيرُ طائرةٌ أُفُقيّاً على ارتفاعِ ٦ كم، فإذا رَصَدَتِ الطّائرةُ هدفاً على الأرضِ بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها ٦٠°، فما بُعْدُ الطّائرةِ عَنِ الهدفِ في تلكَ اللّحظةِ؟

٢) أثناءَ عمليّةِ إنقاذِ المصابينَ في حادثِ تصادمِ قاربَيْنِ في عُرْضِ البَحْر، رَصَدَتِ كاميرا طائرةٍ مروحيّةٍ رجلاً يستغيث، فإذا كانتْ زاويةُ انخفاضِ هذا الرَّجُلِ ٣٠°، وكانَ بُعْدُ الرَّجُلِ عَنِ الكاميرا ٢٠٠م، فما ارتفاعُ الكاميرا عَنْ سَطْحِ البَحْرِ في تلكَ اللّحظةِ؟

٣) قاسَ أحمدُ زاويةَ ارتفاعِ شجرةٍ، فكانت ٧٠°، ثُمَّ تحرّكَ إلى الخلف مسافة ١٠م، وقاسَ زاويةَ ارتفاعِها، فكانتْ ٢٦°، فما ارتفاعُ هذه الشَّجرةِ؟

٧-٤ تمارين عامّة

١) أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:



١) أ ب جـ مثلّثٌ قائمُ الزّاويةِ في أ، أيُّ الآتيةِ تُمَثِّلُ جاجـ؟

أ) $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ ب) $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}}$

جـ) $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$ د) $\frac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}}$

٢) أيُّ الآتيةِ يُمكنُ أنْ يُمَثِّلَ جيبَ تمامِ زاويةٍ حادّة؟

أ) صفر ب) ٠,٨٩ جـ) ١ د) ٢

٣) أيُّ الآتيةِ تساوي جا٤٠°؟

أ) جتا٤٠° ب) جا٥٠° جـ) جتا٥٠° د) ظا٥٠°

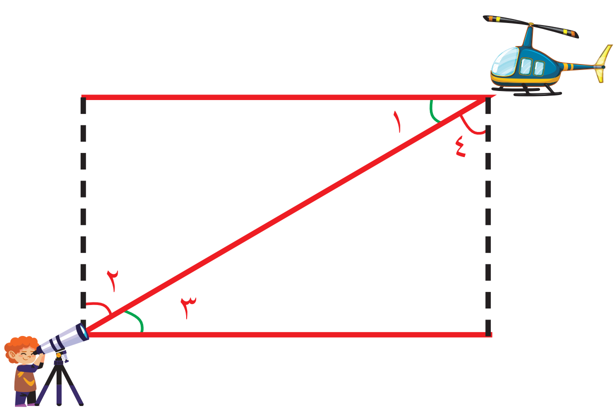
٤) ما قيمةُ حا^{٢}٤٥° ؟

أ) ٠,٢٥ ب) ٠,٥ جـ) ٠,٧٥ د) ١

٥) في الشّكْلِ الآتي، ما الزّاويةُ الّتي تُمَثِّلُ زاوية ارتفاعَ المروحيّة؟

أ) ∡ ١ ب) ∡ ٢

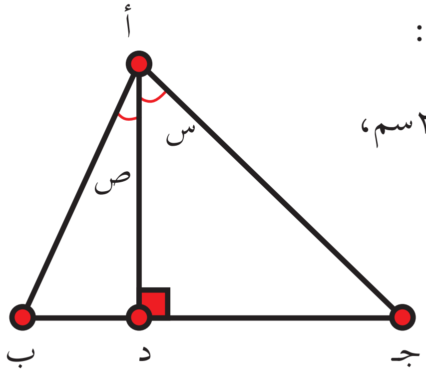
جـ) ∡ ٣ د) ∡ ٤



٢) المثلّثُ أ ب جـ، فيه أ د عموديٌّ على ب جـ، حيثُ إنّ:

أ جـ = ٢٠سم، أ ب = ١٥ سم، أ د = ١٢سم ، ب جـ = ٢٥سم،

ب د = ٩ سم ، أَجِدُ:



أ) جاس   ب) ظاص

جـ) جاب   د) جتاجـ

٣) أَجِدُ قيمةَ كُلٍّ من الآتية، دونَ استخدامِ الآلَةِ الحاسبة:

أ) ظا٤٥° + جا٣٠°

ب) جتا٣٣° – جا٥٧°

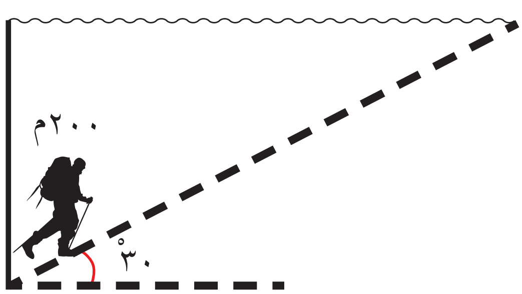
٤) أَجِدُ كُلّاً من الآتية:

أ) جتا٦٣°

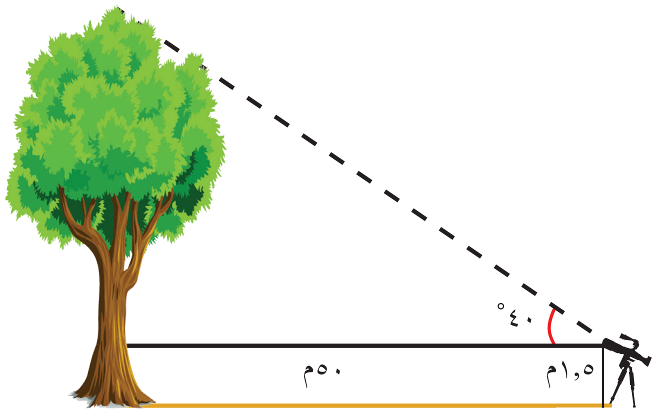
ب) جا٢٤°

جـ) ظا٨٠°

٥) يريدُ رياضِيٌّ تَسَلُّقَ منحدرٍ، ارتفاعُ قِمَّتِه ٢٠٠م عن نقطة انطلاقه، حيثُ يمشي في مسارٍ مائلٍ بزاويةٍ مقدارُها ٣٠°، كما في الشّكْلِ المجاور، فما طولُ المسارِ الّذي سيسلكُهُ الرّياضِيُّ حتّى يَصِلَ إلى قِمَّةِ المَنْحَدَرِ؟



٦) رَصَدَتْ كاميرا مُثَبَّتَةٌ على ارتفاعِ ١,٥م عن سطحِ الأرض قِمَّةَ شجرة، بزاويةِ ارتفاعٍ مقدارُها ٤٠°، فإذا كانتِ الكاميرا تَبْعُدُ ٥٠متراً عن ساقِ الشّجرةِ، كما في الشّكل.



أجد كلاً من:

١) إرتفاع هذه الشّجرة.

٢) بُعْدُ الكاميرا عن قِمَّةِ الشَّجرة؟ وهلْ يُمكنُ إيجادُ هذا البُعْدِ بطريقةٍ مختلفةٍ؟

٧) رصدت طائرة موقعاً لهدف معين بزاوية انخفاض مقدارها ٦٠°، فإذا كان احتمال إصابة الهدف يُعطى بالقاعدة $\frac{١}{٢}$ جاس، حيث س تمثل زاوية الانحفاض. أحسب احتمالية إصابة الهدف.

أقيم ذاتي:

أعبر بلغتي عن توظيف المفاهيم التي تعلمتها في هذه الوحدة في حياتي العملية.

مشروع الوحدة:

تُعَدُّ اليافطةُ التّعريفيّةُ للمدرسةِ عُنواناً مهمّاً، وتحظى بأهمِّيَّةٍ خاصّة، فإذا أرادتِ المدرسةُ تجديدَ اليافطةِ، فكيفَ تساعدُ المدرسةَ في تحديدِ موقعِ اليافطة، بحيثُ تكونُ على ارتفاعٍ مناسب؟ أَتعاوَنُ مع أفرادِ مجموعتي في اقْتِراحِ بعضِ زوايا الارتفاعِ؛ لتحديدِ ارتفاعِ هذه اليافطة، وكذلكَ اقتراح زوايا ارتفاعٍ مناسبةٍ لمعلّقاتٍ مهمّةٍ في الصَّفِّ، مثل: ساعة حائط، ولوحة تعليميّة، ....

روابط الكترونية: http://www.schoolarabia.net/math/general_math/level2/alnsab/alnsab9.htm

الاحتمالات

الوحدة

٨

تُعدُّ لعبةُ المنقلة من الألعاب التراثيّة الفلسطينيّة، أتأمّلُ الصورة، وأبحثُ عن كيفيّة توظيف مفاهيم الاحتمالات في بحث اللاعبين عن الفوز باللعبة.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف قوانين الاحتمالات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١- إيجاد احتمال حادث في تجربة عشوائية.

٢- إيجاد احتمال الاتحاد لأي حادثين.

٣- إيجاد احتمال متممة حادث.

٤- إيجاد احتمال الفرق بين حادثين.

٥- توظيف الاحتمالات في حل مسائل حياتية.

٨-١ احتمال الحادث

نشاط١:

أصدر مجلس النقد الفلسطيني أثناء الانتداب البريطاني نقوداً من مصكوكاتٍ معدنيةٍ برونزيةٍ ونكليةٍ وفضيةٍ كانت القطع الفضية دائرية الشكل غير مثقوبة، يظهر على الوجة الأول غصن الزيتون وكلمة فلسطين وعلى الوجه الثاني العدد (١٠٠)مل.

فإذا القيت إحدى هذه القطع الفضية مرتين، فما إحتمال الحادث ح الذي يمثل ظهور العدد ١٠٠ مرتين؟

أرمز للنتيجة الظاهرة على الوجه الأول بالرمز ص وعلى الوجه الثاني بالرمز ك.

الفضاء العيني (Ω) = { ص ص ، ص ك ، ك ص ، ك ك }

ح = { ك ك }

ومنها ل(ح) = $\frac{\text{عدد عناصر ح}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$ = ...

أتذكر: إذا كان ح حادثاً في فضاءٍ عينيّ Ω، فإنّ احتمال الحادث ح = $\frac{\text{عدد عناصر ح}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$

وبالرموز ل(ح) = $\frac{\text{ع(ح)}}{\text{ع}(\Omega)}$

نشاط٢:

لَدى رمي حجرِ النّردِ المنتظَمِ مرةً واحدةً، وملاحظة الرّقم الظّاهر على الوجه العلوي،

أكتبُ Ω ، ثم أحسبُ احتمال الحوادث $ح_{١}$، $ح_{٢}$، $ح_{٣}$، $ح_{٤}$:

Ω = { ١، ٢ ، ٣، ٤، ٥، ٦ }

١) $ح_{١}$: ظهور عددٍ زوجيّ

$ح_{١}$ = { ٢، ٤ ، ٦ }ومنها ل($ح_{١}$) = $\frac{\text{ع}(ح_{١})}{\text{ع}(\Omega)}$ = ... ، وهو عدد موجب

٢) $ح_{٢}$: ظهور عددٍ أقلّ من ٢

$ح_٢$ = {١}   ومنها ل($ح_٢$) = $\frac{ع(ح_٢)}{ع(\Omega)}$ = ... ، وهو عدد ....

٣) $ح_٣$: ظهور عددٍ أقلّ من ١

$ح_٣$ = Ø   (لماذا؟)،   ومنها: ل($ح_٣$) = $\frac{\cdot}{٦}$ = ...

٤) $ح_٤$: ظهور عددٍ أكبر من صفر

$ح_٤$ = Ω   (لماذا؟)،   ومنها: ل($ح_٤$) = ١   (لماذا؟)

أتذكّر: لأيّ حادث ح، فإنّ: صفر ≤ ل(ح) ≤ ١

نشاط٣:

صندوقان يضمُّ الأوّلُ ٣ بطاقاتٍ مرقّمةً بالأرقام ٢، ٤ ،٥ ويضمُّ الثّاني بطاقتين مرقّمةً بالأرقام ٤، ٦، تريدُ لمى سحبَ بطاقةٍ من الصّندوق الأوّل، ثمّ سحبَ بطاقةٍ من الصندوق الثاني. أُكملُ إيجادَ احتمالاتِ الحوادث الآتية:

$ح_١$: ظهور عددَيْن مجموعهما ٨   ، $ح_٢$: ظهور عددَيْن زوجيّيْن

Ω = { (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٦)}

$ح_١$= { (٢ ، ٦) ، .... }   ومنها: ل($ح_١$) = $\frac{٢}{٦}$ (لماذا؟)

$ح_٢$= { (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٦) } ومنها: ل($ح_٢$) = ...

نشاط٤:

لَدى تسجيلِ المواليد للأُسرِ ذات الأطفال الثلاثة، حسب الجنس وتسلسُل الولادة. فإذا تمّ اختيارُ أسرةٍ عشوائيّاً، أجد احتمال الحوادث الآتية:

$ح_١$: أنْ يكون لدى الأسرة ولدان فقط.

$ح_٢$: أنْ يكون لدى الأسرة ولدان على الأقل.

Ω = { و و و، و و ب، و ب و، ب و و، و ب ب، ب و ب، ب ب و، ب ب ب }

ومنها: ع(Ω) = ...

$ح_١$= { و و ب، و ب و، ب و و} ، ومنها: ل($ح_١$) = $\frac{...}{٨}$

$ح_٢$= { و و ب، وب و ، ب و و، و و و} ، ومنها: ل($ح_٢$) = $\frac{...}{٨}$

نشاط٥:

مجموعة علب عصير تضمُّ ٣ علب عصير ليمون، و٥ علب عصير تفاح، و٢ علبة عصير عنب، غُمرت في حوض ماء فأُزيلَ عنها اللاصقُ الخارجي الذي يغلّفها، فإذا اختيرت علبةٌ عشوائيّاً، فما احتمال أنْ تكونَ العلبة المختارة:

١) تحتوي عصير تفاح. ٢) تحتوي عصير عنب.

١) ل (العلبة تحتوي عصير تفاح) = $\frac{\text{عدد علب التفاح}}{\text{عدد العلب الكلي}} = \frac{\cdots}{١٠}$

٢) ل (العلبة تحتوي عصير عنب) = $\frac{\text{عدد علب العنب}}{\text{عدد العلب الكلي}} = \cdots\cdots$

نشاط٦:

تمّ إيجادُ زمرةِ الدم لمجموعةٍ من الأشخاص، فكانت كما في الجدول الآتي، فإذا تمّ اختيارُ شخصٍ عشوائيّاً، فما احتمال الحوادث الآتية؟

فصيلة الدم	O	A	B	AB
عدد الأشخاص	٤٠	٣٥	١٥	١٠

١) $ح_١$: أنْ تكون فصيلة دم الشخص A.

٢) $ح_٢$: أنْ تكون فصيلة دم الشخص AB.

٣) $ح_٣$: أنْ تكون فصيلة دم الشخص O أو B.

ل(ح) = $\frac{ع(ح)}{ع(\Omega)}$ ومنها: ١) ل($ح_١$) = $\frac{٣٥}{١٠٠}$

٢) ل($ح_٢$) = $\cdots\cdots$

٣) ل($ح_٣$) = $\frac{٤٠ + \cdots}{١٠٠}$

$= \frac{\cdots}{١٠٠}$

تمارين ومسائل:

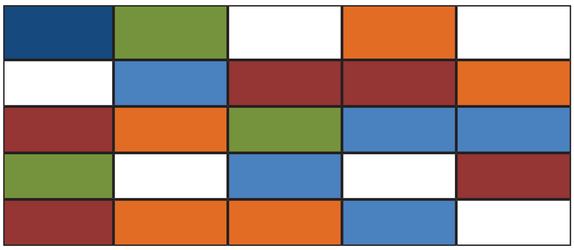
١) يريد أحمدُ اختيارَ مِظلّةٍ عشوائيّاً من صُندوقٍ يضمُّ ٣ مِظلّاتٍ ملوّنة برسومٍ للأطفال، و ٧ منها ملوّنةٌ بالأزرق، و ٣ منها ملوّنةٌ بالأصفر، ما احتمال:

أ) أنْ تكونَ المِظلّة المختارة ملوّنةً برسوم الأطفال؟

ب) أنْ تكون المِظلّة المختارة ملوّنةً بالازرق؟

جـ) أنْ تكون المِظلّة المختارة غيرَ ملوّنةٍ برسوم الأطفال؟

٢) تريد سناء رميَ سهمٍ باتّجاه لوحةٍ ملوّنةٍ، كما في الشكل المجاور، فما احتمال أنْ يُصيبَ هذا السّهمُ المنطقة الملوّنة باللون الأحمر؟



٣) لدى رمي قطعةِ نقدٍ ثلاثَ مرّاتٍ وملاحظة النتائج الظاهرة على الوجه العلوي في الرميات الثلاث، أجد احتمال الحوادث الآتية:

أ) ح$_{١}$: ظهور صورة وكتابتيْن.

ب) ح$_{٢}$: ظهور صورتين على الأقلّ.

جـ) ح$_{٣}$: أنْ تكون النتائج على الأوجه الثلاثة متشابهة.

٤) لدى إلقاء قطعةِ نقدٍ، ثمّ رمي حجرِ نرد، أجدُ احتمال الحوادث الآتية:

أ) ح$_{١}$: ظهور صورةٍ، وعددٍ زوجيّ.

ب) ح$_{٢}$: ظهور كتابةٍ، وعددٍ أقلّ من ٣ .

٥) إذا كان ح$_{١}$، ح$_{٢}$ حادثين في فضاءٍ عينيّ، وكان ل (ح$_{١}$) = ٠,٦ وكان ع(ح$_{١}$) = ٣، ع(ح$_{٢}$) = ٤، فما قيمة ل(ح$_{٢}$)؟

٦) إذا كان ل (ح$_{١}$) = ل(ح$_{٢}$)، بيّن بمثال أن ح$_{١}$ ≠ ح$_{٢}$

٨-٢ قوانين الاحتمالات

نشاط ١:

يُرادُ اختيارُ حرفٍ عشوائيّاً من مجموعة بطاقاتٍ كُتبتْ عليها الحروف:

س، ل، ق، د، ت، ف، ط، ي، ن، و، ب، ر، ا. أكتبُ الحوادثَ الآتية، ثمّ أُكمل:

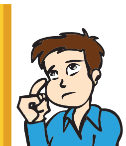
ح$_{١}$: اختيار أحد حروف كلمة بيسان. ، ح$_{٢}$: اختيار أحد حروف كلمة طبريّا.

ح$_{١}$ = { ب ، ي ، س، ا، ن } ، ومنها: ل(ح$_{١}$) = $\frac{٥}{١٣}$ (لماذا؟)

ح$_{٢}$ = { ط ، ب ، ر، ي، ا } ، ومنها: ل(ح$_{٢}$) = $\frac{\cdots}{١٣}$ (لماذا؟)

ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$ = { ب ، ي، ا } ، ومنها: ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$) = $\frac{٣}{١٣}$ (لماذا؟)

ح$_{١}$ $\cup$ ح$_{٢}$ = { ب ، ي، س، ا، ن، ط، ر } ، ومنها: ل(ح$_{١}$ $\cup$ ح$_{٢}$) = ...، فكيف يمكن إيجاد ل(ح$_{١}$ $\cup$ ح$_{٢}$) بطريقةٍ أخرى؟



أتذكّر: إذا كان ح$_{١}$، ح$_{٢}$ حادثين في فضاءٍ عينيّ، فإنّ ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$) هو احتمال حدوث الحادثيْن ح$_{١}$، ح$_{٢}$ معاً، أمّا ل(ح$_{١}$ $\cup$ ح$_{٢}$)، فهو احتمال حدوث أحد الحادثين ح$_{١}$ أو ح$_{٢}$ على الأقلّ وأنّ: ل(ح$_{١}$ $\cup$ ح$_{٢}$) = ل(ح$_{١}$) + ل(ح$_{٢}$) − ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$)

نشاط ٢:

أكملُ إيجادَ ل(ح$_{١}$ $\cup$ ح$_{٢}$) في كلٍّ ممّا يأتي:

١) إذا كان ل(ح$_{١}$) = ٠,٤ ، ل(ح$_{٢}$) = ٠,٧، ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$) = ٠,٢

ل(ح$_{١}$ $\cup$ ح$_{٢}$) = ل(ح$_{١}$) + ل(ح$_{٢}$) − ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$)

= ٠,٤ + ... − ...

= ١,١ − ... = ٠,٩

١) إذا كان ل($ح_١$) = ٠,٧ ، ل($ح_١$) = ٢ل($ح_٢$) ، ل($ح_١ \cap ح_٢$) = ٠,٣

ل($ح_١$) = ٢ل($ح_٢$) ومنها: ٠,٧ = ٢ل($ح_٢$)

ومنها: ل($ح_٢$) = ٠,٣٥ (لماذا؟)

ل($ح_١ \cup ح_٢$) = ل($ح_١$) + ل($ح_٢$) − ل($ح_١ \cap ح_٢$)

= ٠,٧ + ٠,٣٥ − ٠,٣

= ...

نشاط٣:

إذا كان احتمالُ نجاحِ رجاء في امتحان الرياضيات ٠,٧، واحتمالُ نجاحها في امتحان اللغة العربية ٠,٨، واحتمال نجاحها في الإمتحانين معاً ٠,٦، فما احتمالُ نجاحِ رجاء في أحد هذين الإمتحانين؟

أفرض أنّ: ل($ح_١$) = احتمال نجاح رجاء في الرياضيات، ومنها: ل($ح_١$) = ٠,٧

وأنّ: ل($ح_٢$) = احتمال نجاح رجاء في اللغة العربية، ومنها: ل($ح_٢$) = ...

أستنتج أنّ: ل($ح_١ \cap ح_٢$) = ٠,٦ (لماذا؟)، وأنّ المطلوب هو: ل($ح_١ \cup ح_٢$) (لماذا؟)

ل($ح_١ \cup ح_٢$) = ل($ح_١$) + ل($ح_٢$) − ل($ح_١ \cap ح_٢$)

= ... + ٠,٨ − ٠,٦

= ١,٥ − ٠,٦

= ....

نشاط٤:

لدى اختيار عددٍ عشوائيّاً من المجموعة س = {١١،١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦،١٧، ١٨، ١٩}

إذا كان $ح_١$: يمثل اختيارَ عددٍ زوجيّ، $ح_٢$: يمثل اختيار عددٍ يقبل القسمة على٥، أجد:

ل($ح_١ \cap ح_٢$).

$ح_١$ = { ١٢، ... ، ... ، ١٨ }

$ح_٢$ = {١٥} (لماذا؟)

$ح_١ \cap ح_٢$ = $\emptyset$ (لماذا؟)، ومنها: ل($ح_١ \cap ح_٢$) = ...

أتعلّمُ: إذا كان ح$_{١}$، ح$_{٢}$ حادثين منفصلين (ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$ = $\emptyset$)، فإنّ:
ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$) = صفر،
وعندها يكون ل(ح$_{١}$ $\cup$ ح$_{٢}$) = ل(ح$_{١}$) + ل(ح$_{٢}$).

أناقش: الحادثان المنفصلان، هما حادثان لايمكن أن يحدثا في الوقت ذاته.

نشاط٥:

إذا كان ح$_{١}$، ح$_{٢}$ حادثيْن في فضاءٍ عينيّ، وكان ل(ح$_{١}$) = ٠,٤، ل(ح$_{٢}$) = ٠,٥،

ل(ح$_{١}$ $\cup$ ح$_{٢}$) = ٠,٨ ، فهل ح$_{١}$، ح$_{٢}$ منفصلان؟

ل(ح$_{١}$ $\cup$ ح$_{٢}$) = ل(ح$_{١}$) + ل(ح$_{٢}$) – ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$)

٠,٨ = ... + ... – ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$)

٠,٨ = ٠,٩ – ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$)

-٠,١ = -ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$) (لماذا؟)

ومنها: ل(ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$) = ٠,١

وعليه فإنّ: ح$_{١}$، ح$_{٢}$ غير منفصلين.

نشاط٦:

أتأمّلُ التمثيل المجاور بأشكال فن للفضاء العيني(Ω)،

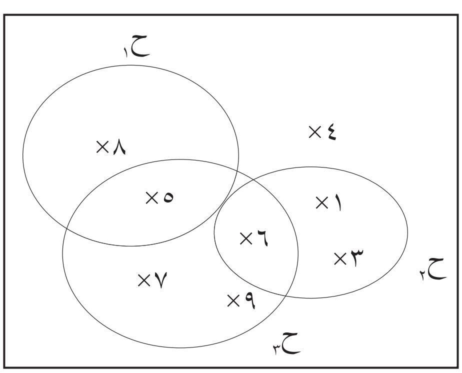
لتجربة عشوائيّة والحوادث ح$_{١}$، ح$_{٢}$، ح$_{٣}$، ثمّ أكمل:

Ω = { ١، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ }

ح$_{١}$ = {٥، ٨} ومنها: ل(ح$_{١}$) = $\frac{٢}{٨}$

ح$_{٢}$ = { ١، ٣، ٦ } ومنها: ل(ح$_{٢}$) = ...

ح$_{٣}$ = { ٥، ٦، ٧، ٩ } ومنها: ل(ح$_{٣}$) = ...



Ω

$\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٢} = \cdots$

ومنها: $\text{ل}(\text{ح}_{١} \cup \text{ح}_{٢}) = \text{ل}(\text{ح}_{١}) + \text{ل}(\text{ح}_{٢})$ (لماذا؟)

$$= \frac{٢}{٨} + \frac{٣}{٨} = \cdots\cdot$$

$\text{ح}_{٢} \cap \text{ح}_{٣} = \{٦\}$ ومنها $\text{ل}(\text{ح}_{٢} \cap \text{ح}_{٣}) = \cdots$

$$\text{ل}(\text{ح}_{٢} \cup \text{ح}_{٣}) = \text{ل}(\text{ح}_{٢}) + \text{ل}(\text{ح}_{٣}) - \text{ل}(\text{ح}_{٢} \cap \text{ح}_{٣})$$

$$= \frac{٣}{٨} + \frac{٤}{٨} - \frac{١}{٨}$$

$= \cdots\cdot$ (لماذا؟)

$\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٣} = \{٥\}$ ومنها: $\text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٣}) = \cdots$

$$\text{ل}(\text{ح}_{١} \cup \text{ح}_{٣}) = \text{ل}(\text{ح}_{١}) + \text{ل}(\text{ح}_{٣}) - \text{ل}(\text{ح}_{١} \cap \text{ح}_{٣})$$

$$= \frac{٢}{٨} + \frac{٤}{٨} - \frac{١}{٨}$$

$= \cdots\cdot$ (لماذا؟)

أناقش: يمكن إيجاد اتّحاد حادثين بطريقتين.

تمارين ومسائل

١) يضمُّ صفٌّ ٣٠ طالباً، فإذا كان ١٤ منهم يتابعون مبارياتِ كرةِ القدم، ١٠ منهم يتابعون مبارياتِ كرة السّلة، ٨ يتابعون مباريات اللعبتيْن. فإذا تمّ اختيارُ أحدِ طلاب الصفّ عشوائيّاً، فما احتمال أنْ يكون هذا الطالب من متابعي:

أ) مباريات كرة السلة وكرة القدم.　　　　ب) مباريات كرة السلة أو كرة القدم.

٢) إذا كان احتمالُ نجاحِ يمنى في الرياضيات ٠,٧٥، واحتمال نجاحها في الفيزياء ٠,٨، واحتمال نجاحها في الرياضيّات، أو الفيزياء = ٠,٨٨، فما احتمال نجاحها في المبحثين معاً؟

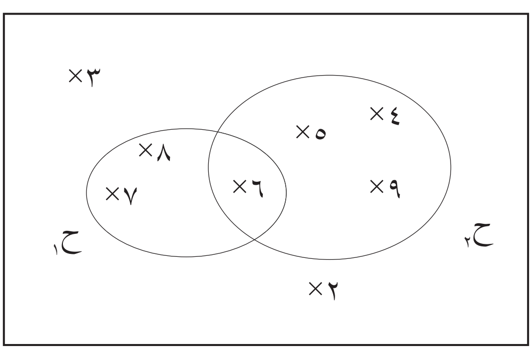
٣) إذا كان ل($ح_١$) = ٢ل($ح_٢$) وكان ل($ح_١ \cup ح_٢$) = ٠,٧، ل($ح_١ \cap ح_٢$) = ٠,٣،
أجد: ل($ح_١$) ، ل($ح_٢$).

٤) سُحِبَتْ بطاقةٌ عشوائيّاً من صندوق يضمُّ ٨ بطاقاتٍ مرقّمة بالأرقام: ١ إلى ٨، فإذا كان
$ح_١$: يمثّلُ ظهورَ عددٍ أوّلي.
$ح_٢$: يمثّلُ ظهورَ مربعِ عددٍ طبيعيّ.
$ح_٣$: يمثّل ظهورَ عددٍ أكبر من ٣.
أجدُ كلًّا من: ل($ح_١ \cup ح_٢$)، ل($ح_٢ \cup ح_٣$)، ل($ح_١ \cup ح_٣$).

٥) معتمداً على التمثيل المجاور،
أجد الآتي:

أ) ل($ح_١ \cap ح_٢$)

ب) ل($ح_١ \cup ح_٢$)

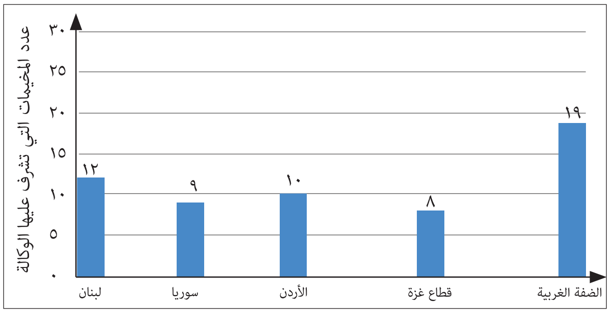


Ω

٨-٣ احتمال المتمّمة لحادث والفرق بين حادثيْن

نشاط ١:

يبيّن التمثيلُ المجاورُ توزيعَ أعداد المخيّمات التي تُشرفُ عليها وكالةُ الغوث في مناطق اللجوء: الضفة الغربية، قطاع غزة، سوريا، الأردن، ولبنان. فإذا اختار طالبٌ مخيّماً عشوائيّاً، ليتحدث عنه في ذكرى النكبة، فما احتمال أنْ:



الدولة

١) يكون المخيّم أحد المخيّمات في سوريا؟

٢) لا يكون المخيّمُ من المخيّمات في سوريا؟

أرمز لحادث اختيار مخيّم في سوريا بالرمز $ح_١$

ومنها $\overline{ح_١}$: حادث اختيار مخيّم في غير سوريا.

Ω: أعداد المخيّمات في الدول الأربعة، ومنها: ع(Ω) = ١٩ + ٨ + ١٠ + ٩ + ١٢ = ...

احتمال أنْ يكون المخيّم أحد المخيّمات في سوريا = ل($ح_١$)

$$= \frac{\text{عدد المخيمات في سوريا}}{\text{عدد جميع المخيمات}}$$

$$= \frac{...}{٥٨}$$

احتمال أنْ يكون المخيّم من غير مخيّمات سوريا = ل($\overline{ح_١}$)

$$= \frac{\text{عدد المخيمات في غير سوريا}}{\text{عدد جميع المخيمات}}$$

$$= \frac{١٩ + ٨ + ١٠ + ١٢}{٥٨}$$

$$= ....$$

ألاحظ أن: ل($ح_١$) + ل($\overline{ح_١}$) = $\frac{٩}{٥٨} + \frac{٤٩}{٥٨} = ١$

أتعلّم: إذا كان ح حادثاً في فضاءٍ عينيّ، فإنّ ل($\overline{ح}$) هو احتمال متمّمة الحادث ح، والذي يعني أيضاً احتمال عدم حدوث الحادث ح، وأنّ: ل(ح) + ل($\overline{ح}$) = ١

أي أنّ: ل($\overline{ح}$) = ١ − ل(ح)

نشاط٢:

لدى إلقاءِ قطعةِ نقدٍ منتظمة ثلاث مرات، ما احتمال ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل؟

أفرضُ ح : حادث ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل.

ومنها $\overline{ح}$: عدم ظهور أيّ صورة

ومنها $\overline{ح}$ = { ك ك ك }

ع(Ω) = ٨ (لماذا؟)

ومنها: ل($\overline{ح}$) = $\frac{١}{٨}$

ل(ح) = ١ − ل ($\overline{ح}$)

= ١ − $\frac{١}{٨}$ = ...

أناقش: هل يمكن حساب الاحتمال بطريقة أخرى؟

نشاط٣:

إذا كان ل ($\overline{ح_١}$) = ٠,٤ ، ل ($ح_٢$) = ٠,٦ ، ل($ح_١ \cap ح_٢$) = ٠,٣، أجد:

أ) احتمال حدوث $ح_١$

ب) احتمال عدم حدوث $ح_٢$.

جـ) احتمال عدم حدوث الحادثين $ح_١$، $ح_٢$ معاً .

أ) احتمال حدوث $ح_١$ = ١ − ل($\overline{ح_١}$) = ١ − ... = ٠,٦

ب) احتمال عدم حدوث $ح_٢$ = ل($\overline{ح_٢}$)

= ١ − ل ($ح_٢$) = ١ − ... = ...

جـ) احتمال عدم حدوث الحادثين $ح_١$، $ح_٢$ معاً = ل($\overline{ح_١ \cap ح_٢}$) (لماذا؟)

= ١ − ل($ح_١ \cap ح_٢$)

= ١ − ... = ٠,٧

نشاط ٤:

إذا كانت Ω = { ١، ٢، ٤، ٥، ٦، ٨، ٩ }، وكان $ح_١$ = { ١، ٢، ٤، ٥، ٨ }،

$ح_٢$ = { ٢، ٥، ٦، ٩ }، أجد $ح_١ - ح_٢$ ، ثم أكمل:

$ح_١ - ح_٢$ يعني حدوث $ح_١$ وعدم حدوث $ح_٢$ ؛ أي العناصر الموجودة في $ح_١$ وغير موجودة في

$ح_٢$ ومنها: $ح_١ - ح_٢$ = { ١، ٤، ٨ } (لماذا؟)

$ل\ (ح_١ - ح_٢) = \frac{٣}{٧}$

$ح_١ \cap ح_٢$ = { ٢، ٥ } ومنها: $ل\ (ح_١ \cap ح_٢) = \dots$

$ل\ (ح_١) - ل\ (ح_١ \cap ح_٢) = \frac{\dots}{٧} - \frac{٢}{٧}$

$= \frac{٣}{٧}$

ألاحظ أنّ: $ل\ (ح_١ - ح_٢) = ل\ (ح_١) - ل\ (ح_١ \cap ح_٢)$

أتعلّمُ: إذا كان $ح_١$، $ح_٢$، حادثين في فضاء عيني، فإنّ احتمال حدوث $ح_١$ وعدم حدوث $ح_٢$ التي تُكتب على الصورة $ل(ح_١ - ح_٢)$، يمكن أنْ تُحسب من القاعدة:

$ل(ح_١ - ح_٢) = ل\ (ح_١) - ل\ (ح_١ \cap ح_٢)$

وبالمثل فإنّ: $ل(ح_٢ - ح_١) = ل\ (ح_٢) - ل\ (ح_١ \cap ح_٢)$.

نشاط ٥:

يحتوي صندوق على سبع كراتٍ مرقّمةٍ بالأرقام ٢، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، يريد حمزة سحب كرةٍ من الصندوق عشوائياً، فإذا كان الحادث ح$_١$ يمثل ظهور رقمٍ يقبل القسمة على ٢، وكان الحادث ح$_٢$ يمثل ظهور رقمٍ أكبر من ٤، أجد: ل(ح$_١$ − ح$_٢$)، ل(ح$_٢$ − ح$_١$).

ح$_١$ = { ٢، ٤، ...، ٨ }، ومنها: ل(ح$_١$) = $\frac{٤}{٧}$

ح$_٢$ = { ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ } ، ومنها: ل(ح$_٢$) = $\frac{...}{٧}$

ح$_١$ $\cap$ ح$_٢$ = { ٦، ٨ } ، ومنها: ل(ح$_١$ $\cap$ ح$_٢$) = $\frac{...}{٧}$

ل(ح$_١$ − ح$_٢$) = ل (ح$_١$) − ل (ح$_١$ $\cap$ ح$_٢$)

= $\frac{٤}{٧}$ − $\frac{٢}{٧}$

= ...

ل(ح$_٢$ − ح$_١$) = ل (ح$_٢$) − ل (ح$_١$ $\cap$ ح$_٢$)

= $\frac{٥}{٧}$ − $\frac{...}{٧}$

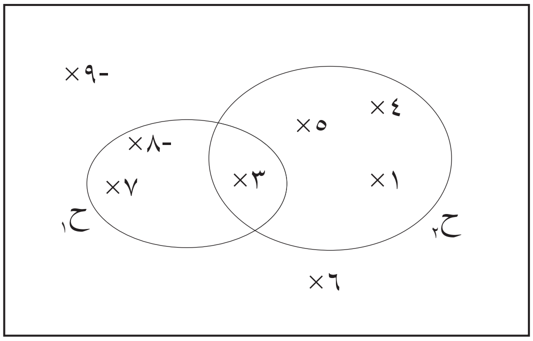
= $\frac{٣}{٧}$

أفكر: هل يمكن إيجاد ل(ح$_١$ − ح$_٢$) بطريقةٍ أخرى؟

أناقش: قد تختلف قيمة ل(ح$_١$ − ح$_٢$)، ل(ح$_٢$ − ح$_١$).

تمارين ومسائل:

١) معتمداً على الشكل المجاور، أجد كلًّا ممّا يأتي :



Ω

أ) ل($\overline{\text{ح}_1}$)

ب) ل($\overline{\text{ح}_2}$)

جـ) ل($\text{ح}_1 - \text{ح}_2$)

د) ل($\text{ح}_2 - \text{ح}_1$)

٢) إذا كان احتمالُ نجاحِ رؤى في امتحان الرياضيّات ٠,٩، واحتمالُ نجاحِها في امتحان اللغة العربيّة ٠,٨٥، واحتمالُ نجاحِها في المبحثين معاً ٠,٨، أجد كلًّا ممّا يأتي:

أ) احتمال عدم نجاح رؤى في الرياضيات.

ب) احتمال نجاحها في الرياضيات، وعدم نجاحها في اللغة العربية.

جـ) احتمال عدم نجاحها في المبحثين معاً.

٣) استطلع المعلم آراء ٣٦ طالباً من طلاب الصف الثامن حول طبيعة الألعاب الرياضيّة التي يفضلون ممارستها، فوجد أنّ: ٢٠ طالباً يفضّلون الألعاب الجماعيّة، و١٠ طلاب يفضّلون ممارسة الألعاب الفرديّة، و ٦ طلاب يفضلون ممارسة النوعيْن من الألعاب. إذا تمّ اختيار طالب عشوائيّاً، فما احتمال أن يكون هذا الطالب:

أ) لا يفضّلُ ممارسة الألعاب الجماعيّة؟

ب) يفضّلُ ممارسة الألعاب الفردية، ولا يفضل ممارسة الألعاب الجماعيّة؟

جـ) يفضلُ ممارسة الألعاب الجماعيّة، ولا يفضل ممارسة الألعاب الفردية؟

٤) إذا كان ل (ح_1) = ٠,٥ ، ل ($\overline{\text{ح}_2}$) = ٠,٦، ل($\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2$) = ٠,٣، أجد:

أ) احتمال عدم حدوث ح_1.

ب) احتمال حدوث ح_2.

جـ) احتمال عدم حدوث الحادثين ح_1، ح_2 معاً.

٨-٤ تمارين عامّة

١) أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيمّا يأتي:

١ لدى إلقاء قطعة نقد منتظمة مرتين، ما احتمال ظهور الصورة في رمية واحدة فقط من هاتين الرميتين؟

أ) ٠,٢٥ ب) ٠,٥ جـ) ٠,٧٥ د) ١

٢ إذا كانت ع(Ω) = ١٠، وكان ح = { ٣ ، ٤ ، ٥ }، فما قيمة ع ($\overline{ح}$)؟

أ) ٠,٣ ب) ٠,٧ جـ) ٣ د) ٧

٣ إذا كان ل$(ح_1)$ = ل$(ح_2)$، فأيّ العبارات الآتية دائماً صحيحة؟

أ) $ح_1 = ح_2$ ب) $ح_1$، $ح_2$ منفصلين

جـ) $ح_1 - ح_2 \neq \emptyset$ د) ل$(\overline{ح_1})$ = ل$(\overline{ح_2})$

٤ عائلة مكونة من أربعة أطفال، ما احتمال أن يكون لديها ٤ أطفال ذكور؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{٤}$ جـ) $\frac{١}{٨}$ د) $\frac{١}{١٦}$

٥ إذا كان ل$(ح_1)$ = ٠,٣، ل$(ح_2)$ = ٠,٤، وكان $ح_1$ ، $ح_2$ منفصلين، فأي العبارات الآتية خاطئة؟

أ) ل$(ح_1 - ح_2)$ = ٠,٣ ب) ل$(ح_2 - ح_1)$ = ٠,٤

جـ) ل$(ح_1 \cup ح_2)$ = ٠,٧ د) ل $(\overline{ح_1 \cap ح_2})$ = صفر

٢) في تجربة رمي حجر نرد منتظم مرة واحدة، إذا كان $ح_١$: حادث ظهور عدد أقل من ٤، $ح_٢$: حادث ظهور عدد زوجي، فما احتمال ظهور عدد أقل من ٤، أو ظهور عدد زوجي؟

٣) إذا كان $ح_١$، $ح_٢$ حادثين منفصلين، وكان ل($ح_١$) = ٠,٧، ل($ح_٢$) = ٠,٢، أجد:

أ) ل($ح_١ \cup ح_٢$)

ب) ل($\overline{ح_١ \cup ح_٢}$).

٤) إذا كان ل($ح_١$) = ٤ل($ح_٢$)، وكان ل($ح_١ \cup ح_٢$) = ٠,٧٥، أجد ل($ح_١$)، ل($ح_٢$)، علماً بأنّ $ح_١$،$ح_٢$، حادثان منفصلان.

٥) إذا كان $ح_١$، $ح_٢$ حادثين في فضاء عيني، وكان ل($ح_١$) = ٠,٦٥، ل($ح_٢$) = ٠,٥٥، ل($ح_١ \cap ح_٢$) = ٠,٢، أجد:

أ) ل($ح_٢$)

ب) ل($\overline{ح_١} - ح_٢$)

ج) ل($ح_١ \cup ح_٢$).

أقيم ذاتي:

أعبر بلغتي عن المفاهيم الاكثر اثارة التي تعلمتها في هذه الوحدة.

مشروع الوحدة:

تضمن المواثيق الدولية الحق في تكوين الأسرة، تشير الإحصائيات في فلسطين في إحدى السنوات إلى وجود ٥٢ ذكر مقابل كل ٥٠ أنثى، أي أن نسبة الإناث إلى مجمل السكان ٠,٤٩٩، أتقصى هذه النسبة من خلال القيام بالآتي:

* أختار وزملائي عدداً مناسباً من الأسر وأسجل عدد الذكور وعدد الإناث فيها.
* أجد وزملائي مجموع الذكور ومجموع الإناث فيها.
* أجد نسبة الإناث في تلك الأسر وأقارنها بالإحصائيات المشار إليها وأقارن تلك النسبة باحتمال أن يكون جنس الشخص أنثى لدى إختيار أي شخص عشوائياً.

روابط الكترونية:	www.pcdc.edu.ps www.mathgoodies.com/lessons/vol6/addition.

المشروع

المشروع: شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع.
ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

ميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينفّذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

- **أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:**

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفّر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومترابطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلّب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطّط له مسبقاً.

- **ثانياً: وضع خطة المشروع:**

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخّل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.

٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.

٣. تحديد خطوات سير المشروع.

٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، (شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).

٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلّي.

- **ثالثاً: تنفيذ المشروع:**

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلّاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.

٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلّم بالأخطاء.

٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.

٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.

٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.

٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.

٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

- **رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:**

١. الأهداف التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.

٢. الخطة من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحّدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.

٣. الأنشطة التي قام بها الطلبة من حيث، تنوّعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.

٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التى استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

المراجع

فريدريك بل (1986):طرق تدريس الرياضيات:الجزء الثاني؛ (ترجمة محمد المفتي و ممدوح سليمان). قبرص:الدار العربية للنشر والتوزي

اللحام ، أنور (1990): الجبر ، ط4 ، مطبعة دار الكتاب ، دمشق

ابو الوفاء البوزجاني (1971): علم الحساب العربي ، تحقيق د. احمد سعيدان ،عمان .

انور عكاشة واخرون (1990): تاريخ الرياضيات ، مؤسسة دار الكتب للطباعة والنشر ، عمان

كارتر، فيليب؛ راسيل، كين (2010): الدليل الكامل في اختبارات الذكاء، مكتبة جرير، السعودية

هاشم الطيار، ويحي سعيد (1977): موجز تاريخ الرياضيات، مؤسسة دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل.

السبتي، جورج (1988): الجبر الخطي ، دار الحكمة ، جامعة البصرة

الجنابي، احمد نصيف (1980):، الرياضيات عند العرب ، منشورات دار الجاحظ للنشر، الجمهورية العراقية

عبد اللطيف، علي اسحق(1993): عالم الهندسة الرياضية ابن الهيثم ، منشورات الجامعة الاردنية، عمان ، الاردن .

الخوارزمي ، محمد بن موسى (1939): كتاب الجبر والمقابلة ، تقديم علي مصطفى مسرفة ومحمد مرسي احمد ، القاهرة

ريتش، بارنيت(2004) : الجبر الأساسي ، ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية –القاهرة- مصر

Kline , M,(1972): Mathematics Thought From Ancient to Modern Times , Oxford , N.Y

Lamborg.James(2005):Math reference,Wiley ,N.Y

Bell,E,T(1937): ,Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Friel,Suzan.Rashlin,Sid.Doyle,Dot.& others(2001): Navigating through Algebra in Grades 6-8. NCTM. RESTON, VIRGINIA .

لجنة المناهج الوزارية:

د. صبري صيدم
د. بصري صالح
م. فواز مجاهد
أ. ثروت زيد
أ. عزام ابو بكر
أ. علي مناصرة
د. شهناز الفار
د. سمية النخالة
م. جهاد دريدي

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد
د. محمد صالح (منسقاً)
د. معين جبر
د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي
د. عادل فوارعة
أ. وهيب جبر
د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني
د.سعيد عساف
د. محمد مطر
د. علا الخليلي
د. شهناز الفار
د. علي نصار
د. أيمن الأشقر
أ. أرواح كرم
أ.حنان أبو سكران
أ.كوثر عطية
د. وجيه ضاهر
أ.فتحي أبو عودة
د. سمية النخالة
أ.احمد سياعرة
أ.قيس شبانة
أ.مبارك مبارك
أ. نسرين دويكات
أ. نادية جبر
أ. نشأت قاسم
أ. عبد الكريم صالح
أ. أحلام صلاح

المشاركون في ورشات عمل الجزء الثاني من كتاب الرياضيات للصف الثامن:

أ. أسامة أبو عريش
أ. فداء الحريبات
أ. عالية البحش
أ. فاطمة حرازنة
أ. أسماء بكر
أ. رحمة دراغمة
أ. آمال البرميل
أ. فتيحة حسن
أ. منال حواورة
أ. نادية جبر
أ. حلمي حمدان
أ. فلسطين الخطيب
د. يحيى ماضي
أ. محمد الفرا
أ. رحمة عودة
أ. عبد الله مهنا
أ. زياد أبو الوفا
أ. رحمة البلعاوي
أ. رفيق الصيفي
أ. رائد عبد العال